

СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ

Г. С. ПИСАРЕНКО, В. А. АГАРЕВ, А. Л. КВИТКА,  
В. Г. ПОПКОВ, Э. С. УМАНСКИЙ

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Издание третье, исправленное и дополненное

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
акад. АН УССР Г. С. ПИСАРЕНКО

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов машиностроительных специальностей высших технических учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»  
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
КИЕВ—1973

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

УДК 620.10(075.8)

**Сопротивление материалов.** Под общей ред. акад. АН УССР  
Г. С. Писаренко. Издательское объединение «Вища школа»,  
1973, 672 с.

В книге освещены основные вопросы сопротивления материалов, отражающие современный уровень науки и техники. Достаточно подробно изложены общие методы определения перемещений и метод сил, вопросы упругих колебаний, расчеты при действии повторно-переменных и ударных нагрузок. Приведены элементы теории тонкостенных оболочек, дано большое количество детально разобранных примеров.

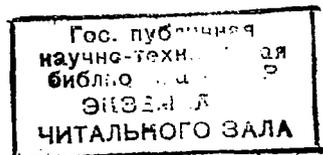
Книга предназначена в качестве учебника для студентов всех форм обучения машиностроительных специальностей технических вузов. Ею могут пользоваться также аспиранты, ассистенты и инженеры, занимающиеся вопросами прочности.

Табл. 27. Ил. 605. Библиогр. 22. Приложений 13.

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению

Зав. редакцией *О. А. Добровольский*

Д4  
11686



73-35689

С  $\frac{0314-005}{M211(04)-73}$  44-73

## ОТ АВТОРОВ

Настоящий учебник написан с учетом многолетнего опыта преподавания курса сопротивления материалов в Киевском политехническом институте, а также использования первых двух изданий книги (1963 и 1967 гг.).

Учебник имеет ряд особенностей, отличающих его от большинства учебников, ранее изданных другими авторами. Учитывая затруднения, которые испытывают студенты при изучении курса, и преследуя цель равномерно распределить домашние расчетно-проектировочные работы, авторы сочли целесообразным изменить обычно принятую последовательность изложения материала. В частности, такой раздел как «Геометрические характеристики плоских сечений», носящий вспомогательный характер, помещен в начале курса, что позволяет уже в первые дни выдавать студентам домашнее расчетно-проектировочное задание. Затем в самостоятельную главу выделены вопросы построения эпюр внутренних усилий — раздел, усвоение которого вызывает у студентов определенные трудности.

Особенность книги состоит также в том, что решение основных задач сопротивления материалов в ней излагается по единому плану: сначала рассматривается статическая сторона задачи, затем — геометрическая, физическая и, наконец, их синтез.

В настоящем учебнике, пожалуй, более полно, чем в других, нашли отражение такие важные для студентов машиностроительных и политехнических высших учебных заведений разделы, как колебания, усталость, а также расчеты при действии ударных нагрузок. Авторы стремились создать такой учебник, который в максимальной степени был бы интересен и полезен студентам. Судя по опыту использования двух предыдущих изданий, поставленная задача в известной степени решена. По-видимому, этому способствовало обилие примеров расчетов и решенных задач по всем без исключения разделам курса, а также стремление в рамках студенческого курса в какой-то мере отразить современные тенденции развития учения о прочности в инженерном деле.

Книга рассчитана на максимальное число учебных часов по программе для студентов механических специальностей технических вузов. В то же время, ею могут пользоваться и студенты других специальностей, так как материалы, предусмотренные любой программой, в компактном виде изложены в соответствующих главах и параграфах.

Настоящее, третье издание явилось результатом существенной переработки учебника, изданного в 1967 г. Поскольку многие разделы последнего значительно дополнены новым материалом, авторы вынуждены были не включать в третье издание теорию изгиба и колебаний пластин, а также в меньшем объеме дать элементы теории оболочек. С целью большей компактности вопросы расчета при ударных нагрузках объединены в одной главе. Вынесен в отдельную главу и расчет кривых брусьев. Улучшена иллюстративно-графическая сторона учебника.

В связи с тем, что третье издание является результатом коллективной работы всех авторов над каждым разделом учебника, мы считали излишним указывать авторов отдельных глав и параграфов, как это было в предыдущих изданиях.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры сопротивления материалов Киевского политехнического института за полезные замечания и пожелания, высказанные в процессе составления учебника.

Особую благодарность мы выражаем инж. Е. Е. Зеленюк за большую помощь, оказанную в подготовке рукописи настоящего издания, а также аспиранту В. С. Носальскому и Н. С. Мишиной за помощь в изготовлении рисунков и оформлении рукописи.

Все отзывы и пожелания просим направлять по адресу 252054, Киев-54, Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа».

## ВВЕДЕНИЕ

§ 1. НАУКА О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ.  
ИЗУЧАЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Сопротивлением материалов называют науку об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов сооружений и машин.

В процессе эксплуатации сооружений и машин их элементы (стержни, балки, пластины, болты, заклепки и др.) в той или иной мере участвуют в работе конструкции и подвергаются действию различных сил — нагрузок. Для обеспечения нормальной работы конструкция должна удовлетворять необходимым условиям прочности, жесткости и устойчивости.

Под *прочностью* понимается способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь.

Под *жесткостью* подразумевается способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформации (изменения формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенной величины, устанавливаемой в соответствии с требованиями, предъявляемыми к конструкции.

*Устойчивость* называется способность конструкции или ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Чтобы конструкция в целом отвечала требованиям прочности, жесткости и устойчивости, а следовательно, была надежной в эксплуатации, необходимо придать ее элементам наиболее рациональную форму и, зная свойства материалов, из которых они будут изготавливаться, определить соответствующие размеры в зависимости от величины и характера действующих сил.

На первый взгляд может показаться, что для надежного сопротивления элементов конструкции внешним нагрузкам достаточно увеличить их размеры. Действительно, иногда это приводит к желаемым результатам. Однако в тех случаях, когда собственный вес составляет существенную часть действующей на конструкцию нагрузки, увеличение размеров ее элементов, а значит и веса, не приведет к увеличению прочности. Увеличение размеров движущихся деталей механизмов и машин приводит к возрастанию сил инерции, увеличивает нагрузку, а это нежелательно, поскольку также может привести к разрушению.

Увеличение размеров, не вызванное требованиями надежности работы конструкции, приводит к излишнему расходу материалов и повышению ее стоимости. Машины и сооружения нужно строить прочными и надежными в эксплуатации, но, в то же время, легкими и дешевыми.

Сопrotивление материалов решает указанные задачи прочности, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение. В теоретической части эта наука базируется на теоретической механике и математике, а в экспериментальной — на физике и материаловедении.

Сопrotивление материалов является исключительно важной инженерной наукой, необходимой для формирования инженеров любой специальности. Без фундаментальных знаний в этой области невозможно создать такие инженерные конструкции, как различного рода машины и механизмы, гражданские и промышленные сооружения, мосты, линии электропередач и антенны, ангары, корабли, самолеты и вертолеты, турбомашины, электрические машины, агрегаты атомной энергии, ракетной и реактивной техники и др.

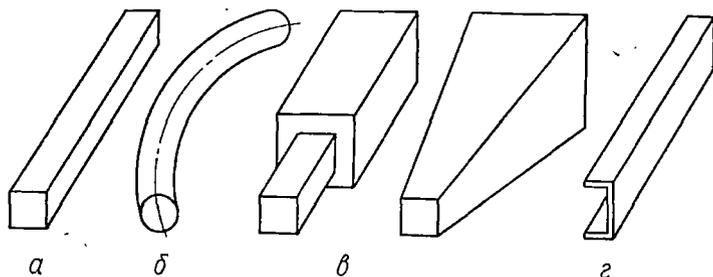


Рис. 1.

Таким образом, сопротивление материалов — это наиболее общая наука о прочности машин и сооружений. Однако она не исчерпывает всех вопросов механики деформируемых тел. Этими вопросами занимается ряд других смежных дисциплин: строительная механика стержневых систем, теория упругости и теория пластичности. Между указанными дисциплинами нельзя установить строгой границы. Основная же роль при решении задач прочности принадлежит сопротивлению материалов.

При всем разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. К ним относятся стержни, сболочки, пластинки и массивные тела.

*Стержнем*, или *брусом*, называется тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других (поперечных) размера (рис. 1, а).

В машинах и сооружениях встречаются стержни как прямолинейные (рис. 1, а), так и криволинейные (рис. 1, б), как призматические (рис. 1, а), так и переменного сечения (рис. 1, в). Примерами прямых стержней являются валы, оси, балки. Примерами кривых стержней могут служить грузоподъемные крюки, звенья цепей и др.

Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров поперечного сечения, называются тонкостенными

(рис. 1, г). В настоящее время они широко применяются в строительных конструкциях, судо- и особенно в авиастроении.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга.

Поверхность, которая делит толщину оболочки на равные части, называется срединной. По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические (рис. 2, а), конические (рис. 2, б), сферические (рис. 2, в) и др. К оболочкам относятся неплоские стенки тонкостенных резервуаров, котлов, купола зданий, обшивка фюзеляжа, крыла и других частей летательных аппаратов, корпуса подводных лодок и т. д.

Если срединная поверхность представляет собой плоскость, то расчетный объект называется *пластинкой* (рис. 2, г). Встречаются

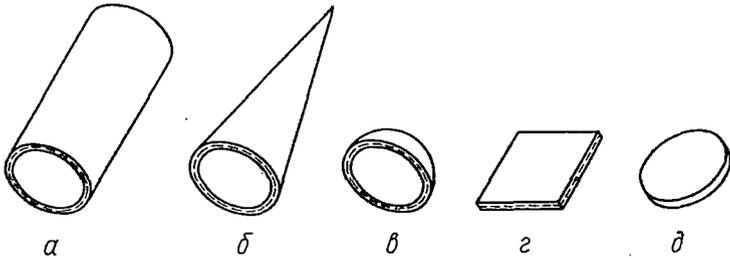


Рис. 2.

пластинки круглые (рис. 2, д), прямоугольные (рис. 2, г) и других очертаний. К пластинкам могут быть отнесены плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Тела, у которых все три размера одного порядка, называются *массивными телами*. К ним относятся фундаменты сооружений, подпорные стенки и т. п.

В сопротивлении материалов задачи, как правило, решаются простыми математическими методами с привлечением ряда упрощающих гипотез и использованием экспериментальных данных; решения при этом доводятся до расчетных формул, пригодных для применения в инженерной практике.

Возникновение науки о сопротивлении материалов связывают с именем знаменитого итальянского ученого Галилео Галилея (1564—1642), проводившего опыты по изучению прочности, хотя истоки этой науки мы видим уже в творениях великого Леонардо да Винчи.

В 1678 г. английский ученый Роберт Гук (1635—1703) установил закон деформирования упругих тел, согласно которому деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию. Этот закон является основным в теории сопротивления материалов.

Быстрое развитие науки о сопротивлении материалов началось в конце XVIII ст. в связи с бурным прогрессом промышленности и транспорта. Проблемами прочности занимались академик Петербургской Академии наук Леонард Эйлер, выдающиеся русские ученые

Н. А. Белелюбский, И. Г. Бубнов, А. М. Воропаев, А. В. Гадолин, Х. С. Головин, Д. И. Журавский, В. Л. Кирпичев, С. П. Тимошенко, Ф. С. Ясинский. Развитию сопротивления материалов содействовали работы иностранных ученых Д. Бернулли, Кармана, Кастильяно, Коши, Кулона, Ламе, Лява, Максвелла, Мора, Навье, Надаи, Нейбера, Прандтля, Пуассона и др.

После Великой Октябрьской социалистической революции большой вклад в науку о прочности внесли советские ученые Н. М. Беляев, В. В. Болотин, В. З. Власов, Б. Г. Галеркин, Н. Н. Давиденков, А. Н. Динник, А. А. Ильюшин, А. Н. Крылов, В. Н. Корноухов, Н. И. Мухелишвили, В. В. Новожилов, П. Ф. Папкович, С. Д. Пономарев, И. М. Рабинович, Ю. Н. Работнов, С. В. Серенсен, В. В. Соколовский, А. А. Уманский, В. И. Феодосьев и др.

## § 2. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЯ. ПОНЯТИЕ О ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ МАТЕРИАЛА

Реальные тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Деформации тел происходят вследствие нагружения их внешними силами или изменения температуры. При деформировании тела его точки, а также мысленно проведенные линии или сечения перемещаются в плоскости или в пространстве относительно своего исходного положения.

При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия между частицами, оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое те занимали до деформации.

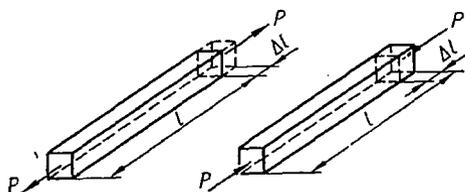


Рис. 3.

Деформации бывают упругие, т. е. исчезающие после прекращения действия вызвавших их сил, и пластические, или остаточные, — не исчезающие.

С увеличением внешних сил внутренние силы увеличиваются, однако до известного предела, зависящего от свойств материала. Наступает момент, когда тело уже не в состоянии сопротивляться дальнейшему увеличению внешних сил. Тогда происходит его разрушение. В большинстве случаев для величины деформаций элементов конструкции устанавливаются определенные ограничения.

Основным объектом, рассматриваемым в сопротивлении материалов, является стержень с прямолинейной осью.

В сопротивлении материалов изучаются следующие основные виды деформаций стержня: растяжение и сжатие, сдвиг (срез), кручение и изгиб. Рассматриваются и более сложные деформации, получающиеся в результате сочетания нескольких указанных выше основных.

Растяжение или сжатие возникает, например, в случае, когда к стержню по его оси приложены противоположно направленные силы (рис. 3). При этом происходит поступательное перемещение

сечений вдоль оси стержня, который при растяжении удлиняется, а при сжатии укорачивается. Изменение  $\Delta l$  первоначальной длины  $l$  стержня называется абсолютным удлинением при растяжении или абсолютным укорочением при сжатии.

Отношение абсолютного удлинения (укорочения)  $\Delta l$  к первоначальной длине  $l$  стержня называется средним относительным удлинением на длине  $l$  и обозначается обычно буквой  $\epsilon_{\text{ср}}$ :

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}.$$

На растяжение или сжатие работают многие элементы конструкций: стержни ферм, колонны, штоки паровых машин и поршневых насосов, стяжные винты и другие детали.

Сдвиг или срез возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения стержня одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними (рис. 4).

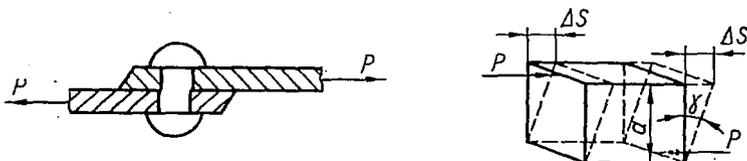


Рис. 4.

Величина смещения  $\Delta s$  называется абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию  $a$  между смещающимися плоскостями (тангенс угла  $\gamma$ ) называется относительным сдвигом. Вследствие малости угла  $\gamma$  при упругих деформациях его тангенс принимается равным углу перекоса рассматриваемого элемента. Следовательно, относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Относительный сдвиг является угловой деформацией, характеризующей перекос элемента.

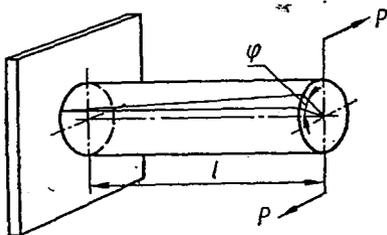


Рис. 5.

На сдвиг или срез работают, например, заклепки и болты, скрепляющие элементы, которые внешние силы стремятся сдвинуть один относительно другого.

Кручение возникает при действии на стержень внешних сил, образующих момент относительно оси стержня (рис. 5). Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня относительно друг друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии  $l$ , называется углом закручивания на длине  $l$ . Отношение угла закручивания  $\varphi$  к длине  $l$  называется относительным углом закручивания:

$$\Theta = \frac{\varphi}{l}.$$

На кручение работают валы, шпиндели токарных и сверлильных станков и другие детали.

Деформация изгиба (рис. 6) заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении кривизны кривого стержня. Происходящее при этом перемещение какой-либо точки оси стержня выражается вектором, начало которого совмещено с первоначальным положением точки, а конец — с положением той же точки в деформированном стержне.

В прямых стержнях перемещения точек, направленные перпендикулярно к начальному положению оси, называют прогибами и обозначают буквой  $w$ . Наибольшие прогибы обычно обозначают буквой  $f$ . При изгибе происходит также поворот сечений стержня вокруг осей, лежащих в плоскостях сечений. Углы поворота сечений относительно их начальных положений обозначаются буквой  $\varphi$ .

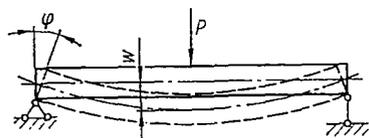


Рис. 6.

На изгиб работают балки междуэтажных перекрытий и мостов, оси железнодорожных вагонов, листовые рессоры, валы, зубья шестерен, спицы колес, рычаги и многие другие детали.

В результате одновременного действия на тело сил, вызывающих различные виды указанных основных деформаций, возникает более сложная деформация. Так, часто элементы машин и конструкций подвергаются действию сил, вызывающих одновременно изгиб и кручение, изгиб и растяжение или сжатие и др.

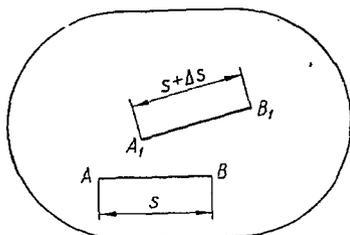


Рис. 7.

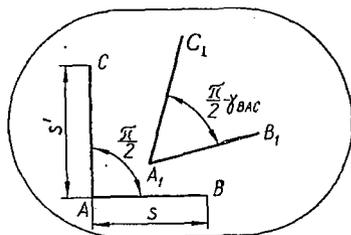


Рис. 8.

Описанные выше деформации стержня дают представление об изменении его формы и размеров в целом, но ничего не говорят о степени и характере деформированного состояния материала. Исследования показывают, что деформированное состояние тела, вообще говоря, неравномерно и изменяется от точки к точке.

Для определения деформации в какой-либо точке  $A$  (рис. 7) проведем в недеформированном теле отрезок прямой  $AB$ , исходящий из этой точки в произвольном направлении и имеющий длину  $s$ . После деформации точки  $A$  и  $B$  переместятся и займут положения  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, а расстояние  $s$  между ними изменится на вели-

чину  $\Delta s$ . Отношение  $\frac{\Delta s}{s} = \epsilon_{cp}$  называется средней относительной линейной деформацией отрезка  $AB$ . Приближая точку  $B$  к точке  $A$ , т. е. уменьшая длину отрезка  $s$ , в пределе получим:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} = \epsilon_{AB}.$$

Величина  $\epsilon_{AB}$  представляет собой относительную линейную деформацию в точке  $A$  по направлению  $AB$ . Если известно, что расстояние между точками  $A$  и  $B$  увеличивается, то  $\epsilon_{AB}$  называют относительным удлинением, при уменьшении этого расстояния — относительным укорочением.

В одной и той же точке  $A$  относительные линейные деформации по различным направлениям различны. Обычно в качестве основных принимают направления, параллельные осям выбранной прямоугольной системы координат. Тогда относительные линейные деформации в точке обозначают соответственно через  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ .

Для полной характеристики деформации в точке вводятся еще и угловые деформации. Если до деформации тела из точки  $A$  (рис. 8) провести два отрезка  $AB$  и  $AC$ , образующих прямой угол, то после перемещения точек вследствие деформации тела отрезки займут положения  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ , а угол между ними изменится на величину  $\angle BAC - \angle B_1A_1C_1$ .

Если приближать точки  $B$  и  $C$  к точке  $A$ , то в пределе получим изменение первоначально прямого угла на величину

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow 0}} (\angle BAC - \angle B_1A_1C_1) = \gamma_{BAC}.$$

Это изменение прямого угла, выраженное в радианах, называется относительной угловой деформацией в точке  $A$  в плоскости, где лежат отрезки  $AB$  и  $AC$ . В той же точке  $A$  относительные угловые деформации в различных плоскостях различны. Обычно относительные угловые деформации определяют в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях. Тогда их обозначают соответственно через  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ .

Деформированное состояние в точке тела полностью определяется шестью компонентами деформации — тремя относительными линейными деформациями  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  и тремя относительными угловыми деформациями  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ .

### § 3. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Для построения теории сопротивления материалов принимают некоторые гипотезы относительно структуры и свойств материалов, а также о характере деформаций. Эти гипотезы следующие:

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Предполагается, что материал сплошь заполняет форму тела. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Материал предполагается однородным и изотропным, т. е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. Хотя кристаллы, из которых состоят металлы, анизотропны, но их хаотическое расположение дает возможность считать макрообъемы металлов изотропными.

В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон существенно различны, армированные материалы и т. п.

3. *Гипотеза о малости деформаций.* Деформации малы по сравнению с размерами деформируемого тела. На этом основании при деформации пренебрегают изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и уравнения статики составляют для недеформированного тела. В некоторых случаях от этого принципа приходится отступать. Такие отступления будут оговариваться особо.

Малые деформации рассматриваются как бесконечно малые величины в математическом анализе. Если в каком-либо уравнении есть слагаемые с произведениями деформаций и слагаемые с деформациями во второй и большей степени, то их отбрасывают как величины высшего порядка малости.

4. *Гипотеза о совершенной упругости материала.* Все тела предполагаются абсолютно упругими. В действительности реальные тела можно считать упругими только до определенных величин нагрузок, и это необходимо учитывать, применяя формулы сопротивления материалов.

5. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.* Предполагается, что при деформировании большинства материалов справедлив закон Гука, выражающий прямую пропорциональность между деформациями и нагрузками.

Приняв гипотезы о малости деформаций и о линейной зависимости между деформациями и усилиями, можно при решении большинства задач сопротивления материалов применять принцип суперпозиции (принцип независимости и сложения действия сил). Например, усилия в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, температурными воздействиями), равны сумме усилий, вызванных каждым из этих факторов, и не зависят от порядка их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.

Перечисленные выше гипотезы, а также некоторые другие, о которых будет сказано дальше, позволяют решать широкий круг задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными практики.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Как уже отмечалось, основным объектом, изучаемым в курсе сопротивления материалов, является стержень.

Сопротивление стержня различным видам деформации часто зависит не только от его материала и размеров, но также и от очертаний оси, формы поперечных сечений и их расположения. Поэтому в настоящей главе, отвлекаясь от физических свойств изучаемого объекта, рассмотрим основные геометрические характеристики его поперечных сечений, определяющие сопротивление различным видам деформаций. К ним относятся площади поперечных сечений, статические моменты и моменты инерции.

### § 4. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПЛОЩАДИ

Рассмотрим произвольную фигуру (поперечное сечение бруса), связанную с координатными осями  $Oz$  и  $Oy$  (рис. 9). Выделим элемент площади  $dF$  с координатами  $z, y$ . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение и для момента площади, которое называется *статическим моментом*. Так, произведение элемента площади  $dF$  на расстояние  $y$  от оси  $Oz$

$$dS_z = y dF$$

называется статическим моментом элемента площади относительно оси  $Oz$ . Аналогично  $dS_y = z dF$  — статический момент элемента площади относительно оси  $Oy$ . Просуммировав такие произведения по всей площади фигуры, получим соответственно статические моменты относительно осей  $z$  и  $y$ :

$$S_z = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F z dF. \quad (2.1)$$

Статические моменты имеют размерность единицы длины в кубе (например,  $см^3$ ).

Пусть  $z_c, y_c$  — координаты центра тяжести (ц. т.) фигуры. Продолжая аналогию с моментами сил, на основании теоремы о моменте равнодействующей можно написать следующие выражения:

$$S_z = F y_c; \quad S_y = F z_c, \quad (2.2)$$

где  $F$  — площадь фигуры.

Отсюда координаты центра тяжести

$$z_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_z}{F}. \quad (2.3)$$

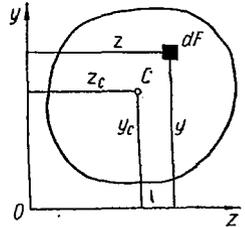


Рис. 9.

Из формул (2.2) следует, что статические моменты площади относительно центральных осей (осей, проходящих через центр тяжести) равны нулю.

В качестве примера вычислим статический момент треугольника (рис. 10) относительно оси, проходящей через основание. На расстоянии  $y$  от неё выделим элементарную площадку в виде полоски, параллельной оси  $z$ . Площадь полоски

$$dF = b(y) dy.$$

Учитывая, что

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y),$$

имеем:

$$S_z = \int_F y dF = \frac{b}{h} \int_0^h y(h - y) dy = \frac{bh^2}{6}.$$

Еще проще решить эту задачу, пользуясь формулой (2.2). Очевидно, что

$$F = \frac{1}{2} bh, \quad y_c = \frac{1}{3} h;$$

следовательно,

$$S_z = \frac{1}{2} bh \cdot \frac{1}{3} h = \frac{bh^2}{6}.$$

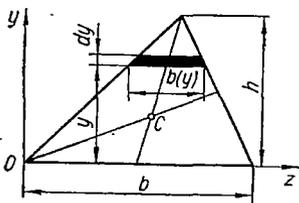


Рис. 10.

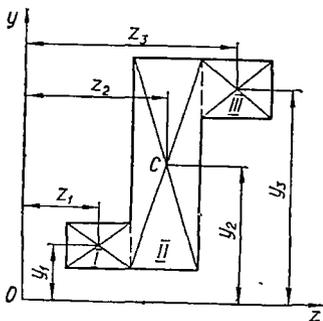


Рис. 11.

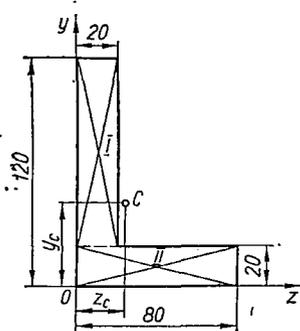


Рис. 12.

Для вычисления статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простые части (рис. 11), для каждой из которых известна площадь ( $F_i$ ) и положение центра тяжести ( $z_i, y_i$ ). Статический момент площади всей фигуры относительно данной оси определяется как сумма статических моментов каждой части:

$$S_z = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i;$$

$$S_y = F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n = \sum_{i=1}^n F_i z_i. \quad (2.4)$$

По формулам (2.3) и (2.4) легко найти координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.5)$$

Определим, например, положение центра тяжести фигуры, показанной на рис. 12.

Разбиваем фигуру на два прямоугольника. Результаты вычислений сводим в табл. 1.

Таблица 1

№ части фигуры	Площадь $F_i$ участка, см <sup>2</sup>	Координаты центра тяжести участка в системе $zy$ , см		$F_i z_i$	$F_i y_i$	$z_c; y_c$
		$z_i$	$y_i$			
I	20	1	7	20	140	$z_c = \frac{84}{36} = 2,33$
II	16	4	1	64	16	$y_c = \frac{156}{36} = 4,33$
Для всей фигуры	36	—	—	84	156	—

## § 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

*Осевым*, или *экваториальным*, *моментом инерции* площади фигуры называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от рассматриваемой оси. Так, моменты инерции произвольной фигуры (рис. 13) относительно осей  $z$  и  $y$  соответственно

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF. \quad (2.6)$$

*Полярным моментом инерции* площади фигуры относительно данной точки (полюса  $O$ ) называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от полюса:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.7)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей  $z$  и  $y$ , то  $\rho^2 = z^2 + y^2$ . Из выражения (2.7) имеем:

$$J_p = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF = J_z + J_y. \quad (2.8)$$

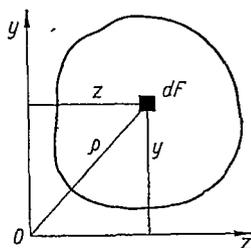


Рис. 13.

Отметим, что величины осевых и полярных моментов инерции всегда положительны.

*Центробежным моментом инерции* называется интеграл произведений площадей элементарных площадок на их расстояния от координатных осей  $z$  и  $y$ :

$$J_{zy} = \int_F zy \, dF. \quad (2.9)$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равным нулю. В самом деле, центробежный момент инерции площади фигуры,

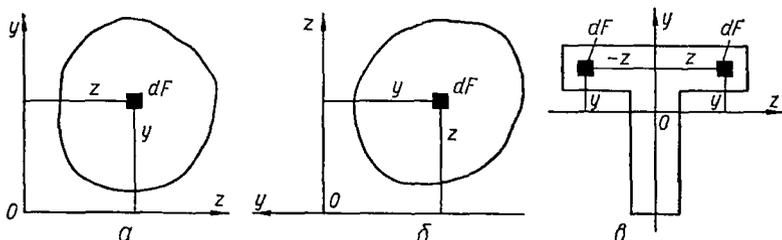


Рис. 14.

показанной на рис. 14, а, относительно выбранной системы осей положителен, так как координаты  $(z, y)$  всех элементов положительны. При повороте осей вокруг начала координат на  $90^\circ$  (рис. 14, б) знак центробежного момента инерции фигуры меняется на обратный, так как в этом положении координаты  $z$  всех элементов положительны, а координаты  $y$  — отрицательны.

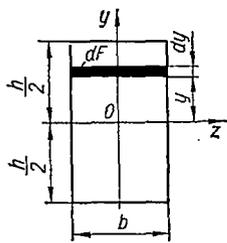


Рис. 15.

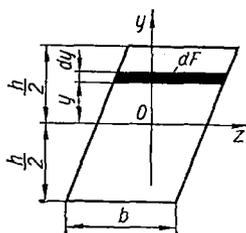


Рис. 16.

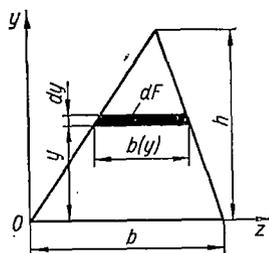


Рис. 17.

Очевидно, постепенно поворачивая оси, можно найти такое их положение, при котором центробежный момент инерции равен нулю. Такие оси называют *главными осями инерции*. Две взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна является осью симметрии фигуры, всегда будут ее главными осями инерции, поскольку в этом случае каждой положительной величине  $zy \, dF$  соответствует такая же отрицательная по другую сторону от оси симметрии (рис. 14, в) и их сумма по всей площади фигуры равна нулю. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями*.

Размерность моментов инерции — единица длины в четвертой степени (например,  $см^4$ ).

Вычислим моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $z$ ,  $y$ , параллельных его сторонам (рис. 15).

Для определения момента инерции относительно оси  $z$  выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси  $z$ . Ширина элемента  $b$ , высота —  $dy$ . Следовательно,

$$dF = bdy,$$

$$J_z = \int_F y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что

$$J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.11)$$

Заметим, что интеграл  $J_z$  не изменится, если переместить все полоски  $dF = bdy$  параллельно оси  $z$ , относительно которой определяется момент инерции. Таким образом, момент инерции параллелограмма (рис. 16) относительно центральной оси  $z$ , параллельной основанию,

$$J_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.12)$$

Найдем момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через его основание (рис. 17).

Разбиваем площадь фигуры, как и в предыдущем примере, на элементарные полоски, параллельные данной оси:

$$dF = b(y) dy.$$

Очевидно, ширина полоски, находящейся на расстоянии  $y$  от оси  $z$ ,

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y).$$

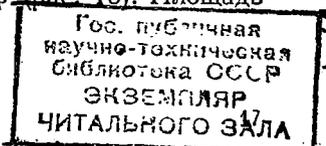
Следовательно,

$$J_z = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.13)$$

Вычислим полярный момент инерции круга относительно его центра, а также момент инерции относительно центральной оси.

При вычислении полярного момента инерции выделим элементарную полоску в виде тонкого кольца толщиной  $dr$  (рис. 18). Площадь такого элемента

$$dF = 2\pi r dr.$$



Полярный момент инерции

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.14)$$

Моменты инерции круга относительно центральных осей легко найти на основании выражения (2.8):

$$J_p = J_z + J_y.$$

В силу симметрии

$$J_z = J_y,$$

следовательно,

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.15)$$

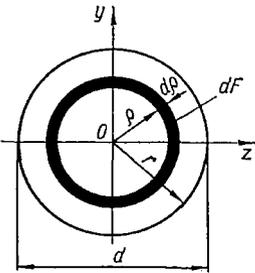


Рис. 18.

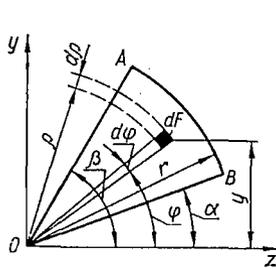


Рис. 19.

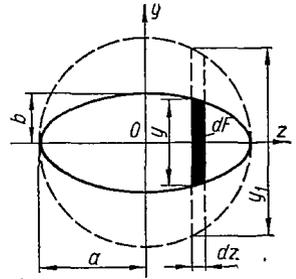


Рис. 20.

Найдем осевой момент инерции кругового сектора  $OAB$  (рис. 19) относительно оси  $z$ .

Пользуясь полярными координатами  $(\rho, \varphi)$ , выделяем элементарную площадку  $dF = \rho d\varphi d\rho$ . Так как

$$y = \rho \sin \varphi,$$

то

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \frac{r^4}{8} \left[ (\beta - \alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} \right]. \quad (2.16)$$

Для четверти круга  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $J_z = \frac{\pi r^4}{16}$ . Полагая  $\beta = \pi$ ,  $\alpha = 0$ , находим момент инерции полуокруга

$$J_z = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Вычислим момент инерции эллипса с полуосями  $a, b$  (рис. 20) относительно центральной оси  $z$ .

Задачу можно решить весьма просто, если рассматривать эллипс как проекцию наклонного круга. При этом

$$\frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}.$$

Представим теперь момент инерции эллипса как сумму моментов инерции элементарных прямоугольников высотой  $y$  и шириной  $dz$ :

$$J_z = \int_F \frac{y^3 dz}{12} = \frac{b^3}{a^3} \int_F \frac{y_1^3 dz}{12}.$$

Последний интеграл в правой части есть момент инерции круга радиуса  $a$  относительно оси  $z$ ; он равен  $\frac{\pi a^4}{4}$ . Следовательно, искомый момент инерции эллипса

$$J_z = \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}. \quad (2.17)$$

Очевидно,

$$J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

## § 6. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

В расчетной практике часто приходится вычислять моменты инерции сложных сечений относительно различных осей, лежащих в плоскости фигуры. Для стандартных поперечных сечений стержней — угловых

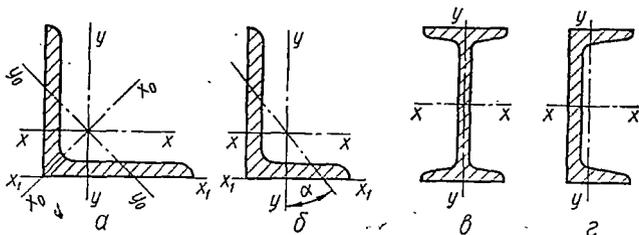


Рис. 21.

равнобоких (рис. 21, а) и неравнобоких (рис. 21, б), двутавровых (рис. 21, в), швеллерных (рис. 21, г) и др. — моменты инерции относительно различных осей даны в таблицах ГОСТ 8509—57; 8510—57, 8239—56\*, 8240—56\* наряду с размерами, площадями сечений, положениями центров тяжести и другими характеристиками. В сорimente центральные оси сечений обозначаются буквами  $x, y$  (рис. 21).

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние можно разбить на отдельные простые части, моменты инерции которых известны. Из основного свойства интеграла суммы следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей.

Пусть, например, требуется определить момент инерции сложной фигуры относительно оси  $z$  (рис. 22):

$$J_z = \int_F y^2 dF. \quad (2.18)$$

Разобьем фигуру на простые составляющие  $I$ ,  $II$  и  $III$ , например так, как показано на рисунке. При вычислении интеграла (2.18) будем последовательно суммировать произведения  $y^2 dF$ , охватывая площади  $F_1, F_2, F_3$  простых фигур. Тогда

$$J_z = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \int_{F_3} y^2 dF.$$

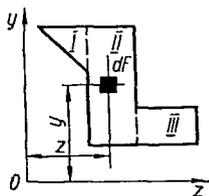


Рис. 22.

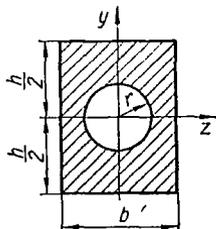


Рис. 23.

Очевидно, каждый из интегралов правой части представляет собой момент инерции соответствующей простой фигуры. Следовательно,

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}. \quad (2.19)$$

Если в сечении есть отверстие, его обычно удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью. Например, сечение, показанное на рис. 23, можно разбить на две простые части — прямоугольник  $b \times h$  и отверстие радиуса  $r$  отрицательной площади. Тогда

$$J_z = J_z^I - J_z^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

## § 7. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны моменты инерции фигуры относительно центральных осей  $z, y$ :

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_{zy} = \int_F zy dF. \quad (2.20)$$

Требуется определить моменты инерции относительно осей, параллельных центральным (рис. 24):

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF. \quad (2.21)$$

Координаты любой точки в новой системе  $z_1 O_1 y_1$  можно выразить через координаты в старых осях так:

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

Подставляем эти значения в формулы (2.21) и интегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + a^2 \int_F dF + 2a \int_F y dF; \quad (2.22)$$

$$J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_F (z + b)^2 dF = \int_F z^2 dF + b^2 \int_F dF + 2b \int_F z dF; \quad (2.23)$$

$$J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF = \int_F (z + b)(y + a) dF = \int_F zy dF + ab \int_F dF + a \int_F z dF + b \int_F y dF. \quad (2.24)$$

Так как интегралы  $\int_F y dF = S_z$  и  $\int_F z dF = S_y$  равны нулю как статические моменты относительно центральных осей, то формулы (2.22), (2.23), (2.24) с учетом формул (2.20) принимают вид

$$J_{z_1} = J_z + a^2 F; \quad (2.25)$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 F; \quad (2.26)$$

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abF.$$

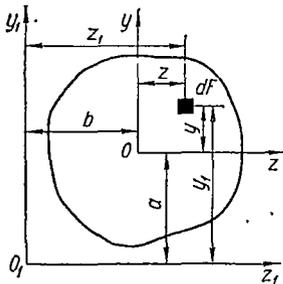


Рис. 24.

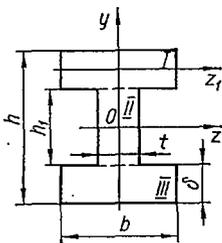


Рис. 25.

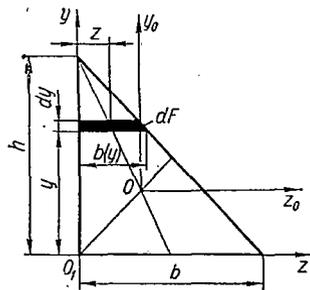


Рис. 26.

Следовательно: 1) момент инерции фигуры относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями;

2) центробежный момент инерции относительно любой системы прямоугольных осей равен центробежному моменту относительно системы центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести в новых осях.

Отметим, что координаты  $a$ ,  $b$ , входящие в формулу (2.26), следует подставлять с учетом их знака.

Формулы (2.25) показывают, что из всех моментов инерции относительно ряда параллельных осей центральные моменты инерции будут наименьшими.

Вычислим момент инерции двутаврового сечения относительно центральной оси  $z$  (рис. 25).

Сечение, состоящее из двух одинаковых полок  $b \times \delta$  и стенки  $h_1 \times t$ , разбиваем на эти три простые части. Тогда

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}.$$

Момент инерции полки относительно оси  $z$  на основании формулы (2.25)

$$J_z^I = J_z^{III} = J_z^I + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 F = \frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 b\delta.$$

Момент инерции стенки

$$J_z^{II} = \frac{th_1^3}{12}.$$

Искомый момент инерции двутавра

$$J_z = 2 \left[ \frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 b\delta \right] + \frac{th_1^3}{12}. \quad (2.27)$$

Определим центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей  $z$ ,  $y$  (рис. 26), совпадающих с катетами, а также относительно центральных осей  $z_0$ ,  $y_0$ , параллельных им.

Выделим элементарную площадку в виде полоски шириной  $b$  ( $y$ ) и высотой  $dy$ . Площадь ее

$$dF = b(y) dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

Горизонтальная координата центра тяжести полоски

$$z = \frac{1}{2} b(y) = \frac{h-y}{2h} b.$$

Центробежный момент инерции относительно осей  $z$ ,  $y$

$$\begin{aligned} J_{zy} &= \int_F zy dF = \int_0^h \frac{h-y}{2h} b \cdot y \frac{h-y}{h} b dy = \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h y(h-y)^2 dy = \frac{b^2 h^2}{24}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Момент инерции относительно центральных осей  $z_0$ ,  $y_0$  на основании формулы (2.26)

$$J_{z_0 y_0} = J_{zy} - a_0 b_0 F,$$

причем

$$a_0 = \frac{h}{3}; \quad b_0 = \frac{b}{3}.$$

Тогда

$$J_{z_0 y_0} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}. \quad (2.29)$$

## § 8. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны моменты инерции произвольной фигуры (рис. 27) относительно координатных осей  $z, y$

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_{zy} = \int_F zy dF. \quad (2.30)$$

Повернем оси  $z, y$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки, считая угол поворота осей в этом направлении положительным. Найдем теперь моменты инерции сечения относительно нового положения осей  $z_1, y_1$ :

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF. \quad (2.31)$$

Координаты произвольной элементарной площадки в новых осях  $(z_1, y_1)$  выражаются через координаты  $(z, y)$  прежней системы осей следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= OC = OE + AD = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EA = y \cos \alpha - z \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Подставим эти значения в выражения (2.31) и проинтегрируем почленно:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \\ &\quad + \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF - \sin 2\alpha \int_F zy dF; \\ J_{y_1} &= \int_F (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF = \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + \\ &\quad + \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF + \sin 2\alpha \int_F zy dF; \\ J_{z_1 y_1} &= \int_F (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dF = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F zy dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left( \int_F y^2 dF - \int_F z^2 dF \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Учитывая формулы (2.30), окончательно находим:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\alpha. \quad (2.35)$$

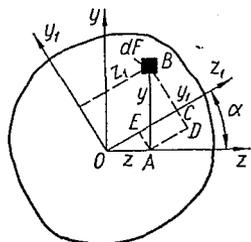


Рис. 27.

Отметим, что формулы (2.34) и (2.35), полученные при повороте любой системы прямоугольных осей, естественно, справедливы и для центральных осей.

Складывая почленно формулы (2.34), находим:

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p. \quad (2.36)$$

Таким образом, при повороте прямоугольных осей сумма моментов инерции не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

При повороте системы осей на угол  $\alpha = 90^\circ$

$$J_{z_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_z; \quad J_{z_1 y_1} = -J_{zy}.$$

### § 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Наибольшее практическое значение имеют главные центральные оси, центробежный момент инерции относительно которых равен нулю. Будем обозначать такие оси буквами  $u, v$ . Следовательно,

$$J_{uv} = 0.$$

Для определения положения главных центральных осей несимметричной фигуры повернем произвольную начальную систему центральных осей  $z, y$  (рис. 28) на некоторый угол  $\alpha_0$ , при котором центробежный момент инерции становится равным нулю:

$$J_{z_1 y_1} = J_{uv} = 0.$$

Тогда из формулы (2.35)

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_0 = 0, \quad (2.37)$$

откуда

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}}. \quad (2.38)$$

Полученные из формулы (2.38) два значения угла  $\alpha_0$  отличаются друг от друга на  $90^\circ$  и дают нам положение главных осей. Как легко видеть, меньший из этих углов по абсолютной величине не превышает  $\frac{\pi}{4}$ .

В дальнейшем будем пользоваться только меньшим углом. Проведенную под этим углом (положительным или отрицательным) главную ось будем обозначать буквой  $u$ . Напомним, что отрицательные углы  $\alpha_0$  откладываются от оси  $z$  по ходу часовой стрелки.

На рис. 29 приведены некоторые примеры обозначения главных осей в соответствии с указанным правилом. Начальные оси обозначены буквами  $z$  и  $y$ .

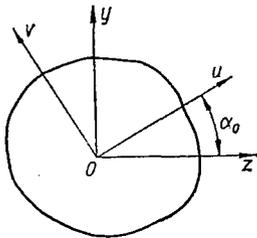


Рис. 28.

Значения главных моментов инерции можно получить из общих формул перехода к повернутым осям (2.34), приняв  $\alpha = \alpha_0$ :

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{zy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_z \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{zy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Преобразуем формулы (2.39) для главных центральных моментов инерции, составив выражения для их суммы и разности. Очевидно, что

$$J_u + J_v = J_z + J_y; \quad (2.40)$$

$$J_u - J_v = (J_z - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{zy} \sin 2\alpha_0 = (J_z - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \quad (2.41)$$

причем в выражении (2.41) сделана замена  $J_{zy}$  из формулы (2.38):

$$2J_{zy} = (J_y - J_z) \operatorname{tg} 2\alpha_0.$$

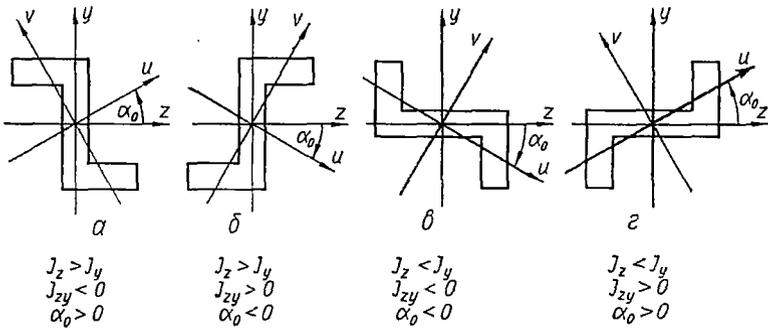


Рис. 29.

Теперь из формул (2.40) и (2.41) находим более удобные выражения:

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) + (J_z - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) - (J_z - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Очевидно, что при  $J_z > J_y$  момент  $J_u > J_v$ .

Используя формулу (2.38), можно исключить из выражений (2.42) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{zy}^2}{(J_z - J_y)^2}}.$$

В результате имеем

$$J_u = \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) \pm \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right]; \quad (2.43)$$

$$J_v = \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) \mp \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right], \quad (2.44)$$

причем верхние знаки следует брать при  $J_z > J_y$ , а нижние — при  $J_z < J_y$ .

Таким образом, формулы (2.38), (2.43) и (2.44) позволяют определять положение главных осей и величину главных центральных моментов инерции.

Если теперь вместо произвольной начальной системы центральных осей  $zOy$  принять главные оси (рис. 30), то формулы (2.34), (2.35) перехода к повернутым осям упрощаются:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha; \\ J_{y_1} &= J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha; \\ J_{z_1 y_1} &= \frac{1}{2} (J_u - J_v) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Важно отметить, что главные моменты инерции обладают свойством экстремальности. В этом легко убедиться, продифференцировав выражение для момента инерции относительно произвольной оси [см. формулы (2.34)] по переменной  $\alpha$ :

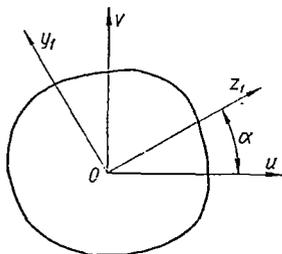


Рис. 30.

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} &= -J_z \sin 2\alpha + J_y \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left( J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha \right) = -2J_{z_1 y_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что производная  $\frac{dJ_{z_1}}{d\alpha}$  обращается в нуль, когда  $J_{z_1 y_1} = 0$ , а это значит, что экстремальные значения имеют моменты инерции относительно главных осей.

Учитывая, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей является величиной постоянной, можно заключить, что относительно одной из главных осей момент инерции имеет максимальное значение, а относительно другой — минимальное.

Отметим, что плоскости, проведенные через ось стержня и главные оси инерции его поперечного сечения, называются *главными плоскостями*.

## § 10. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Вычисление моментов инерции по формулам (2.45) или (2.43), (2.44) можно заменить простым графическим построением. При этом различают прямую и обратную задачи.

Первая заключается в определении моментов инерции относительно произвольных центральных осей  $z$ ,  $y$  по известным направлениям главных осей и величинам главных центральных моментов инерции [формулы (2.45)]. Во второй задаче, имеющей наибольшее практическое значение, определяют положение главных осей и величины главных центральных моментов инерции по известным моментам инерции  $J_z$ ,  $J_y$ ,  $J_{zy}$  относительно любой системы прямоугольных центральных осей [формулы (2.43), (2.44) и (2.38)].

Прямая задача. Пусть требуется определить моменты инерции  $J_z, J_y, J_{zy}$  относительно осей  $z, y$  (рис. 31, а) по известным направлениям главных осей и величинам  $J_u, J_v$ . Для определенности полагаем  $J_u > J_v$ .

Аналитическое решение дается формулами (2.45).

Графическое построение осуществляется следующим образом. Введем в рассмотрение геометрическую плоскость и отнесем ее к прямоугольной системе координат. По оси абсцисс будем откладывать осевые моменты инерции  $J_{oc}$  ( $J_u, J_v, J_z, J_y$  и т. д.), а по оси ординат — центробежные  $J_{цб}$  ( $J_{zy}$  и т. д.).

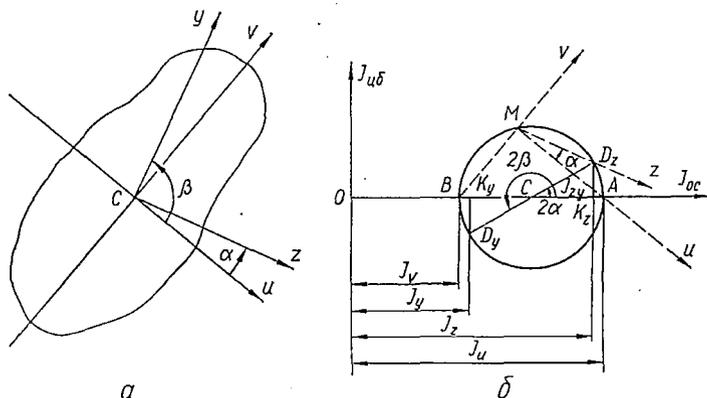


Рис. 31.

В соответствующем масштабе откладываем от начала координат  $O$  вдоль оси абсцисс (рис. 31, б) отрезки  $OA$  и  $OB$ , равные главным моментам инерции. Отрезок  $AB$  делим пополам, так что  $BC = CA = \frac{J_u - J_v}{2}$ . Из точки  $C$  радиусом  $CA$  описываем окружность, называемую *кругом инерции*. Для определения момента инерции относительно оси  $z$ , проведенной под углом  $\alpha$  к главной оси  $u$ , из центра круга под углом  $2\alpha$  проводим луч  $CD_z$  (положительные углы откладываются против часовой стрелки).

Покажем, что ордината точки  $D_z$  круга равна центробежному моменту инерции  $J_{zy}$ , а абсцисса — моменту инерции относительно данной оси  $z$ . Имеем:

$$D_z K_z = CD_z \sin 2\alpha = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.46)$$

Сравнивая формулы (2.46) и (2.45), замечаем, что  $D_z K_z = J_{zy}$ . Далее,

$$\begin{aligned} OK_z &= OB + BC + CK_z = J_v + \frac{1}{2}(J_u - J_v) + \\ &+ \frac{1}{2}(J_u - J_v) \cos 2\alpha = \frac{1}{2}J_u(1 + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}J_v(1 - \cos 2\alpha) = \\ &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (2.47)$$

На основании формулы (2.45) видим, что  $OK_z = J_z$ . Таким образом, в соответствующем масштабе абсциссы точек круга инерции дают нам значения осевых моментов инерции, а ординаты — центробежных.

Чтобы получить значение момента инерции относительно оси  $y$ , перпендикулярной к оси  $z$  и, следовательно, проведенной под положительным углом  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$  к главной оси  $u$ , проводим из центра

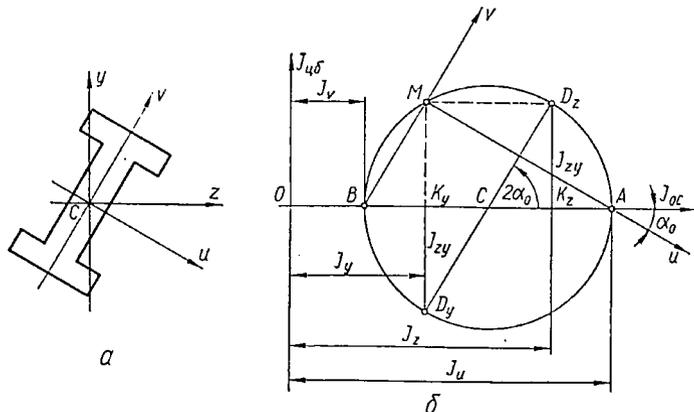


Рис. 32.

круга луч  $CD_y$  под углом  $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ . Очевидно, он является продолжением луча  $CD_z$ . Абсцисса точки  $D_y$  (отрезок  $OK_y$ ) равна моменту инерции  $J_y$ . Ордината этой точки  $K_yD_y$  дает нам значение центробежного момента инерции с обратным знаком ( $-J_{zy}$ ), что соответствует повороту осей на  $90^\circ$ .

Отметим, что двум взаимно перпендикулярным осям соответствуют две точки круга ( $D_z, D_y$ ), лежащие на одном диаметре.

Проведем из точки  $D_z$  прямую (штриховая линия на рис. 31, б), параллельную оси  $z$ , которой она и соответствует. Точка  $M$  ее пересечения с кругом называется *полюсом круга инерции*<sup>1</sup>. Легко показать, что линия, соединяющая полюс с любой точкой круга, дает направление оси, которой эта точка круга соответствует.

Покажем, например, что прямая  $MA$  дает направление главной оси  $u$ . По построению угол  $ACD_z$  равен удвоенному углу  $\alpha$  между осями  $u$  и  $z$ . Угол  $D_zMA$ , как вписанный и опирающийся на ту же дугу  $AD_z$ , равен половине центрального угла  $ACD_z$ , т. е.  $\alpha$ . Следовательно, линия  $MA$ , составляющая с направлением оси  $z$  угол  $\alpha$ , параллельна оси  $u$ . Аналогично, прямая  $MB$  параллельна главной оси  $v$ .

Обратная задача. Пусть известны моменты инерции  $J_z, J_y, J_{zy}$  площади сечения бруса относительно некоторой системы перпен-

<sup>1</sup> Иногда эту точку называют *главной точкой* или *фокусом круга инерции*.

дикулярных осей  $z, y$  (рис. 32, а). Требуется определить главные моменты инерции и положение главных осей. Для определенности построения примем, что  $J_z > J_y, J_{zy} > 0$ .

В геометрической плоскости (рис. 32, б) строим точки  $D_z$  и  $D_y$ , соответствующие моментам инерции относительно осей  $z$  и  $y$ . Абсциссами этих точек являются осевые моменты инерции:  $OK_z = J_z$ ;  $OK_y = J_y$ ; ординатами — центробежный момент инерции  $J_{zy}$ , причем  $K_z D_z = J_{zy}, K_y D_y = -J_{zy}$ . Так как обе точки принадлежат одному

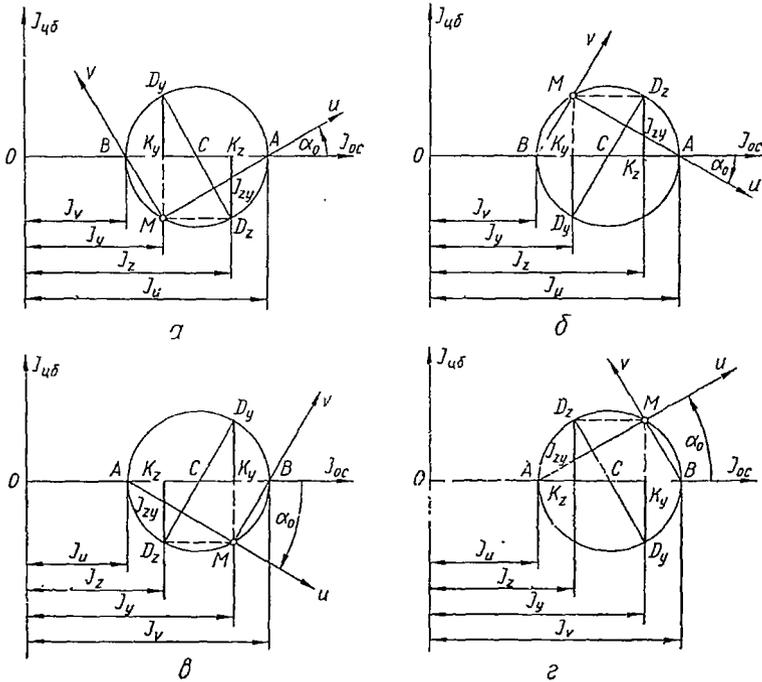


Рис. 33.

диаметру, то, соединив их, получим центр круга инерции  $C$ . Из центра  $C$  описываем окружность радиусом

$$CD_z = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}. \quad (2.48)$$

Она пересекает ось абсцисс в точках  $A$  и  $B$ . Очевидно, что абсциссы этих точек — отрезки  $OA$  и  $OB$  — и есть искомые главные моменты инерции  $J_u, J_v$ . В самом деле:

$$\begin{aligned} OA = OK_y + K_y C + CA &= J_y + \frac{J_z - J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} = \\ &= \frac{1}{2} [(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 OB &= OK_y + K_yC - CB = J_y + \frac{J_z - J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} = \\
 &= \frac{1}{2} [(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}].
 \end{aligned}$$

Для определения направления главных осей построим фокус круга инерции. С этой целью из точки  $D_z (D_y)$  проведем линию, параллельную оси  $z (y)$ , до пересечения с кругом в фокусе  $M$ . Соединяя фокус с точками  $A, B$  круга, получим направления главных осей  $u$  и  $v$  (рис. 32).

На рис. 33 показано графическое решение обратной задачи соответственно для четырех случаев, изображенных на рис. 29.

### § 11. ПОНЯТИЕ О РАДИУСЕ И ЭЛЛИПСЕ ИНЕРЦИИ

Момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции:

$$J_z = \int_F y^2 dF = F i_z^2, \quad (2.49)$$

где  $i_z$  — радиус инерции относительно оси  $z$ .

Из выражения (2.49) следует, что

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (2.50)$$

Аналогично радиус инерции площади сечения относительно оси  $y$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (2.51)$$

Главным центральным осям инерции соответствуют главные радиусы инерции

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \quad (2.52)$$

Например, для прямоугольника, изображенного на рис. 15, главные радиусы инерции

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Построим на главных центральных осях инерции фигуры эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, причем вдоль оси  $u$  откладываем отрезки  $i_v$ , а вдоль оси  $v$  — отрезки  $i_u$  (рис. 34).

Такой эллипс, называемый *эллипсом инерции*, обладает следующим замечательным свойством. Радиус инерции относительно любой центральной оси  $z$  определяется как перпендикуляр  $OA$ , проведенный из центра эллипса на касательную, параллельную данной оси. Для

получения же точки касания достаточно провести параллельно данной оси  $z$  любую хорду. Точка пересечения эллипса с прямой, соединяющей центр  $O$  и середину хорды, и есть точка касания. Измерив затем отрезок  $OA = i_z$ , находим момент инерции:

$$J_z = F i_z^2.$$

## § 12. ПОРЯДОК РАСЧЕТА

Можно рекомендовать следующий порядок определения положения главных осей и величин главных центральных моментов инерции сложного профиля, состоящего из простых частей, характеристики которых легко определить:

1. Проводим произвольную систему прямоугольных координат. Разбиваем фигуру на простые части и определяем по формулам (2.5) положение ее центра тяжести.

2. Проводим начальную систему центральных осей  $z, y$  так, чтобы вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих осей было наиболее просто. Для этого определяем моменты инерции

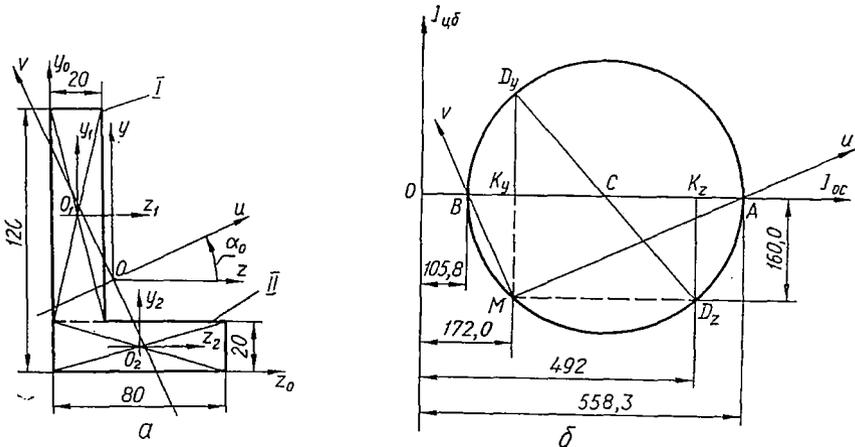


Рис. 35.

частей фигуры относительно их центральных осей, проведенных параллельно осям  $z, y$ , и используем формулы перехода к параллельным осям — (2.25) и (2.26). Таким образом получаем значения  $J_z, J_y, J_{zy}$ .

3. Определяем из формулы (2.38) угол наклона главных центральных осей, причем ось, проведенную под меньшим углом (положительным или отрицательным), обозначаем буквой  $u$ , а перпендикулярную к ней — буквой  $v$ .

4. По формулам (2.43) и (2.44) определяем значения главных центральных моментов инерции.

*Пример 1.* Для фигуры, показанной на рис. 35, определить положение главных осей инерции, главные моменты инерции и радиусы инерции.

Положение центра тяжести этой фигуры было найдено в примере, рассмотренном на с. 15. Координаты центра тяжести в системе осей  $z_0y_0$  таковы:  $z_0 = 2,33$  см,  $y_0 = 4,33$  см.

Проводим начальную систему центральных осей  $z, y$  параллельно сторонам угольника. Для вычисления моментов инерции относительно этих осей разбиваем фигуру на простые части — прямоугольники  $I$  и  $II$  — и проводим через центры их тяжести центральные оси  $z_1, y_1$  и  $z_2, y_2$  параллельно сторонам.

Моменты инерции каждого прямоугольника относительно центральных осей легко определить по формулам (2.10) и (2.11):

$$J_{z_1}^I = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166,7 \text{ см}^4; \quad J_{y_1}^I = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2}^{II} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ см}^4; \quad J_{y_2}^{II} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции каждой простой фигуры относительно центральных осей  $z, y$  вычисляются по формулам перехода к параллельным осям — (2.25) и (2.26). Например:

$$J_z^I = J_{z_1}^I + F_1 a_1^2 = 166,7 + 20 \cdot 2,67^2 = 308,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy}^I = J_{z_1 y_1}^I + F_1 a_1 b_1 = 0 - 20 \cdot 2,67 \cdot 1,33 = -71 \text{ см}^4.$$

Результаты вычислений сводим в таблицу (табл. 2).

Таблица 2

№ участка фигуры	Площадь участка $F_i$ , см <sup>2</sup>	Координаты центра тяжести участка в си- стеме $z_0y_0$ , см		$F_i a_i^2$	$F_i b_i^2$	$F_i a_i b_i$	Моменты инерции участка относительно					
		$a_i$	$b_i$				собственных цент- ральных осей			центральных осей фигуры		
				см <sup>4</sup>						$J_{z_1}$	$J_{y_1}$	$J_{z_1 y_1}$
I	20	2,67	-1,33	142,6	35,4	-71	166,7	6,7	0	309,3	42,1	-71
II	16	-3,33	1,67	177,4	44,6	-89	5,3	85,3	0	182,7	129,9	-89

Суммируя последние три столбца таблицы, находим моменты инерции фигуры относительно центральных осей  $z, y$ :

$$J_z = 492,0 \text{ см}^4; \quad J_y = 172,0 \text{ см}^4; \quad J_{zy} = -160,0 \text{ см}^4.$$

Угол наклона главных центральных осей к оси  $z$  найдем по формуле (2.38):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 160,0}{172,0 - 492,0} = 1,0,$$

откуда

$$\alpha_0 = 22^\circ 30'.$$

Главные центральные моменты инерции определяем по формулам (2.43) и (2.44):

$$J_u = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}] = \frac{1}{2} (664,0 + 452,5) = 558,3 \text{ см}^4;$$

$$J_v = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}] = \frac{1}{2} (664,0 - 452,5) = 105,8 \text{ см}^4.$$

Главные центральные радиусы инерции

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558,3}{36}} = 3,94 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105,8}{36}} = 1,71 \text{ см}.$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 35, б.

## ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ

### § 13. КЛАССИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

Внешними силами называют силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и связанными с ним телами.

Если внешние силы являются результатом непосредственного, контактного взаимодействия данного тела с другими телами, то они приложены только к точкам поверхности тела в месте контакта и называются *поверхностными силами*.

Поверхностные силы могут быть непрерывно распределены по всей поверхности тела или ее части; например: давление пара в котле, ветровая и снеговая нагрузки, давление газа в цилиндре двигателя. Величина нагрузки, приходящаяся на единицу площади, называется *интенсивностью нагрузки*.

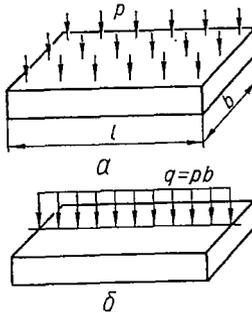


Рис. 36.

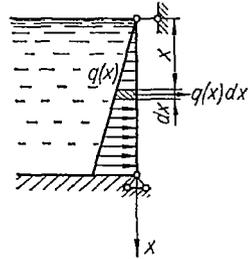


Рис. 37.

Она обозначается обычно  $p$  и имеет размерность  $\text{кг/см}^2$ ,  $\text{кг/м}^2$  или  $\text{Т/м}^2$ <sup>1</sup>. Часто нагрузку, распределенную по поверхности (рис. 36, а), приводят к главной плоскости (рис. 36, б), в результате чего получается нагрузка, распределенная по линии, или *погонная нагрузка*. Интенсивностью такой нагрузки ( $\text{кг/см}$ ,  $\text{кг/м}$ ,  $\text{Т/м}$ ) называют величину нагрузки, приходящуюся на единицу длины линии<sup>2</sup>. Интенсивность может быть переменной по этой длине. Характер изменения нагрузки обычно показывают в виде эпюры (графика)  $q$ .

В случае равномерно распределенной нагрузки (рис. 36, а) эпюра  $q$  прямоугольная (рис. 36, б). При действии гидростатического давления эпюра нагрузки  $q$  треугольная (рис. 37). Встречаются эпюры  $q$  и более сложного вида: трапециевидная, синусоидальная и т. д.

<sup>1</sup> По ГОСТ 9867—61 в Международной системе единиц (СИ) единицей силы является ньютон ( $n$ ). Это сила, которая сообщает покоящейся массе в 1 кг ускорение, равное 1  $\text{м/сек}^2$ . Размерность ньютона ( $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{сек}^2$ ).

Применяемая в настоящем учебнике единица силы системы МКГСС — килограмм ( $\text{кг}$ ) — находится с ньютоном в следующем соотношении:

$$1 \text{ кг} = 9,81 \text{ н}; \quad 1 \text{ н} = 0,102 \text{ кг}.$$

Единица давления — ньютон на квадратный метр ( $\text{н/м}^2$ ). В приближенных инженерных расчетах можно принимать

$$1 \text{ кг/см}^2 \approx 10^5 \text{ н/м}^2 = 10 \text{ н/см}^2.$$

<sup>2</sup> В системе СИ погонная нагрузка измеряется в ньютонах на метр ( $\text{н/м}$ ).

Отметим, что *равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади ее эпюры и приложена в центре ее тяжести.*

Если нагрузка распределена по небольшой части поверхности тела, то ее всегда заменяют равнодействующей, которую называют *сосредоточенной силой*  $P$  ( $\kappa\Gamma$  или  $T$ ). Кроме того, встречаются нагрузки, которые могут быть представлены в виде *сосредоточенного момента* (*пары*). Моменты  $M$  ( $\kappa\Gamma \cdot \text{см}$  или  $T \cdot \text{м}$ )<sup>1</sup> будем изображать обычно одним из двух способов, показанных на рис. 38, а, б. Иногда момент удобно представлять в виде вектора, перпендикулярного к плоскости действия пары. Вектор момента условимся всегда считать правовинтовым. Чтобы отличать его от вектора силы, линию вектора-момента делают волнистой (рис. 38, в) или ставят две стрелки (рис. 38, г).

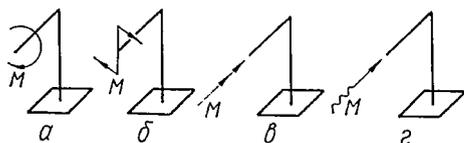


Рис. 38.

Встречаются такие нагрузки, которые не являются результатом контакта двух тел, например: собственный вес, силы инерции движущегося тела и пр. Эти силы приложены в каждой точке объема, занятого телом, а потому называются *объемными*, или *массовыми, силами*.

Собственный вес деталей или частей машин и сооружений обычно значительно меньше других нагрузок, действующих на них. Поэтому, если нет особой оговорки, во всем дальнейшем изложении собственный вес принимать во внимание не будем.

В зависимости от характера приложения сил во времени различают нагрузки статические и динамические. Нагрузка считается *статической*, если она сравнительно медленно и плавно (хотя бы в течение нескольких секунд) возрастает от нуля до своего конечного значения, а затем остается неизменной. При этом можно пренебречь ускорениями деформируемых масс, а значит, и силами инерции.

*Динамические нагрузки* сопровождаются значительными ускорениями как деформированного тела, так и взаимодействующих с ним тел. При этом возникают силы инерции, которыми нельзя пренебречь. Динамические нагрузки делят на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

Нагрузка считается *мгновенно приложенной*, если она возрастает от нуля до своего конечного значения в течение очень короткого промежутка времени (долей секунды). Такова нагрузка при воспламенении горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания или при трогании с места железнодорожного состава.

Для *ударной* нагрузки характерно то, что в момент ее приложения тело, вызывающее нагрузку, обладает определенной кинетической

<sup>1</sup> Согласно СИ размерность момента — ньютон-метр

$$1 \text{ н} \cdot \text{м} = 0,102 \kappa\Gamma \cdot \text{м},$$

$$1 \kappa\Gamma \cdot \text{м} = 9,81 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Можно приближенно считать, что

$$1 \kappa\Gamma \cdot \text{м} = 10 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

энергией. Такая нагрузка получается, например, при забивании свай с помощью копра, в деталях механического кузнечного молота и т. д.

Многие детали машин (шатунны, валы, оси железнодорожных вагонов и пр.) подвержены действию нагрузок, непрерывно и периодически меняющихся во времени. Такие нагрузки называют *повторно-переменными*. Они, как правило, сопряжены с циклически повторяющимися движениями детали. Это возвратно-поступательное движение штока поршня, колебания элементов конструкций и др.

#### § 14. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ЭПЮРЫ

Между соседними частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами) всегда имеются определенные силы взаимодействия, иначе — внутренние силы. Эти силы во всех случаях стремятся сохранить его как единое целое, противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело. Внешние силы, наоборот, всегда стремятся вызвать деформацию тела, изменить взаимное расположение частиц.

Следовательно, величина внутренних сил, действующих между двумя какими-либо частицами, в нагруженном и ненагруженном теле будет различной.

В сопротивлении материалов не рассматривают и не принимают во внимание внутренние силы, действующие в теле, которое находится в своем естественном (ненагруженном) состоянии, а изучают и вычисляют только те дополнительные величины внутренних сил, которые появляются в результате нагружения тела. Поэтому в дальнейшем, говоря о внутренних силах, будем иметь в виду именно эти дополнительные силы взаимодействия, возникающие в результате нагружения. Внутренние силы часто называют *усилиями*.

Для выявления, а затем и вычисления внутренних сил в

сопротивлении материалов широко применяется *метод сечений*.

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное самоуравновешенной системой сил. В интересующем нас месте мысленно рассежем его некоторой плоскостью на две части — *A* и *B* (рис. 39, а). При этом само сечение теперь будет иметь две стороны: одну, принадлежащую части *A* тела (левую), и вторую, принадлежащую части *B* (правую). В каждой точке обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия (рис. 39, б). Исходя из введенной гипотезы о сплошности материала, следует считать, что внутренние силы действуют во всех точках

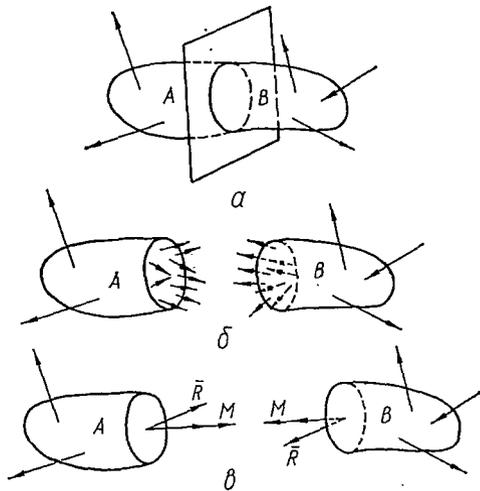


Рис. 39.

проведенного сечения и, следовательно, представляют собой распределенную нагрузку. В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних нагрузок интенсивность внутренних сил в различных точках может быть различна.

Следует подчеркнуть, что внутренние силы, действующие по сечению, принадлежащему части  $A$  тела, в соответствии с третьим законом Ньютона равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, действующим по сечению, принадлежащему части  $B$  тела (рис. 39, б). Другими словами, внутренние силы, действующие на различные части, взаимны. Как всякую систему сил, их можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения), в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор и главный момент внутренних сил в сечении (рис. 39, в).

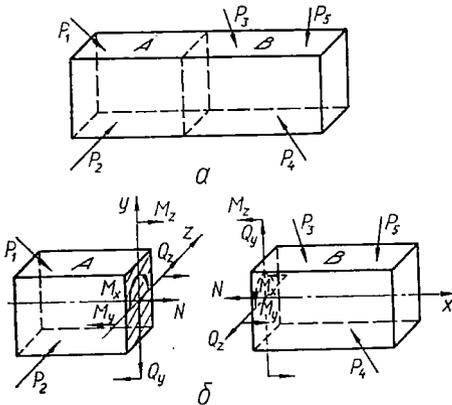


Рис. 40.

В частности, стержень пересекают обычно плоскостью, перпендикулярной к оси, т. е. поперечным сечением (рис. 40, а). Если главный вектор и главный момент внутренних сил спроектировать на ось стержня  $x$  и главные центральные оси сечения  $y$  и  $z$ , то на каждой стороне сечения получим шесть внутренних силовых факторов (рис. 40, б): три силы ( $N, Q_y, Q_z$ ) и три момента ( $M_x, M_y$  и  $M_z$ ). Эти вели-

чины называют *усилиями* и *моментами* в сечении стержня.

Усилие  $N$  вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие);  $Q_y$  и  $Q_z$  — сдвиг сторон сечения соответственно в направлении осей  $y$  и  $z$ ;  $M_x$  — кручение стержня;  $M_y$  и  $M_z$  — изгиб стержня в главных плоскостях ( $zx$  и  $yx$ ). Поэтому для усилий и моментов в сечении приняты следующие названия:

$N$  — продольная, или осевая (направленная по оси стержня), сила;

$Q_y, Q_z$  — поперечные (реже — перерезывающие) силы;

$M_x = M_{кр}$  — крутящий момент;

$M_y, M_z$  — изгибающие моменты.

Для усилий и моментов в сечении можно дать следующие определения: *продольная сила*  $N$  — это сумма проекций всех внутренних сил, действующих в сечении, на нормаль к сечению (или на ось стержня); *поперечные силы*  $Q_y$  и  $Q_z$  — это суммы проекций всех внутренних сил в сечении на главные центральные оси сечения  $y$  и  $z$  соответственно; *крутящий момент*  $M_x$  (или  $M_{кр}$ ) — это сумма моментов всех внутренних сил в сечении относительно оси стержня; *изгибающие моменты*  $M_y$  и  $M_z$  — это сумма моментов всех внутренних сил в сечении относительно главных центральных осей сечения  $y$  и  $z$  соответственно.

Каждое из этих усилий или моментов, как уже указывалось, является результатом взаимодействия частей рассеченного тела, а поэтому должно быть представлено в виде двух противоположно направленных, но равных векторов или моментов (рис. 40, б). Совокупность величин  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  и т. д., приложенных к правой стороне сечения, заменяет действие удаленной левой части стержня на правую часть; совокупность усилий и моментов, приложенных к левой стороне сечения, выражает действие правой части стержня на левую.

Для практического вычисления усилий и моментов в сечении следует иметь в виду следующее:  $N$  численно равно алгебраической сумме проекций на ось стержня (на нормаль к сечению) всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) рассеченного стержня;  $Q_y$  — то же, но на ось  $y$ ;  $Q_z$  — то же, но на ось  $z$ ;  $M_{кр}$  численно равен алгебраической сумме моментов относительно оси стержня всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) рассеченного стержня;  $M_y$  — то же относительно оси  $y$ ;  $M_z$  — то же, но относительно оси  $z$ . К этому выводу легко прийти, если рассмотреть равновесие каждой из частей рассеченного стержня. При этом сумма проекций (или моментов) сил, расположенных слева от сечения, должна быть приложена к правой стороне сечения и наоборот.

Таким образом, метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении стержня при действии любой нагрузки. Для этого нужно:

- 1) найти главные центральные оси поперечных сечений стержня;
- 2) провести мысленно поперечное сечение стержня в том месте, где нужно найти усилия и моменты;
- 3) вычислить силы  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  и моменты  $M_{кр}$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  как алгебраические суммы проекций и моментов внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую по отношению к сечению) рассеченного стержня (обычно на ту, где проекции и моменты вычисляются проще).

В качестве иллюстрации к применению метода сечений рассмотрим следующий пример: найти усилия и моменты в сечении, расположенном посредине стержня (рис. 41).

Поскольку сечение стержня представляет собой прямоугольник, то главными центральными осями сечения будут оси симметрии прямоугольника. Усилия и моменты в сечении находим как сумму проекций и моментов сил, действующих на левую часть рассеченного стержня:

$$N = 10P; Q_y = P; Q_z = 0; M_{кр} = 0;$$

$$M_y = 0; M_z = -P \frac{l}{6}.$$

Нетрудно проверить, что, вычисляя суммы проекций и моментов сил, действующих на правую часть стержня, придем к такому же результату. Например,

$$M_z = -10P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15}l + P \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{6}Pl.$$

Для самостоятельного упражнения рекомендуем убедиться, что, вычисляя сумму проекций и моментов левых или правых сил для сечения, отстоящего на  $l/3$  от левого конца стержня, получим:

$$N = 10P; \quad Q_y = Q_z = 0; \quad M_{кр} = M_y = M_z = 0.$$

Усилия и моменты в разных сечениях одного и того же стержня различны. Графики (точнее диаграммы), показывающие, как изменяются усилия и моменты при переходе от сечения к сечению, называются эпюрами усилий и моментов. Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр:

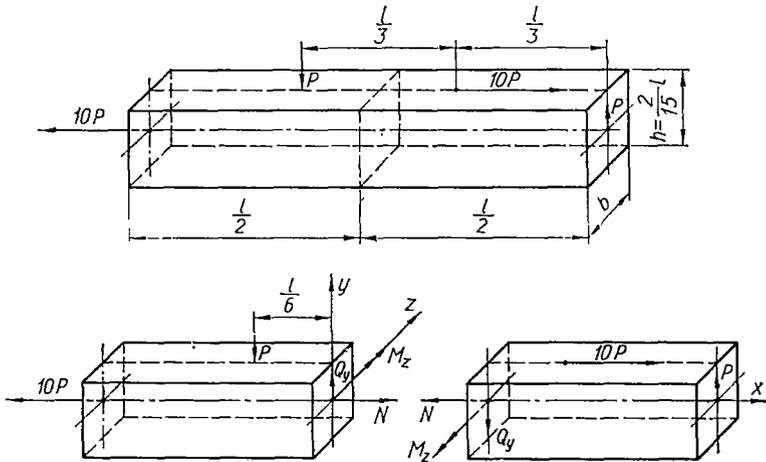


Рис. 41.

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна или просто совпадала с осью стержня.
2. Ординаты эпюры откладывают от оси эпюры по перпендикуляру.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базе.
4. Для усилий и моментов выбирают некоторый масштаб. Ординаты откладывают строго в масштабе. Кроме того, на эпюрах просят числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

### § 15. ЭПЮРЫ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Продольная (осевая) сила считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной, если вызывает сжатие. Внешние силы сами по себе ни положительные, ни отрицательны, но каждая сила дает в выражении для  $N$  слагаемое определенного знака.

В качестве примера построения эпюр осевых сил рассмотрим стержень (рис. 42), нагруженный в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  сосредоточенными силами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , направленными вдоль оси.

Приступая к построению эпюры, стержень разбивают на участки. Участком называют часть стержня между точками приложения сосредоточенных сил. Если на стержень действует распределенная нагрузка, участком называют часть стержня, в пределах которого распределенная нагрузка изменяется по одному закону. В рассматриваемом примере два участка — I (AB) и II (BC).

Чтобы построить эпюры, нужно составить выражения для осевых сил в произвольном сечении каждого участка.

Выберем начало координат в крайней левой точке стержня; ось  $x$  направим вдоль его оси. В произвольном сечении любого участка на расстоянии  $x$  от начала координат находим осевую силу как сумму проекций всех внешних сил, расположенных слева или справа от рассматриваемого сечения:

I участок ( $0 \leq x < a$ )

слева:  $N(x) = P_1 = 200 \text{ кг}$ ;

справа:  $N(x) = P_2 - P_3 = 500 - 300 = 200 \text{ кг}$ .

II участок ( $a < x \leq l$ )

слева:  $N(x) = P_1 - P_2 = 200 - 500 = -300 \text{ кг}$ ;

справа:  $N(x) = -P_3 = -300 \text{ кг}$ .

Поскольку эти величины не зависят от абсцисс сечения, то во всех сечениях первого участка продольная сила  $N = 200 \text{ кг}$ , а для любого сечения второго участка она равна  $-300 \text{ кг}$ . Откладывая полученные ординаты от оси эпюры, строим эпюру  $N$ . Заметим, что штриховка эпюры показывает откладываемые ординаты. В сечениях A, B и C на

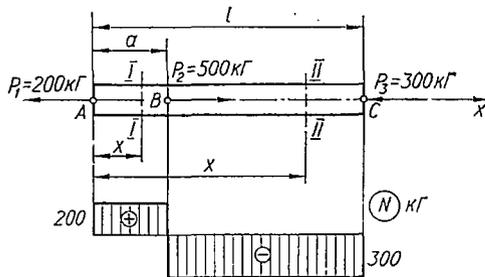


Рис. 42.

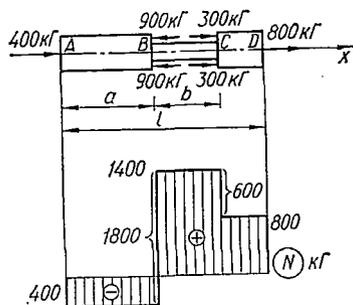


Рис. 43.

эпюре получили скачки, равные соответственно 200, 500 и 300 кг, т. е. как раз тем силам, которые приложены к стержню в этих сечениях.

Если на стержень действуют только сосредоточенные силы, то линия эпюры будет параллельна оси ее (эпюра  $N$  состоит из прямоугольников и имеет скачки в тех сечениях, где приложены внешние силы). Так, нетрудно убедиться, что для стержня, изображенного на рис. 43, эпюра будет иметь такой вид, как показано на рисунке.

Если стержень расположен вертикально и учитывается его собственный вес, то линия эпюры наклонена к оси (для цилиндрического стержня) или криволинейна (для стержня с непрерывно меняющимися размерами сечения).

**Пример 2.** Построим эпюру  $N$  для ступенчатого стержня (рис. 44) с учетом собственного веса. Площадь сечения верхней части стержня  $F_1$ , нижней —  $F_2$ . Объемный вес  $\gamma$  кг/см<sup>3</sup>.

Начало координат выбираем в точке  $A$  (на рисунке показана только ось  $x$ ). Продольную силу в любом сечении вычисляем как сумму вышележащих сил (чтобы не определять предварительно реакции в опоре). Тогда для участка  $AB$

$$N(x) = -P - \gamma F_1 x; \quad (0 \leq x < a);$$

для  $BC$

$$N(x) = -P - \gamma F_1 a - \gamma F_2 (x - a); \quad (a < x \leq l).$$

Это уравнения наклонных прямых, так что эпюра  $N$  трапецевидна. Но поскольку сечения различны, наклон эпюры на участках  $AB$  и  $BC$  неодинаков:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma F_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma F_2.$$

При  $x = l$  из второго уравнения находим наибольшее по величине продольное усилие:  $N = -[P + \gamma F_1 a + \gamma F_2 (l - a)]$ . Этой же величине равна и реакция в заделке.

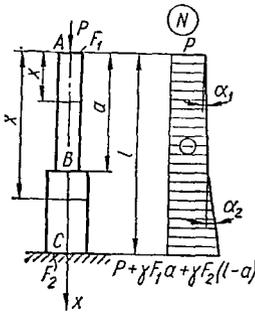


Рис. 44.

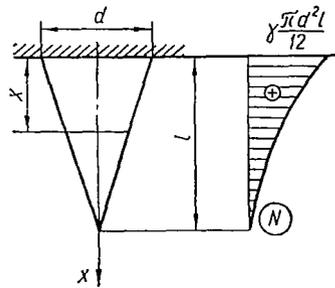


Рис. 45.

**Пример 3.** Построим эпюру для конического стержня (рис. 45).

При любом значении  $x$  осевое усилие в сечении равно весу нижележащей части конуса. Диаметр основания этой части

$$d(x) = \frac{d}{l} (l - x),$$

поэтому

$$N(x) = \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4l^2} (l - x)^3.$$

Отсюда видно, что кривая эпюры будет кубической параболой, причем

$$\left. \frac{dN(x)}{dx} \right|_{x=l} = -\frac{\pi \gamma d^2}{4l^2} (l - x)^2 \Big|_{x=l} = 0.$$

Следовательно, в нижней точке эпюра касается оси. При  $x = 0$

$$N_{\max} = \frac{\gamma \pi d^2 l}{12}.$$

## § 16. ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Деформация кручения наиболее распространена в валах. Если нагрузка на прямолинейный стержень (вал) состоит только из моментов  $M_k$ , плоскости которых перпендикулярны к оси стержня, то из

шести усилий и моментов в любом сечении остается только крутящий момент  $M_{кр}$ .

Внутренний момент  $M_{кр}$  выражается через внешние  $M_k$ :  $M_{кр}$  в сечении равен сумме внешних моментов  $M_k$ , расположенных по одну сторону от сечения. Если стержень (вал) вращается равномерно, то алгебраическая сумма всех  $M_k$  равна нулю. Поэтому результат получится один и тот же, будем ли при вычислении  $M_{кр}$  брать сумму моментов  $M_k$ , расположенных слева или справа от сечения.

Крутящий момент  $M_{кр}$  считается положительным, если при наблюдении с торца вдоль оси рассматриваемой части он стремится вращать сечение по часовой стрелке (рис. 46).

Рассмотрим в качестве примера построение эпюр крутящих моментов для трансмиссионного вала, схема которого представлена на рис. 47.

Разбиваем стержень на участки I, II, III, IV. Выбираем начало координат в крайней левой

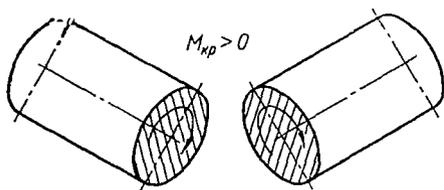
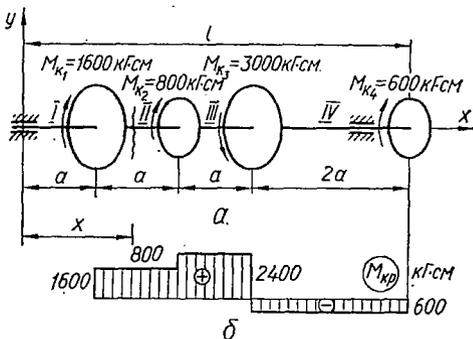


Рис. 46.

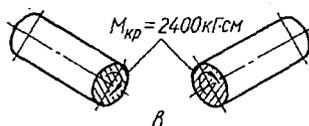


Рис. 47.

точке вала. Так как трением в подшипниках пренебрегаем, то в любом сечении на участке I ( $0 \leq x < a$ )

$$M_{кр} = 0.$$

Проведя произвольные сечения с переменной абсциссой  $x$ , на остальных участках вала получим соответственно:

II участок ( $a < x < 2a$ );  $M_{кр} = M_{k1} = 1600 \text{ кг} \cdot \text{см}$  (слева);

III участок ( $2a < x < 3a$ );  $M_{кр} = M_{k1} + M_{k2} = 1600 + 800 = 2400 \text{ кг} \cdot \text{см}$  (слева);

IV участок ( $3a < x \leq 5a$ );  $M_{кр} = M_{k1} + M_{k2} - M_{k3} = 1600 + 800 - 3000 = -600 \text{ кг} \cdot \text{см}$  (слева);

$$M_{кр} = -M_{k4} = -600 \text{ кг} \cdot \text{см} \text{ (справа).}$$

Величины крутящих моментов на всех участках не зависят от абсциссы сечения, поэтому эпюра крутящих моментов имеет вид трех прямоугольников (рис. 47, б). В тех сечениях, где приложены сосредоточенные внешние моменты  $M_k$ , получаются скачки на величину этих моментов. Заметим, что в месте скачка крутящие моменты не определяют. Их вычисляют на бесконечно близких расстояниях слева и справа от скачка.

Построенная эпюра (рис. 47, б) показывает, что, хотя к валу и приложен момент  $M_k = 3000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ , наибольший крутящий момент в сечении равен лишь  $2400 \text{ кг} \cdot \text{см}$ . Эту величину и следует использовать при расчете на прочность и жесткость. Направление крутящих моментов в сечениях наиболее загруженной части вала — участке III — показано на рис. 47, в.

На практике часто бывают заданы не моменты  $M_k \text{ кг} \cdot \text{см}$ , приложенные к дискам (шкивам или зубчатым колесам), а передаваемые на них или снимаемые с них мощности  $N \text{ л.с.}^1$  и число оборотов вала в минуту  $n$ . Установив зависимость между этими величинами.

Как известно из курса теоретической механики, момент совершает работу на угле поворота. Обозначив угловую скорость вала через  $\omega$ , найдем, что за  $t \text{ сек}$  диск повернется вместе с валом на угол

$$\omega t = \frac{\pi n}{30} t \text{ рад}$$

и момент  $M_k \text{ кг} \cdot \text{см}$  совершит работу

$$A = M_k \omega t = \frac{\pi n M_k}{30} t \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Тогда мощность (работа за 1 сек)

$$N = \frac{A}{t} = \frac{\pi n M_k}{30} (\text{кг} \cdot \text{см})/\text{сек}.$$

Выражая мощность в лошадиных силах, получим:

$$N = \frac{1}{75 \cdot 100} N \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{см}}{\text{сек}} \right] = \frac{\pi n M_k}{75 \cdot 100 \cdot 30} \text{ л. с.}$$

Отсюда

$$M_k = \frac{75 \cdot 100 \cdot 30}{\pi} \cdot \frac{N}{n},$$

или

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n}, \quad (3.1)$$

причем здесь  $N$  подставляют в л. с., а  $n$  — в об/мин. Тогда  $M_k$  получается в  $\text{кг} \cdot \text{см}$ .

Иногда мощность задают в киловаттах —  $W \text{ квт}$ . Поскольку  $1 \text{ л. с.} \approx 0,736 \text{ квт}$  и, значит,  $W = 0,736 N$ , из выражения (3.1) находим, что

$$M_k = \frac{71\,620 N}{0,736 n} = 97\,360 \frac{W}{n}. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Согласно СИ единицей мощности является ватт ( $\text{вт}$ ) — работа в один джоуль, совершенная в одну секунду ( $1 \text{ вт} = 1 \text{ Дж/сек}$ ).

Соотношение между единицами мощности:

$$1 \text{ вт} = 0,102 (\text{кг} \cdot \text{м})/\text{сек} = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ л. с.};$$

$$1 \text{ л. с.} = 75 (\text{кг} \cdot \text{м})/\text{сек} = 73,5 \text{ вт}.$$

Пример 4. Построим эпюру крутящих моментов для бруса, нагруженного по схеме, представленной на рис. 48, а.

Легко видеть, что нагрузка, действующая на стержень, эквивалентна распределенным крутящим моментам  $m_x$  (рис. 48, б) интенсивностью  $qb$  (кг·м)/м.

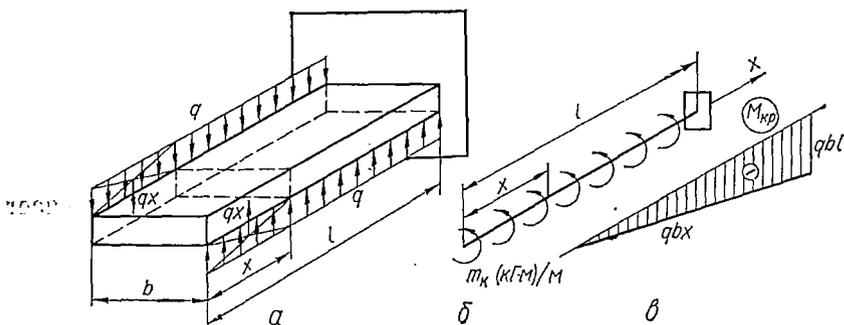


Рис. 48.

Брус имеет всего лишь один участок, в произвольном сечении которого на расстоянии  $x$  от левого конца крутящий момент

$$M_{кр}(x) = -m_x x = -qbx \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$M_{кр}(0) = 0; \quad M_{кр}(l) = -qbl.$$

В результате получаем треугольную эпюру, представленную на рис. 48, в, причем  $M_{крмакс} = -qbl$  при  $x = l$ .

## § 17. БАЛКИ И ИХ ОПОРЫ

Балками будем называть прямолинейные стержни, работающие на изгиб. В сопротивлении материалов термин «балка» значительно шире, чем в обычном употреблении этого слова: с точки зрения расчета на прочность, жесткость и устойчивость балкой является не только строительная балка, но также и вал, болт, ось железнодорожного вагона, зуб шестерни и т. д.

Вначале ограничимся построением эпюр для простейшего случая изгиба балок, при котором все заданные нагрузки лежат в одной плоскости, называемой силовой (на рис. 49, а плоскость  $\Pi$ ), причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки. Такой случай будем называть плоским изгибом<sup>1</sup>.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью (рис. 49, б). При этом все нагрузки, естественно, должны быть приведены к оси балки и силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

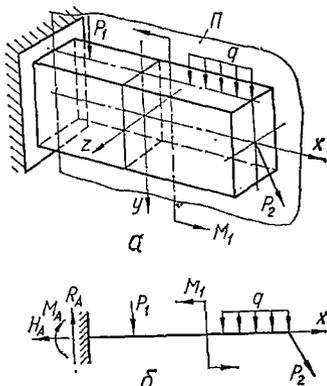


Рис. 49.

<sup>1</sup> Детально плоский изгиб рассматривается в § 60.

Как правило, балки имеют те или иные опорные устройства — опоры. Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

а) шарнирно-подвижная опора (рис. 50, а), в которой может возникнуть только одна составляющая реакции —  $R_A$ , направленная вдоль опорного стерженька;

б) шарнирно-неподвижная опора (рис. 50, б), в которой могут возникнуть две составляющие — вертикальная реакция  $R_A$  и горизонтальная реакция  $H_A$ ;

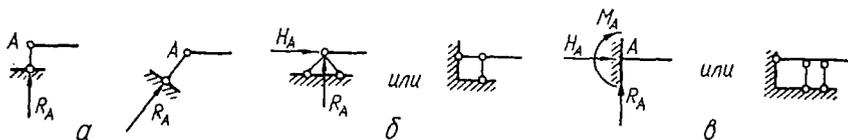


Рис. 50.

в) заземление (иначе жесткое заземление или заделка), где могут быть три составляющие — вертикальная  $R_A$  и горизонтальная  $H_A$  реакции и опорный момент  $M_A$  (рис. 50, в).

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке А — центре тяжести опорного сечения.

Балка, показанная на рис. 51, а, называется простой, или однопролетной, или двухопорной, а расстояние  $l$  между опорами — пролетом.

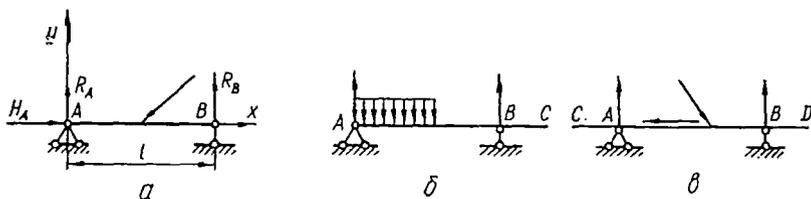


Рис. 51.

Консолью называется балка, заземленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 49, б), или часть балки, свешивающаяся за опоры (часть BC на рис. 51, б; части AC и BD на рис. 51, в). Балки, имеющие свешивающиеся части, называются консольными (рис. 51, б и 51, в).

Как известно, для плоской системы сил можно составить три уравнения статики для определения неизвестных реакций. Поэтому балка будет статически определимой, если число неизвестных опорных реакций не превышает трех; в противном случае балка статически неопределима. Очевидно, что балки, изображенные на рис. 49 и 51, статически определимы.

Балка, изображенная на рис. 52, а, называется неразрезной и является статически неопределимой, поскольку имеет пять неизвестных опорных реакций: три в опоре А и по одной в опорах В и С.

Поставив в сечениях балки шарниры, например, в точках  $D$  и  $E$  (рис. 52, б), получим статически определимую шарнирную балку, ибо каждый такой промежуточный шарнир к трем основным уравнениям статики прибавляет одно дополнительное уравнение: *сумма моментов относительно центра шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю.*

Построение эпюр для статически неопределимых балок требует умения вычислять деформации, а поэтому ограничимся пока исключительно статически определимыми балками.

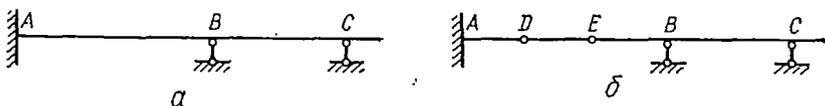


Рис. 52.

## § 18. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ

Способы определения опорных реакций изучают в курсе теоретической механики. Поэтому здесь остановимся только на некоторых практических вопросах. Для этого рассмотрим простую балку (рис. 51, а).

1. Опоры обычно обозначают буквами  $A$  и  $B$ . Три неизвестных реакции находят из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum X = 0,$$

откуда находят  $H_A$ ;

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира равна нулю:

$$\sum M_A = 0,$$

откуда находят  $R_B$ ;

в) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира равна нулю:

$$\sum M_B = 0,$$

откуда находят  $R_A$ .

2. Для контроля можно использовать или условие равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum Y = 0,$$

или условие равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки  $C$ , отличной от  $A$  и  $B$ , т. е.

$$\sum M_C = 0.$$

Условием  $\sum Y = 0$  пользоваться проще, но оно дает надежную проверку только в тех случаях, когда к балке не приложены сосредоточенные моменты.

3. Перед составлением уравнений равновесия нужно выбрать (вообще говоря, произвольно) направления реакций и изобразить их на рисунке. Если в результате вычислений какая-либо реакция получается отрицательной, нужно изменить на рисунке ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

4. В большинстве случаев нагрузка перпендикулярна к оси балки. Тогда  $H_A = 0$  и уравнением  $\sum X = 0$  не пользуются.

5. Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций ее заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

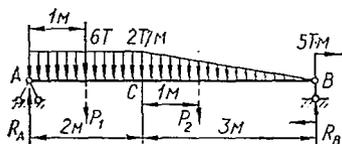


Рис. 53.

*Пример 5.* Вычислить опорные реакции для балки, показанной на рис. 53.

Прежде всего находим равнодействующие  $P_1$  и  $P_2$  нагрузок, распределенных на участках AC и CB:

$$P_1 = 2 \cdot 2 = 4T; \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3T.$$

Сила  $P_1$  приложена в центре тяжести прямоугольника, а  $P_2$  — в центре тяжести треугольника. Находим реакции:

$$\sum M_A = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot R_B \cdot 5 = 0, \quad R_B = 4,8T;$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 5 = 0, \quad R_A = 8,2T.$$

Проверка:

$$\sum M_C = 8,2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 - 4,8 \cdot 3 = 0.$$

## § 19. УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ В СЕЧЕНИЯХ БАЛКИ

При плоском изгибе вся нагрузка расположена в главной плоскости стержня  $xy$  (рис. 49, а), поэтому она не дает проекций на ось  $z$  и моментов относительно осей  $x$  и  $y$ . Следовательно, в любом сечении балки

$$Q_z = M_x = M_{кр} = M_y = 0$$

и отличными от нуля останутся только три величины:  $N$ ,  $Q_y$  и  $M_z$ . В дальнейшем будем обозначать их  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Эти усилия действуют в сечении рам и криволинейных стержней. В балках же, при нагрузке, перпендикулярной к оси, продольная сила также будет равна нулю. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в любом сечении балки могут быть два усилия: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ .

Установим следующие правила для знаков  $Q$  и  $M$  в балках:

1) поперечная сила  $Q$  в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке (рис. 54, а);

2) изгибающий момент  $M$  в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхних волокнах балки и направлен так, как показано на рис. 54, а.

Отрицательные направления  $Q$  и  $M$  показаны на рис. 54, б.

Для практических вычислений, однако, можно рекомендовать следующее:

1. Если внешняя сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, то в выражении для  $Q$

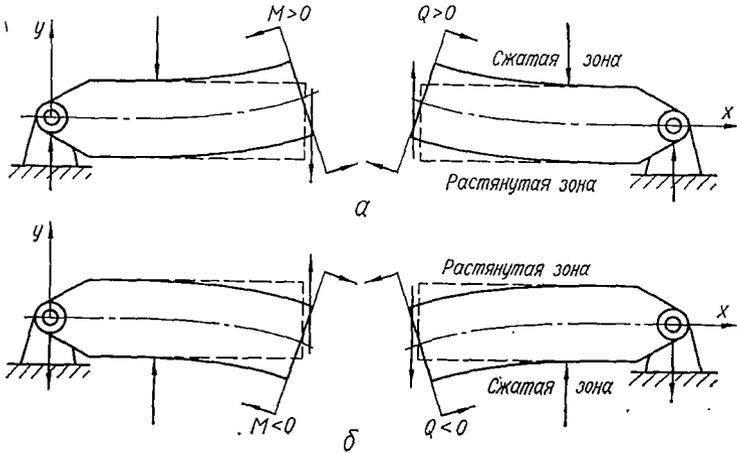


Рис. 54.

в этом сечении она дает положительное слагаемое. Так, реакция  $R_A$  (рис. 55, а) стремится повернуть балку относительно сечения  $C$  по часовой стрелке, а силы  $P$  и  $R_B$  — против нее. Поэтому поперечная сила в сечении  $C$

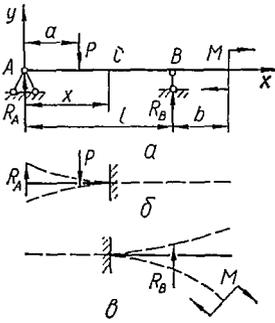


Рис. 55.

или

$$Q_C = R_A - P,$$

$$Q_C = -R_B.$$

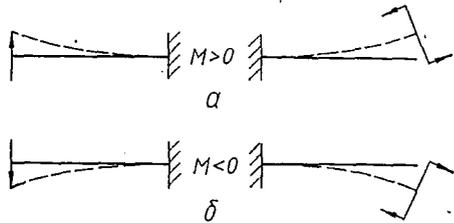


Рис. 56.

2. Если внешняя нагрузка создает относительно рассматриваемого сечения момент, вызывающий сжатие верхних волокон балки, то в выражении для  $M$  в этом сечении она дает положительное слагаемое. Наиболее просто выяснить знак  $M$  для консоли. Так, на двух верхних консолях, показанных на рис. 56, а, нагрузка отгибает балку вверх; сжатыми оказываются верхние волокна, поэтому изгибающий момент положителен. На рис. 56, б сжаты нижние волокна и  $M < 0$ .

В более сложных случаях (например, рис. 55) можно мысленно представлять себе, что балка освобождена от всех опор и защемлена в рассматриваемом сечении. Тогда она превращается в две консоли. Нужно рассматривать левую консоль, если изгибающий момент вычисляется как сумма моментов сил, расположенных слева от сечения (рис. 55, б). Тогда

$$M_C = M(x) = R_A x - P(x - a).$$

Если же  $M$  вычисляется как сумма моментов сил, расположенных справа от сечения (рис. 55, в), то

$$M_C = M(x) = R_B(l - x) - M.$$

## § 20. ПОСТРОЕНИЕ ЭПИОР $Q$ И $M$ В БАЛКАХ

Рассмотрим порядок построения эпюр  $Q$  и  $M$  для наиболее характерных случаев нагружения балок.

Сосредоточенная сила на свободном конце консоли (рис. 57). Балка имеет лишь один участок. Начало координат выбираем в крайней левой точке балки  $A$ , ось  $x$  направляем вдоль оси балки направо.

Вычисляем  $Q$  и  $M$  в произвольном сечении участка с абсциссой  $x$ . Справа от рассматриваемого сечения расположена только одна сила  $P$ , поэтому

$$Q(x) = P; \quad M(x) = -P \cdot KB = -P(l - x).$$

Как видно из этих уравнений, поперечная сила одинакова во всех сечениях балки, поэтому эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника. Функция  $M(x)$  линейна. Для построения ее графика достаточно получить две точки — в начале и в конце участка:

$$\text{при } x = 0 \text{ (сечение } A) \quad M_A = -Pl;$$

$$\text{при } x = l \text{ (сечение } B) \quad M_B = 0.$$

По этим данным строим эпюру  $M$ . Заметим, что положительные ординаты эпюр  $Q$  и  $M$  откладываем вверх от базы.

На рис. 57 штриховой линией  $AB_1$  показана балка в деформированном состоянии. Как видно из рисунка, сжаты нижние волокна балки.

Если совместить базисную линию эпюры изгибающих моментов с осью балки, то эпюра  $M$  окажется как бы построенной на сжатых волокнах.

Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  кг/м на консоли (рис. 58). Поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении  $K$  будем вычислять как результат действия распределенной нагрузки, расположенной слева от сечения:

$$Q(x) = -q \cdot AK = -qx;$$

$$M(x) = -q \cdot AK \cdot LK = -\frac{q \cdot AK^2}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Следовательно, поперечная сила  $Q(x)$  изменяется по закону прямой линии, а изгибающий момент  $M(x)$  — по параболическому закону. Для построения эпюры  $Q$  вычисляем ординаты в двух точках:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad Q_A &= 0; \\ \text{при } x = l \quad Q_B &= -ql \end{aligned}$$

и проводим прямую. Учитывая, что эпюра  $M$  криволинейна, для ее построения вычисляем ординаты в трех сечениях:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad M_A &= 0; \\ \text{при } x = \frac{l}{2} \quad M_C &= -\frac{ql^2}{8}; \\ \text{при } x = l \quad M_B &= -\frac{ql^2}{2} \end{aligned}$$

и проводим через полученные три точки кривую.

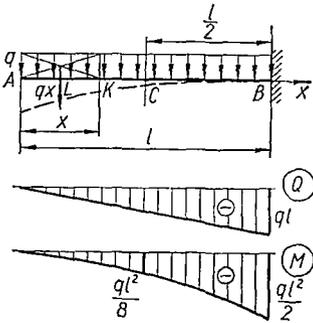


Рис. 58.

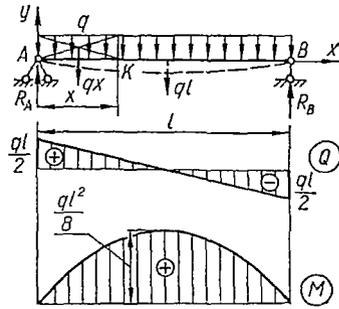


Рис. 59.

Нагрузка  $q$   $\text{кГ/м}$ , равномерно распределенная по всей длине пролета двухопорной балки (рис. 59). В данном случае необходимо сначала определить опорные реакции. равнодействующая всей распределенной нагрузки равна  $ql$ , и линия действия ее проходит через середину балки. Поэтому

$$\sum M_B = R_A l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad \sum M_A = R_B l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Вычисляя поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении  $K$  как результат действия сил, расположенных слева от сечения  $K$ , получим:

$$Q(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx; \quad M(x) = R_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

Очевидно, что эпюра  $Q$  будет прямолинейной, а эпюра  $M$  — параболической.

Для построения эпюр вычисляем:

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2};$$

$$M(0) = 0; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8};$$

$$M(l) = \frac{ql}{2}l - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

Чтобы определить экстремальное значение изгибающего момента, приравняем нулю производную от изгибающего момента  $M(x)$  по абсциссе  $x$  сечения:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0,$$

отсюда

$$x = \frac{l}{2}.$$

Так как вторая производная  $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q$ , т. е. отрицательна, то в сечении при  $x = l/2$  имеем максимальное значение момента:

$$M_{\max} = M(l/2) = \frac{ql^2}{8}.$$

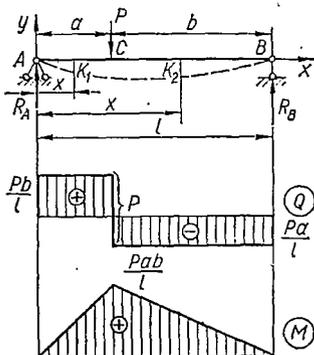


Рис. 60.

Эпюры  $Q$  и  $M$  построены на рис. 59.

Сосредоточенная сила  $P$ , приложенная к двухопорной балке (рис. 60). Прежде всего найдем опорные реакции:

$$\sum M_B = R_A l - Pb = 0; \quad R_A = \frac{Pb}{l},$$

$$\sum M_A = Pa - R_B l = 0; \quad R_B = \frac{Pa}{l}.$$

В данном случае имеем на балке два участка.

Вычисляем  $Q$  и  $M$  в произвольном сечении  $K_1$ , расположенном на участке  $AC$  ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$Q(x) = R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Следовательно, во всех сечениях участка поперечные силы одинаковы и эпюра  $Q$  имеет вид прямоугольника.

Изгибающий момент  $M(x)$  изменяется по линейному закону:

$$M(x) = R_A x = \frac{Pb}{l} x.$$

Для построения эпюры вычисляем ординаты на границах участка:

$$\text{при } x = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x = a \quad M_C = \frac{Pab}{l}.$$

В произвольном сечении  $K_2$  на участке  $CB$  ( $a \leq x \leq l$ ), рассматривая действие сил, расположенных справа от него, получим:

$$Q(x) = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2B = \frac{Pa}{l}(l-x).$$

К тому же результату мы пришли бы, рассматривая действие сил, расположенных слева:

$$Q(x) = R_A - P; \quad M(x) = R_A \cdot AK_2 - P \cdot CK_2.$$

Как и на участке  $AC$ , эпюра  $Q$  на участке  $CB$  также имеет вид прямоугольника. Для построения эпюры  $M$  находим значения ординат в точках  $C$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \text{при } x = a \quad M_C &= \frac{Pa}{l}(l-a) = \frac{Pab}{l}; \\ \text{при } x = l \quad M_B &= 0. \end{aligned}$$

В результате получаем эпюры, представленные на рис. 60. Они показывают, что при  $x = a$  функция  $Q(x)$  терпит разрыв и на эпюре  $Q$  получается скачок, равный по абсолютной величине внешней силе  $P$  в этом сечении:

$$\frac{Pb}{l} + \frac{Pa}{l} = \frac{P(a+b)}{l} = \frac{Pl}{l} = P;$$

на эпюре  $M$  в этом сечении имеет место излом (угловая точка).

Сосредоточенный момент в пролете двухопорной балки (рис. 61). Находим опорные реакции, направив их вверх:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= R_A l + M_1 = 0; \\ \sum M_A &= R_B l - M_1 = 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad R_B = \frac{M_1}{l}.$$

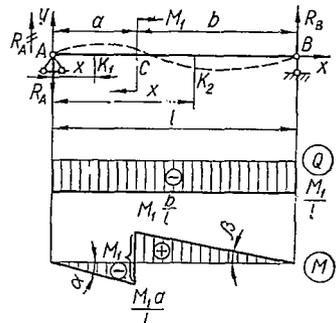


Рис. 61.

Меняем направление  $R_A$  на обратное. Отметив на участках  $AC$  и  $CB$  произвольные сечения  $K_1$  и  $K_2$ , записываем уравнения для функций  $Q(x)$  и  $M(x)$ :

для участка  $AC$  ( $0 \leq x \leq a$ )

$$Q(x) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -R_A x = -\frac{M_1}{l} x.$$

для участка  $CB$  ( $a \leq x \leq l$ )

$$Q(x) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2B = \frac{M_1}{l}(l-x).$$

На основании этих уравнений строим эпюры  $Q$  и  $M$ . Эпюра  $M$  расположена частично под осью, частично над осью. Поскольку она

построена на сжатых волокнах, видим, что на участке  $AC$  сжаты нижние волокна балки, а на участке  $CB$  — верхние. Этому соответствует изображенная пунктиром деформированная ось балки. В том сечении, где изгибающий момент меняет знак, на ней будет точка перегиба.

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{M_1}{l},$$

и, значит, прямые на эпюре  $M$  на участках  $AC$  и  $CB$  параллельны.

Обратим внимание на то, что там, где применен внешний момент (сечение  $C$ ), на эпюре  $Q$  изменений нет, а функция  $M(x)$  претерпевает разрыв и на эпюре  $M$  получается скачок, равный по величине внешнему моменту.

В частном случае, когда момент применен в опорном сечении, на основании приведенных выше формул при  $a = 0$  получим эпюры, приведенные на рис. 62.

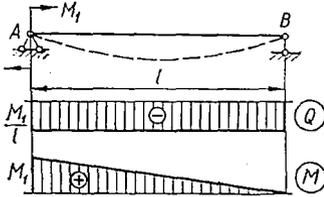


Рис. 62.

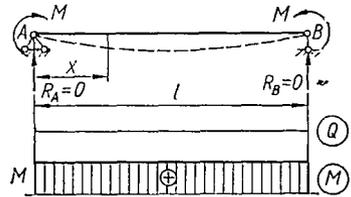


Рис. 63.

Сосредоточенные моменты на опорах однопролетной балки (рис. 63). Находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= R_A l + M - M = 0; \quad R_A = 0, \\ \sum M_A &= -R_B l + M - M = 0; \quad R_B = 0. \end{aligned}$$

Тогда для произвольного сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от левой опоры,

$$Q(x) = R_A = 0; \quad M(x) = M = \text{const.}$$

Итак, в любом сечении  $Q = 0$ , а изгибающий момент постоянен вдоль балки. Такой случай изгиба носит название *чистого изгиба*.

## § 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЭПЮР $Q$ И $M$

Установим некоторые характерные особенности эпюр  $Q$  и  $M$ , знание которых облегчит построение эпюр и даст возможность в известной мере контролировать их правильность.

Рассмотрим какую-нибудь балку с произвольной нагрузкой (рис. 64, а). Распределенную нагрузку условимся считать положительной, если она направлена вверх (такая нагрузка дает положительную составляющую для изгибающего момента в любом сечении).

Выделим на участке, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент балки  $O_1O_2$ . Он находится в равновесии под действием внешней нагрузки, поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 64, б). Поскольку в общем случае  $Q$  и  $M$  меняются вдоль оси балки, то в сечении  $O_1$  будем иметь  $Q(x)$  и  $M(x)$ , а в сечении  $O_2$  имеем  $Q(x) + dQ$  и  $M(x) + dM$ . Для вывода, как всегда, изображаем их положительно направленными. Из условия равновесия выделенного элемента получим:

$$\sum Y = Q + q dx - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_{O_2} = M + Q dx + q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

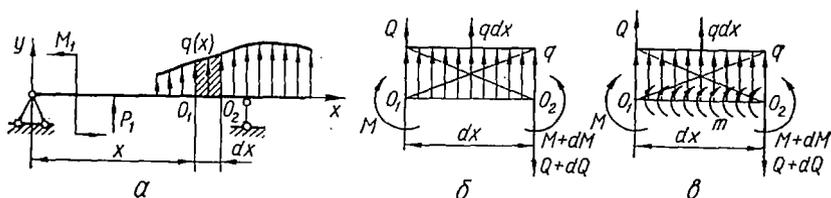


Рис. 64.

Первое уравнение дает условие

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = q.} \quad (3.3)$$

Из второго уравнения, пренебрегая членом  $q dx \frac{dx}{2}$ , найдем:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q.} \quad (3.4)$$

Из формул (3.3) и (3.4) следует, что

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = q.} \quad (3.5)$$

Когда на рассматриваемом участке действует, кроме того, распределенный момент интенсивностью  $m$  ( $\kappa\Gamma \cdot \text{см}$ )/см (рис. 64, в), формула (3.4) принимает следующий вид:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q + m;} \quad (3.6)$$

формулы (3.3) и (3.5) при этом остаются без изменения.

Соотношения (3.3) — (3.6) называются *дифференциальными зависимостями при изгибе*. Эти зависимости и анализ примеров предыдущего параграфа позволяют установить некоторые особенности эпюр изгибающих моментов и поперечных сил:

1. На участках, где нет распределенной нагрузки, эпюры  $Q$  ограничены прямыми, параллельными базе, а эпюры  $M$  в общем случае — наклонными прямыми (рис. 65).

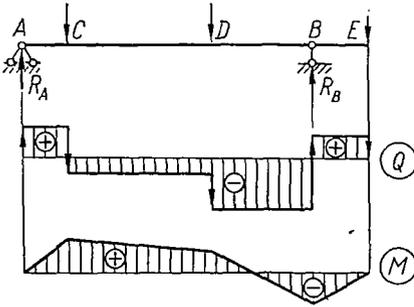


Рис. 65.

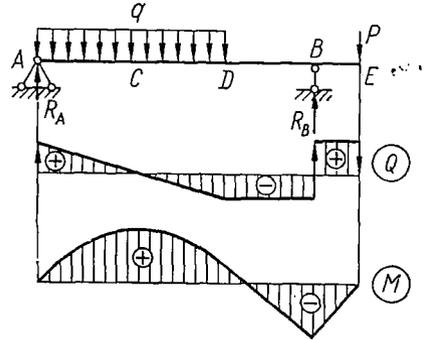


Рис. 66.

2. На участках, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ , эпюра  $Q$  ограничена наклонными прямыми, а эпюра  $M$  — квадратичными параболой (рис. 66). Поскольку эпюру  $M$  строим на сжатых волокнах, то выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки  $q$  (рис. 67, а и б).

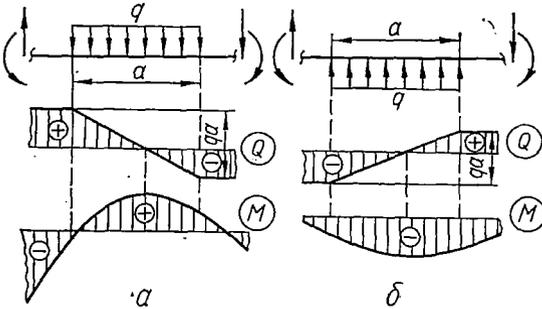


Рис. 67.

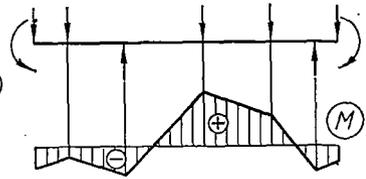


Рис. 68.

3. В сечениях, где  $Q = 0$ , касательная к эпюру  $M$  параллельна оси эпюры (рис. 66 и 67).

4. На участках, где  $Q > 0$ , момент  $M$  возрастает, т. е. слева направо положительные ординаты эпюры  $M$  увеличиваются, а отрицательные — уменьшаются (рис. 65, 66, участки  $AC$  и  $BE$ ); на участках, где  $Q < 0$ , момент  $M$  убывает (рис. 65, 66, участки  $CD$  и  $DB$ ).

5. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эпюре  $Q$  будут скачки на величину и в направлении приложенных сил (на рис. 65 и 66 эти скачки отмечены толстыми линиями со стрелками);

б) на эпюре  $M$  будут переломы (рис. 68), причем острие перелома направлено против действия силы (см. также сечения  $C$ ,  $D$  и  $B$  на рис. 65 и сечение  $B$  на рис. 66).

6. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эпюре  $M$  будут скачки на величину этих моментов (на эпюре  $Q$  изменений не будет). Направление скачка зависит от направления внешнего момента (рис. 69). Ветви эпюры до скачка и за ним параллельны. Так, на рис. 69 линия  $AB \parallel CD \parallel EF$  (см. также рис. 61 и 70, а). Это не относится к случаю,

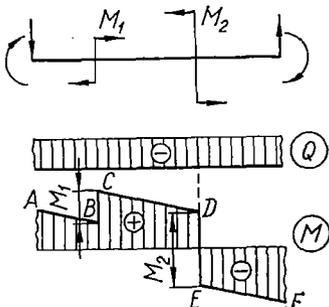
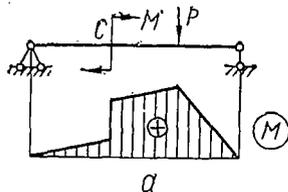
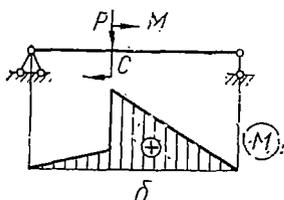


Рис. 69.



а



б

Рис. 70.

когда в одной точке приложены и сила и момент (рис. 70, б), — сила вызывает перелом и нарушает параллельность.

7. Если на конце консоли или в концевой опоре к балке приложен сосредоточенный момент, то в этом сечении изгибающий момент равен внешнему моменту (рис. 71, сечения  $B$  и  $C$ ). Если же в концевой шарнирной опоре или на конце консоли балка не нагружена внешним моментом, то в них  $M = 0$ , что имеет место в большинстве случаев (рис. 65 и 66, сечения  $A$  и  $E$ ).

8. Эпюра  $Q$  представляет собой диаграмму производной от эпюры  $M$ . Значит, ординаты эпюры  $Q$  пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре  $M$ .

Для обоснования перечисленных свойств эпюр рассмотрим следующее. Если нет распределенной нагрузки, то

$$\frac{dQ}{dx} = q = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$Q(x) = C_1 = \text{const}. \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\frac{dM}{dx} = Q = C_1,$$

откуда

$$M(x) = C_1x + C_2. \quad (3.8)$$

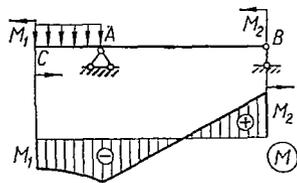


Рис. 71.

Уравнения (3.7) и (3.8) доказывают свойство 1, так как для функции (3.7) график будет представлять собой горизонтальную прямую, а для функции (3.8) — в общем случае наклонную прямую (если  $C_1 \neq 0$ ).

Аналогично доказываются и остальные свойства.

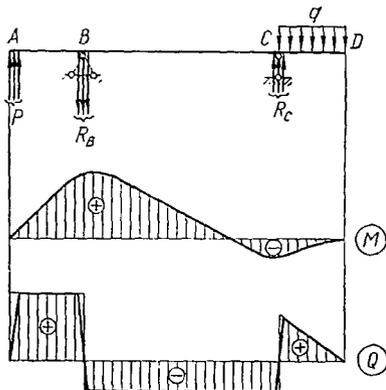


Рис. 72.

Заметим, однако, что появление скачков на эпюре  $Q$  связано с введением условного понятия о сосредоточенной силе. Как уже говорилось ранее, сосредоточенной силой мы считаем нагрузку, распределенную на небольшой длине. Если загрузить балку такой действительной нагрузкой, то никаких скачков на эпюре  $Q$  и переломов на эпюре  $M$  не будет (рис. 72). Это замечание относится и к действию сосредоточенного внешнего момента.

Рассмотрим более сложные случаи построения эпюр  $Q$  и  $M$ .

**Пример 6.** Построим эпюры  $Q$  и  $M$  для простой балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону (рис. 73).

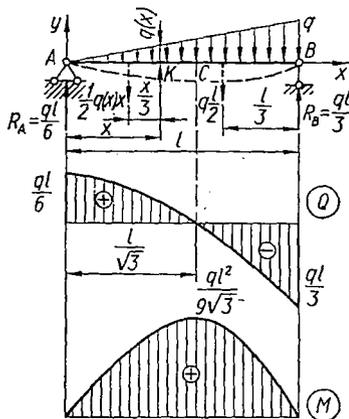


Рис. 73.

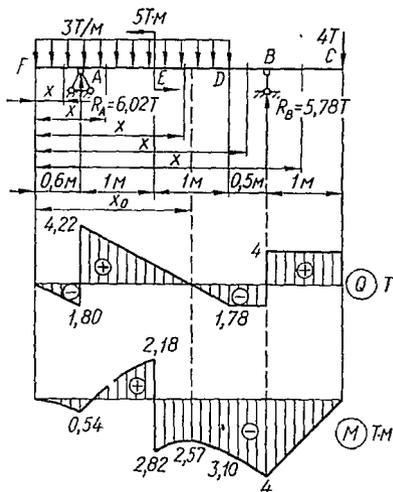


Рис. 74.

Определяем опорные реакции. Равнодействующая всей распределенной нагрузки равна  $\frac{ql}{2}$  и проходит через центр тяжести грузовой эпюры, который удален на  $\frac{l}{3}$  от правой опоры. Поэтому

$$\sum M_B = R_A l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0;$$

$$\sum M_A = R_B l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{3} l = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{ql}{6}; \quad R_B = \frac{ql}{3}.$$

Поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении  $K$  вычисляем как результат действия сил, расположенных слева от сечения  $K$ , — реакции  $R_A$  и равнодействующей распределенной нагрузки  $\frac{1}{2} q(x)x$ . Из подобия треугольников

$$q(x) = q \frac{x}{l}.$$

Поэтому

$$Q(x) = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}; \quad M(x) = \frac{ql}{6}x - \frac{qx^3}{6l}.$$

Из этих уравнений видно, что эюра  $Q$  очерчена квадратичной параболой, а эюра  $M$  — кубической. Для построения их вычисляем ординаты в характерных точках:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad Q_A &= \frac{ql}{6}; \quad \text{при } x=l \quad Q_B = -\frac{ql}{3}; \\ Q=0 \quad \text{при } \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} &= 0, \quad \text{т. е. при } x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}; \\ \text{при } x=0 \quad \frac{dQ}{dx} &= -\frac{qx}{l} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, эюра  $Q$  имеет такой вид, как показано на рис. 73, причем в сечении  $A$  ( $x=0$ ) касательная к эюре  $Q$  параллельна оси.

Далее,

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad M_A &= 0; \\ \text{при } x=l \quad M_B &= 0. \end{aligned}$$

При  $x=x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$  производная

$$\frac{dM}{dx} = \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = Q(x_0)$$

обращается в нуль, а

$$\left( \frac{d^2M}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{\sqrt{3}}} = - \left( \frac{qx}{l} \right)_{x=\frac{l}{\sqrt{3}}} = - \frac{q}{\sqrt{3}} < 0.$$

Значит, в сечении  $x=x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$  имеем максимум  $M$ , причем

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6l} \left( \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}.$$

*Пример 7.* Построим эюры  $Q$  и  $M$  для балки, показанной на рис. 74. Определим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 3 \cdot 2,6 \cdot 0,7 - 5 - R_B \cdot 2,5 + 4 \cdot 3,5 = 0; \quad R_B = 5,78T; \\ \sum M_B &= -3 \cdot 2,6 \cdot 1,8 + R_A \cdot 2,5 - 5 + 4 \cdot 1 = 0; \quad R_A = 6,02T. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum Y = 6,02 - 3 \cdot 2,6 + 5,78 - 4 = 11,80 - 11,80 = 0.$$

Балка имеет пять участков. В произвольных сечениях каждого из них записываем выражения для  $Q$  и  $M$ , проверяя при этом, выполняется ли равенство  $Q = \frac{dM}{dx}$ , и вычисляем  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях.

Для участка  $FA$  ( $0 \leq x \leq 0,6$  м)

$$\begin{aligned} Q(x) &= -3x; & M(x) &= -\frac{3x^2}{2}; \\ Q_F &= Q(0) = 0; & M_F &= M(0) = 0; \\ Q_{A_{\text{лев}}} &= Q(0,6) = -3 \cdot 0,6 = -1,80T; \\ M_A &= M(0,6) = -\frac{3 \cdot 0,6^2}{2} = -0,54T \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для участка  $AE$  ( $0,6 \leq x \leq 1,6$  м)

$$\begin{aligned} Q(x) &= -3x + 6,02; & M(x) &= -\frac{3x^2}{2} + 6,02(x - 0,6); \\ Q_{A_{\text{пр}}} &= Q(0,6) = -3 \cdot 0,6 + 6,02 = 4,22T; \\ M_A &= M(0,6) = -\frac{3 \cdot 0,6^2}{2} + 0 = -0,54T \cdot \text{м}; \\ Q_E &= Q(1,6) = -3 \cdot 1,6 + 6,02 = 1,22T; \\ M_{E_{\text{лев}}} &= M(1,6) = -\frac{3 \cdot 1,6^2}{2} + 6,02(1,6 - 0,6) = 2,18T \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для участка  $ED$  ( $1,6 \text{ м} \leq x \leq 2,6$  м)

$$\begin{aligned} Q(x) &= -3x + 6,02; & M(x) &= -\frac{3x^2}{2} + 6,02(x - 0,6) - 5; \\ Q_E &= Q(1,6) = -3 \cdot 1,6 + 6,02 = 1,22T; \\ M_{E_{\text{пр}}} &= M(1,6) = -\frac{3 \cdot 1,6^2}{2} + 6,02(1,6 - 0,6) - 5 = -2,82T \cdot \text{м}; \\ Q_D &= Q(2,6) = -3 \cdot 2,6 + 6,02 = -1,78T; \\ M_D &= M(2,6) = -\frac{3 \cdot 2,6^2}{2} + 6,02(2,6 - 0,6) - 5 = -3,10T \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для участка  $DB$  ( $2,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1$  м)

$$\begin{aligned} Q(x) &= -5,78 + 4 = -1,78T; \\ M(x) &= 5,78(3,1 - x) - 4(4,1 - x) = -1,78x + 1,52; \\ Q_D &= Q(2,6) = -1,78T; \\ M_D &= M(2,6) = -1,78 \cdot 2,6 + 1,52 \approx -3,10T \cdot \text{м}; \\ Q_{B_{\text{лев}}} &= Q(3,1) = -1,78T; \\ M_B &= M(3,1) = -1,78 \cdot 3,1 + 1,52 \approx -4T \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для участка  $BC$  ( $3,1 \leq x \leq 4,1$  м) |

$$Q(x) = 4T, \quad M(x) = -4(4,1 - x);$$

$$Q_{Bпр} = Q(3,1) = 4T;$$

$$M_B = M(3,1) = -4(4,1 - 3,1) = -4T \cdot \text{м};$$

$$Q_C = Q(4,1) = 4T;$$

$$M_C = M(4,1) = -4(4,1 - 4,1) = 0.$$

Построив по этим данным эпюру  $Q$ , обнаруживаем, что в некотором сечении  $x_0$  на участке  $ED$  усилие  $Q$  обращается в нуль, а значит, здесь касательная к эпюре  $M$  будет горизонтальной. Для построения эпюры  $M$  необходимо еще вычислить ординату  $M(x_0)$ . Воспользовавшись выражением для  $Q(x)$  на участке  $ED$ , находим  $x_0$  из условия

$$Q(x_0) = -3x_0 + 6,02 = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{6,02}{3} = 2,01 \text{ м}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M(x_0) &= -\frac{3 \cdot 2,01^2}{2} + \\ &+ 6,02(2,01 - 0,6) - 5 = - \\ &= -2,57T \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

По полученным данным строим эпюру  $M$ .

Рассматривая эпюры  $Q$ ,  $M$  и нагрузку на балку с точки зрения общих свойств эпюр, обнаруживаем, что построенные эпюры не содержат принципиальных ошибок: например, всюду, где  $Q > 0$ , момент  $M$  возрастает, а где  $Q < 0$  — он убывает; в сечении  $E$  на эпюре  $M$  получился скачок на величину  $5T \cdot \text{м}$ ; в сечениях  $F$  и  $C$   $M = 0$  и т. д.

В ряде случаев можно строить эпюры, не составляя выражений  $Q$  и  $M$  для произвольных сечений участков. Достаточно лишь вычислить величины  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях. Для этих случаев можно рекомендовать следующий порядок построения эпюр:

1. Найти опорные реакции (для консоли их можно не находить).
2. По скачкам и наклонам, идя вдоль балки обязательно слева направо, построить эпюру  $Q$  (никаких записей для этого делать не нужно).
3. Найти характерные сечения балки. Характерными сечениями считаются те, в которых приложены сосредоточенные силы и моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка, а также те, в которых  $Q$  обращается в нуль.
4. Вычислить в характерных сечениях величины  $M$  и по найденным ординатам построить эпюру  $M$ . При этом следует руководствоваться общими свойствами эпюр, а для консольных частей балок целесообразно пользоваться известными для них эпюрами (рис. 57 и 58).

*Пример 8.* Построим эпюры  $Q$  и  $M$  для шарнирной балки (рис. 75).

Эта балка имеет четыре неизвестных составляющих опорных реакций —  $M_A$ ,  $H_A$ ,  $R_A$  и  $R_E$ . Вследствие отсутствия горизонтальных составляющих внеш-

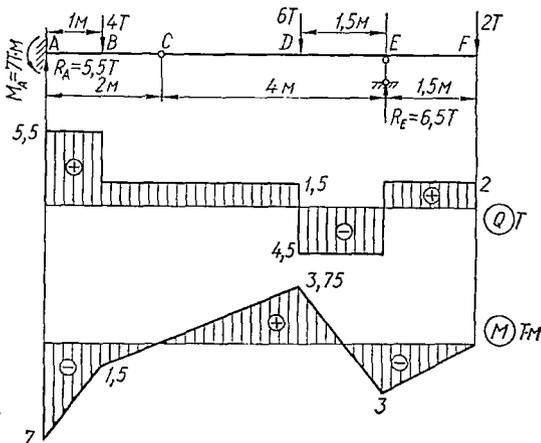


Рис. 75.

ней нагрузки  $H_A = 0$ . Наличие промежуточного шарнира в точке  $C$  дает одно дополнительное уравнение статики и превращает балку в статически определенную шарнирную.

Найдем опорные реакции:

$$\sum_{\text{пр}} M_C = 2 \cdot 5,5 - R_E \cdot 4 + 6 \cdot 2,5 = 0; \quad R_E = 6,5T;$$

$$\sum Y = R_A - 4 - 6 + 6,5 - 2 = 0; \quad R_A = 5,5T;$$

$$\sum_{\text{лев}} M_C = -M_A + 5,5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0; \quad M_A = 7T \cdot \text{м}.$$

Проверка:

$$\sum M_F = -7 + 5,5 \cdot 7,5 - 4 \cdot 6,5 - 6 \cdot 3 + 6,5 \cdot 1,5 = 0.$$

Теперь обычным способом по скачкам строим эпюру  $Q$ , а затем, определив

$$M_A = -7T \cdot \text{м}; \quad M_B = -7 + 5,5 \cdot 1 = -1,5T \cdot \text{м};$$

$$M_D = -2 \cdot 3 + 6,5 \cdot 1,5 = 3,75T \cdot \text{м}; \quad M_E = -2 \cdot 1,5 = -3T \cdot \text{м}; \quad M_F = 0,$$

строим эпюру  $M$ .

Следует обратить внимание на то, что на эпюре  $M$  обязательно должна быть нулевая ордината для того сечения, где расположен промежуточный шарнир (точка  $C$ ).

## § 22. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ РАМ

*Рамами* называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных жесткими узлами. Вертикально расположенные стержни рамы принято называть *стойками*, горизонтальные — *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, т. е. в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый прямолинейный участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому, чтобы построить какую-либо эпюру для рамы, нужно построить ее для каждой отдельной балки, входящей в состав рамы. В отличие от обыкновенных балок в сечениях стержней рамы, кроме изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ , обычно действуют еще и продольные силы  $N$ . Следовательно, для рам нужно строить эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Для  $N$  и  $Q$  сохраняются ранее принятые правила знаков:

$N > 0$ , если продольные силы вызывают растяжение;

$Q > 0$ , если ее векторы стремятся вращать части рассеченной рамы (относительно точек, близких к сечению) по часовой стрелке.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а при составлении выражений для  $M(x)$  принимают по собственному усмотрению какой-либо момент положительным.

Выражения для  $N(x)$ ,  $Q(x)$  и  $M(x)$  записывают очень редко — главным образом для тех участков, где действует распределенная нагрузка. Чаще всего просто вычисляют значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях (на границах участков и в экстремальных точках), а затем проводят линии эпюр, учитывая отмеченные в § 21 свойства их.

Ординаты эпюр, как и всегда, откладываются перпендикулярно к оси рамы, причем положительные ординаты  $Q$  и  $N$  с внешней стороны рамы, а отрицательные — с внутренней (если, конечно, рама такой конфигурации, что можно различить ее наружную и внутреннюю стороны). Эпюры  $M$  условимся и для рам строить на сжатых волокнах.

Если рама имеет более одной опоры, то прежде чем приступить к построению эпюр, нужно обычными методами статики найти опорные реакции.

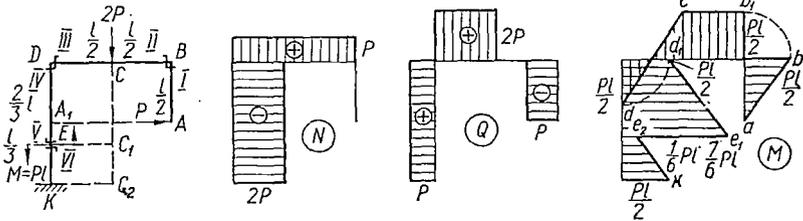


Рис. 76.

Построим эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  для рамы, изображенной на рис. 76.

Заметим, что ввиду отсутствия распределенной нагрузки все эпюры будут прямолинейными.

Чтобы построить эпюру  $N$ , нужно спроектировать силы, приложенные к части рамы, лежащей по одну сторону от сечения, на ось стержня. Таким образом, для любого сечения получим:  $N = 0$  на участке  $AB$ ;  $N = P$  на участке  $BD$  (растяжение);  $N = -2P$  на участке  $DK$  (сжатие). По этим данным строим эпюру  $N$ . Она имеет вид двух прямоугольников, расположенных на ригеле и левой стойке.

Перейдем к построению эпюры  $Q$ .

Для любого сечения на участке  $AB$  сумма проекций нижележащих сил на сечение одинакова, равна  $P$  и дает отрицательную величину  $Q$ , т. е.  $Q = -P$ . Точно так же в любом сечении стержня  $DK$  сила  $Q = P$ .

Чтобы пояснить знаки  $Q$  в этом случае, на рис. 77 показаны направления векторов  $Q$ , например, в сечениях  $I$  и  $IV$ . На рис. 77, а векторы стремятся повернуть части рассеченной рамы против часовой стрелки, значит здесь  $Q < 0$ , а на рис. 77, б — по часовой стрелке, поэтому здесь  $Q > 0$ .

В сечении  $II$ , как и в любом сечении участка  $BC$ , сумма проекций на сечение (на вертикаль) сил, приложенных к части рамы, лежащей справа от сечения (т. е. одна сила  $P$ ), равна нулю. Следовательно, на участке  $BC$  усилие  $Q = 0$ .

Для сечения  $III$  и вообще для любого сечения участка  $CD$  проектироваться на сечение будет только сила  $2P$ , поэтому в этих сечениях  $Q = 2P$ .

Итак, на участке  $AB$   $Q = -P$ ; на участке  $BC$   $Q = 0$ ; на участке  $CD$   $Q = 2P$ ; на участке  $DK$   $Q = P$ . Эпюра  $Q$  на этих участках будет представлена тремя прямоугольниками.

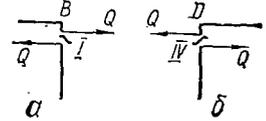


Рис. 77.

Для построения эпюры  $M$  будем вычислять величины изгибающих моментов в характерных сечениях  $A, B, C, D, E$  и  $K$ . Очевидно,  $M_A = 0$ . В сечении  $B$  стержня  $AB$  (т. е. в сечении  $I$ , бесконечно близком к  $B$ ) имеем:

$$M_B = P \cdot AB = \frac{Pl}{2},$$

причем от действия этого момента сжаты внешние (правые) волокна, так как изгибающий момент, приложенный к верхней стороне сечения  $I$ , направлен против часовой стрелки. Поэтому на эпюре  $M$  из точки  $B$  откладываем с внешней стороны ординату, равную  $\frac{Pl}{2}$ , и проводим прямую  $ab$ .

В сечении  $B$  стержня  $BD$  (т. е. в сечении  $II$ , бесконечно близком к  $B$ ) имеем ту же величину:

$$M_B = P \cdot AB = P \frac{l}{2}$$

и сжаты вновь наружные (верхние) волокна. Такой же изгибающий момент будет и в сечении  $C$ :

$$M_C = \frac{Pl}{2}.$$

Откладываем в сечениях  $B$  и  $C$  с внешней стороны ординаты  $\frac{Pl}{2}$  и проводим прямую  $b_1c$ . Продолжать эту прямую дальше влево нельзя, так как в этом сечении на эпюре  $M$  должен быть перелом.

В сечении  $D$  стержня  $DB$  (сечении  $III$ ) изгибающий момент должен быть вычислен от действия сил  $P$  и  $2P$ . Приняв, например, что для стержня  $DB$  положительным будет такой изгибающий момент, который вызывает сжатие верхних волокон, находим, что

$$M_D = P \cdot A_1D - 2P \cdot CD = P \cdot \frac{l}{2} - 2P \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Pl}{2}.$$

Знак минус говорит о том, что в сечении  $III$  сжаты нижние волокна. Откладываем вниз ординату, равную  $\frac{Pl}{2}$ , и проводим на эпюре  $M$  прямую  $cd$ .

Переходим к построению эпюры на стойке  $DK$ , считая, например, что изгибающий момент положителен, если он вызывает сжатие внутренних (правых) волокон. Тогда в сечении  $IV$

$$M_D = -P \cdot A_1D + 2P \cdot CD = -P \frac{l}{2} + 2P \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{2}.$$

В сечении  $E$  на эпюре  $M$  должен быть скачок, поэтому значение  $M$  вычисляем отдельно:

в сечении  $V$

$$M'_E = P \cdot A_1E + 2P \cdot EC_1 = P \frac{l}{6} + 2P \cdot \frac{l}{2} = \frac{7}{6} Pl,$$

а в сечении  $VI$

$$M''_E = P \cdot A_1E + 2P \cdot EC_1 - M = P \frac{l}{6} + 2P \cdot \frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{6} Pl.$$

Наконец, в сечении  $K$

$$M_K = P \cdot A_1K + 2P \cdot KC_2 - M = P \cdot \frac{l}{2} + 2P \cdot \frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{2} Pl.$$

Все моменты получились положительными. Следовательно, во всех этих сечениях, согласно принятому для стойки  $DK$  правилу знаков, сжатыми будут правые волокна. Поэтому откладываем соответствующие ординаты и, проведя прямые  $d_1e_1$  и  $e_2k$ , заканчиваем построение эпюры  $M$ .

Пример 9. Построим эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  для рамы, изображенной на рис. 78.

Поскольку эта рама не консольная, то прежде всего определим опорные реакции. В каждом неподвижном опорном шарнире  $A$  и  $B$  будет по две составляющих реакции: вертикальные  $R_A$  и  $R_B$  и горизонтальные  $H_A$  и  $H_B$ . Действи-

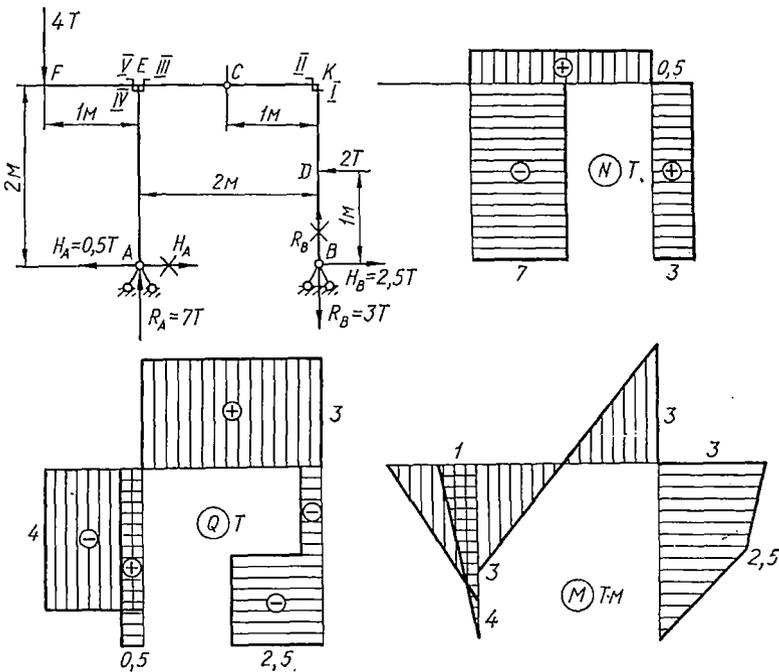


Рис. 78.

тельные направления этих реакций еще не известны, поэтому направим их пока произвольно, например, вертикальные реакции вверх, а горизонтальные — направо (почему реакции  $H_A$  и  $R_B$  зачеркнуты, станет ясно ниже).

Для определения четырех неизвестных  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$  и  $H_B$ , кроме обычных уравнений статики, имеем здесь еще условие равенства нулю суммы моментов относительно точки  $C$  всех сил, расположенных по одну сторону от нее (иначе говоря, равенство нулю изгибающего момента в сечении  $C$ , где есть шарнир).

Можно выбрать различные варианты четырех уравнений статики для нахождения реакций. Наиболее удобно рассмотреть суммы моментов относительно

шарниров  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При составлении уравнений принимаем во внимание зачеркнутый вариант реакций  $H_A$  и  $R_B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 0; & R_A &= 7T; \\ \sum M_A &= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + R_B \cdot 2 = 0; & R_B &= -3T; \\ \sum_{\text{лев}} M_C &= -7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + H_A \cdot 2 = 0; & H_A &= -0,5T; \\ \sum_{\text{прав}} M_C &= -2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + H_B \cdot 2 = 0; & H_B &= 2,5T. \end{aligned}$$

Реакции  $R_A$  и  $H_B$  получились положительными, значит они действительно направлены так, как было принято:  $R_A$  — вверх,  $H_B$  — направо; а реакции  $H_A$  и  $R_B$  отрицательны, значит, имеют направление, противоположное принятому, а именно:  $H_A$  направлена влево, а  $R_B$  — вниз. Изменим на чертеже направление этих реакций на противоположное и будем теперь считать все реакции положительными:  $R_A = 7T$ ;  $H_A = 0,5T$ ;  $R_B = 3T$ ;  $H_B = 2,5T$ .

Проверим, правильно ли найдены реакции:

$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A - 2 + H_B = -0,5 - 2 + 2,5 = 0; \\ \sum Y &= R_A - 4 - R_B = 7 - 4 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Теперь можно построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  таким же способом, как это было сделано в предыдущем примере, так как опорные реакции определены и, значит, известны все внешние силы, приложенные к раме.

Прежде всего сделаем некоторые замечания относительно общего вида эпюр  $M$  и  $Q$ . Поскольку распределенная нагрузка отсутствует, эпюры  $M$  и  $Q$  будут прямолинейными, причем эпюра  $Q$  будет состоять из прямоугольников. В точке  $D$  на ней будет скачок, а на эпюре  $M$  — перелом. В точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  изгибающий момент равен нулю.

Для построения эпюры  $N$  находим, что

$$\begin{aligned} \text{на участке } BK & N = R_B = 3T; \\ \text{» } & KE & N = H_A = 0,5T; \\ \text{» } & AE & N = -R_A = -7T; \\ \text{» } & FE & N = 0. \end{aligned}$$

По этим данным строим эпюру  $N$ .

Для построения эпюры  $Q$  вычисляем характерные ординаты:

$$\begin{aligned} \text{на участке } BD & Q = -H_B = -2,5T; \\ \text{» } & DK & Q = -H_B + 2 = -2,5 + 2 = -0,5T; \\ \text{» } & KE & Q = R_B = 3T; \\ \text{» } & FE & Q = -4T; \\ \text{» } & AE & Q = H_A = 0,5T. \end{aligned}$$

По этим данным строим эпюру  $Q$ .

Теперь вычисляем значения изгибающих моментов:

$$\begin{aligned} M_D &= H_B \cdot 1 = 2,5 \cdot 1 = 2,5T \cdot \text{м} & (\text{сжаты правые волокна}); \\ M_I &= H_B \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2,5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 3T \cdot \text{м} & (\text{сжаты правые волокна}); \\ M_{II} &= M_I = 3T \cdot \text{м} & (\text{сжаты верхние волокна}); \\ M_{III} &= H_A \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = -3T \cdot \text{м} & (\text{сжаты нижние волокна}); \\ M_{IV} &= H_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1T \cdot \text{м} & (\text{сжаты левые волокна}); \\ M_V &= 4 \cdot 1 = 4T \cdot \text{м} & (\text{сжаты нижние волокна}) \end{aligned}$$

и строим по этим данным эпюру  $M$ .

### § 23. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ КРИВОЛИПЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В поперечных сечениях плоского кривого бруса могут действовать, как и в рамах, три внутренних силовых фактора —  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Наиболее часто имеют дело со стержнями, ось которых очерчена по дуге окружности. В этом случае положение любого сечения удобно определять при помощи полярной системы координат, тогда продольная, поперечная силы и изгибающий момент будут функциями угла  $\varphi$ :  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$ .

Для  $N$  и  $Q$  — примем обычное правило знаков (см. § 15 и 19), эпюры  $M$  будем, как и в рамах, строить на сжатых волокнах.

В качестве примера рассмотрим плоский кривой брус, схема которого показана на рис. 79, а. Напишем значения  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  для произвольного сечения  $C$ .

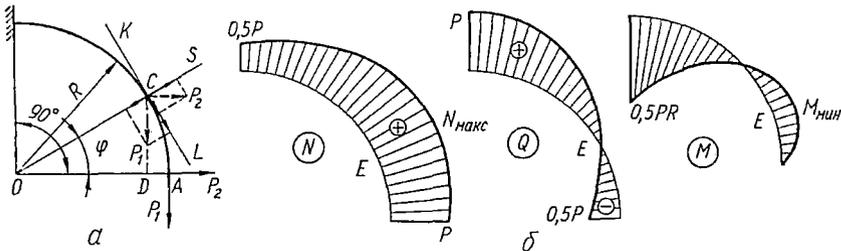


Рис. 79.

Чтобы получить  $N(\varphi)$ , нужно силы  $P_1$  и  $P_2$  спроектировать на направление оси стержня в точке  $C$ , т. е. на касательную  $KL$ . Для удобства проектирования их можно перенести мысленно в точку  $C$  (на рис. 79, а они показаны штриховыми линиями). Тогда

$$N(\varphi) = P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi.$$

Чтобы получить  $Q(\varphi)$ , нужно спроектировать силы, приложенные к части  $AC$ , на плоскость сечения, т. е. на направление  $OS$ :

$$Q(\varphi) = P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi.$$

При составлении выражения для изгибающего момента в произвольном сечении условимся, например, считать изгибающий момент положительным, если он вызывает сжатие волокон, лежащих с внутренней стороны стержня (т. е., если он увеличивает кривизну стержня). Будем иметь

$$M(\varphi) = P_1 \cdot AD - P_2 \cdot CD = P_1 R (1 - \cos \varphi) - P_2 R \sin \varphi.$$

Полученные формулы позволяют строить эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Примем для определенности, что  $P_1 = P$ , а  $P_2 = 0,5P$ . Тогда

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= (\cos \varphi + 0,5 \sin \varphi) P; \\ Q(\varphi) &= (\sin \varphi - 0,5 \cos \varphi) P; \\ M(\varphi) &= (1 - \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi) PR. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вычислим значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в ряде сечений (табл. 3).

$\varphi^\circ$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$0,5 \sin \varphi$	$0,5 \cos \varphi$	$N(\varphi)/P$	$Q(\varphi)/P$	$M(\varphi)/PR$
0	0	1	0	0,500	1	-0,500	0
10	0,174	0,985	0,087	0,498	1,072	-0,324	-0,072
20	0,342	0,940	0,171	0,470	1,111	-0,128	-0,111
30	0,500	0,866	0,250	0,433	1,116	0,067	-0,116
40	0,643	0,766	0,322	0,383	1,088	0,260	-0,088
50	0,766	0,643	0,383	0,322	1,026	0,444	-0,026
60	0,866	0,500	0,433	0,250	0,933	0,616	0,057
70	0,940	0,342	0,470	0,171	0,812	0,769	0,188
80	0,985	0,174	0,498	0,087	0,672	0,898	0,328
90	1	0	0,500	0	0,5	1	0,500

Разметив ось стержня через  $10^\circ$ , откладываем в масштабе по нормали к оси (т. е. по радиусу) соответствующие ординаты для  $Q$ ,  $N$  (положительные — наружу, отрицательные — внутрь) и для  $M$  (нажатых волоках), соединяем концы ординат плавной кривой и получаем эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  (рис. 79, б).

Рассмотрим некоторые общие вопросы построения эпюр для криволинейных стержней.

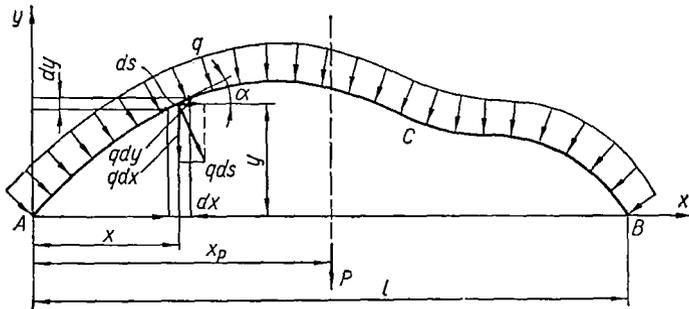


Рис. 80.

К криволинейным стержням, как и к другим стержневым системам, иногда бывает приложена равномерно распределенная нагрузка. Для вычисления усилий и моментов от такой нагрузки полезно иметь в виду следующую теорему: *равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, приложенной к дуге любого очертания, равна произведению величины интенсивности нагрузки на длину хорды, стягивающей эту дугу, перпендикулярна к этой хорде и проходит через ее середину.*

Для доказательства рассмотрим произвольный плоский криволинейный стержень  $ACB$ , нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  (рис. 80).

Выделим элемент дуги  $ds$ , центр которого имеет координаты  $x$  и  $y$ , а касательная к дуге в точке  $x$ ,  $y$  образует с осью абсцисс угол  $\alpha$ .

На этот элемент действует сила  $qds$ , составляющая которой по оси  $x$  равна  $qds \sin \alpha$ , а по оси  $y$  —  $qds \cos \alpha$ . Но  $ds \cos \alpha = dx$ , а  $ds \sin \alpha = dy$ , поэтому составляющие будут соответственно равны  $qdy$  и  $qdx$ , что и показано на чертеже.

Обозначим равнодействующую нагрузки (т. е. элементарных сил  $qds$ ) через  $P$ . Проекция  $P_x$  равнодействующей на ось  $x$  равна сумме проекций элементарных сил  $qds$ , т. е. сумме  $qdy$ :

$$P_x = \int_{ACB} qdy = q \int_A^B dy = q \int_0^l dy = 0.$$

Аналогичным образом находим, что проекция равнодействующей на ось  $y$

$$P_y = \int_{ACB} qdx = q \int_A^B dx = q \int_0^l dx = ql.$$

Отсюда видно, что равнодействующая

$$P = P_y = ql,$$

т. е. равна произведению величины интенсивности нагрузки на длину хорды  $l$ , стягивающей дугу  $ACB$ .

Так как  $P_x = 0$ , то равнодействующая перпендикулярна к оси  $x$ , т. е. к хорде, поскольку ось  $x$  направлена по хорде.

Теперь вычислим сумму моментов элементарных сил относительно начала координат:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= \int_{ACB} qdx \cdot x + \int_{ACB} qdy \cdot y = q \int_A^B xdx + q \int_A^B ydy = \\ &= q \int_0^l xdx + q \int_0^0 ydy = \frac{ql^2}{2}. \end{aligned}$$

Пусть плечо равнодействующей относительно начала координат равно  $x_p$ . Тогда по теореме о моменте равнодействующей

$$Px_p = \sum M_A, \text{ или } ql \cdot x_p = \frac{ql^2}{2},$$

откуда  $x_p = \frac{l}{2}$ . Значит, равнодействующая проходит через середину хорды. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации применения этой теоремы рассмотрим следующий пример.

Найдем выражения для изгибающего момента, поперечной и продольной сил в сечениях кругового криволинейного стержня  $AC$  (рис. 81,  $a$ ), нагруженного на части  $AB$  равномерно распределенной нагрузкой (считаем заданными величины  $q$ ,  $R$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ ).

В этом примере выражения  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  необходимо составлять отдельно для участков  $AB$  и  $BC$ .

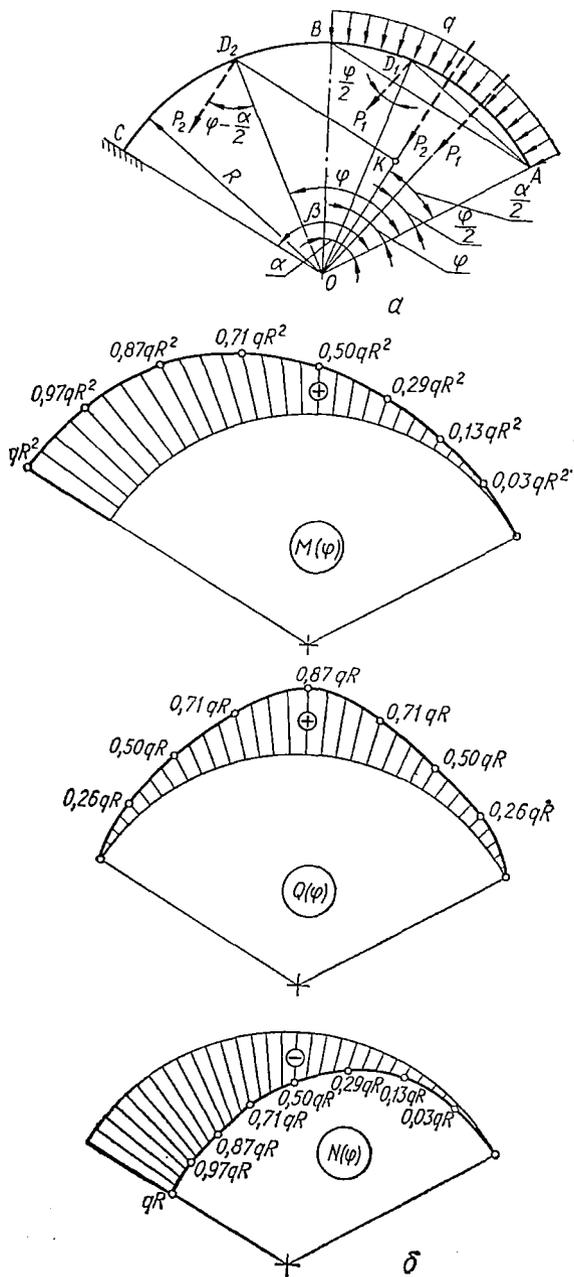


Рис. 81.

В произвольном сечении  $D_1$  на участке  $AB$  ( $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ) вычисляем усилия и моменты как результат действия нагрузки, приложенной к дуге  $AD_1$ . Равнодействующая этой нагрузки

$$P_1 = q \cdot AD_1 = 2qR \sin \frac{\varphi}{2}$$

перпендикулярна к хорде  $AD_1$  и проходит через ее середину, следовательно, направлена по биссектрисе угла  $AOD_1$ . Поэтому при  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  (для удобства вычисления  $N$  и  $Q$  равнодействующая сила  $P_1$  показана также и в текущем сечении  $D_1$ ):

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= -P_1 \sin \frac{\varphi}{2} = -2qR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -qR(1 - \cos \varphi); \\ Q(\varphi) &= P_1 \cos \frac{\varphi}{2} = 2qR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = qR \sin \varphi; \\ M(\varphi) &= P_1 \cdot \frac{AD_1}{2} = 2qR^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = qR^2(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Усилия и изгибающий момент в произвольном сечении  $D_2$  участка  $BC$  ( $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ) являются результатом действия всей распределенной нагрузки. Ее равнодействующая

$$P_2 = q \cdot AB = 2qR \sin \frac{\alpha}{2}$$

перпендикулярна к хорде  $AB$  и направлена по биссектрисе угла  $AOB$ . Поэтому при  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= -P_2 \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = -2qR \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right); \\ Q(\varphi) &= P_2 \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right); \\ M(\varphi) &= P_2 \cdot D_2K = P_2 R \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Задавшись величинами углов  $\alpha$  и  $\beta$ , вычислим значения  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  при различных значениях  $\varphi$  и построим эпюры. Значения  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  при  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$  приведены в табл. 4 и 5, а эпюры показаны на рис. 81, б.

Таблица 4

$\varphi^\circ$	$\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$1 - \cos \varphi$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
0	0	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,259	0,966	0,034	-0,034	0,259	0,034
30	0,500	0,866	0,134	-0,134	0,500	0,134
45	0,707	0,707	0,293	-0,293	0,707	0,293
60	0,866	0,500	0,500	-0,500	0,866	0,500

$\varphi^\circ$	$\varphi-30^\circ$	$\sin(\varphi-30^\circ)$	$\cos(\varphi-30^\circ)$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
60	30	0,500	0,866	-0,500	0,866	0,500
75	45	0,707	0,707	-0,707	0,707	0,707
90	60	0,866	0,500	-0,866	0,500	0,866
105	75	0,966	0,259	-0,966	0,259	0,966
120	90	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000

### § 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Пусть на криволинейный стержень<sup>1</sup> действует произвольная нагрузка (рис. 82). Проведя два бесконечно близких сечения под углами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ , выделим произвольный элемент  $AB$  так, чтобы в его пределах не было сосредоточенных воздействий. Положительный угол  $\varphi$  откладываем, как обычно, против часовой стрелки. Длина дуги выделенного элемента равна  $ds$ , радиус кривизны —  $r$ , центральный угол, соответствующий дуге  $AB$ , равен  $d\varphi$ .

В сечениях, ограничивающих элемент, действуют продольные силы  $N$  и  $N + dN$ , поперечные силы  $Q$  и  $Q + dQ$ , изгибающие моменты  $M$  и  $M + dM$  (рис. 83), заменяющие действие отброшенных частей стержня.

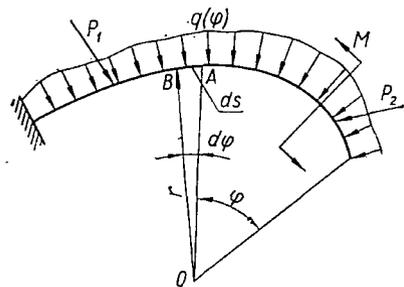


Рис. 82.

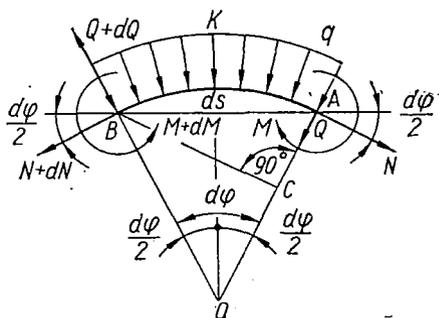


Рис. 83.

При выводе зависимостей для криволинейного стержня будем полагать, что *изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие внутренних волокон стержня (волокон, расположенных на вогнутой стороне), а распределенная нагрузка положительна, если направлена к центру кривизны.*

<sup>1</sup> Чтобы избежать несущественных, но усложняющих рассуждения вопросов о знаках изгибающих моментов, ограничимся случаем стержня, ось которого не имеет точек перегиба.

Рассмотрим условия равновесия элемента (рис. 83) — суммы проекций всех сил на оси  $AB$  и  $OK$  соответственно и сумму моментов сил относительно точки  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Пр. на } AB} &= (Q + dQ) \sin \frac{d\varphi}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\varphi}{2} + \\ &+ Q \sin \frac{d\varphi}{2} - N \cos \frac{d\varphi}{2} = 0; \\ \sum_{\text{Пр. на } OK} &= (Q + dQ) \cos \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - \\ &- Q \cos \frac{d\varphi}{2} - N \sin \frac{d\varphi}{2} - q \cdot AB = 0; \\ \sum M_B &= -(M + dM) + M + Q \cdot BC + N \cdot AC + \\ &+ q \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Учитывая, что

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1;$$

$$AB = 2r \sin \frac{d\varphi}{2} \approx rd\varphi;$$

$$AC = r(1 - \cos d\varphi) \approx 0; \quad BC = r \cdot \sin d\varphi \approx rd\varphi,$$

и пренебрегая произведением дифференциалов, получаем:

$$\begin{aligned} Qd\varphi + dN &= 0; \\ dQ - Nd\varphi - qrd\varphi &= 0; \\ -dM + Qrd\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Разделив каждое уравнение на  $d\varphi$ , имеем:

$$\boxed{\frac{dN}{d\varphi} = -Q;} \quad (3.13)$$

$$\boxed{\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr;} \quad (3.14)$$

$$\boxed{\frac{dM}{d\varphi} = Qr.} \quad (3.15)$$

Это и есть искомые дифференциальные зависимости при изгибе криволинейного стержня. Поскольку  $rd\varphi = ds$ , их можно записать еще и в таком виде:

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \quad (3.16)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \quad (3.17)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \quad (3.18)$$

Зависимости (3.13) — (3.15) позволяют проверять правильность составления выражений для  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $M(\varphi)$  при изгибе, в частности кругового криволинейного стержня. Так, нетрудно убедиться, что выражения (3.9) — (3.11) в рассмотренных выше примерах составлены правильно.

Из формул (3.13) и (3.15) следует, что в сечениях, где  $M$  и  $N$  достигают экстремальных значений,  $Q = 0$ . Это обстоятельство дает возможность в известной мере контролировать правильность построения эпюр  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Так, на эпюрах рис. 79, б в сечении  $E$ , где  $Q = 0$ , момент  $M = M_{\min}$ , а усилие  $N = N_{\max}$ . Экстремальные значения  $M$  и  $N$  можно найти следующим образом. Из второго уравнения (3.9) видно, что  $Q = 0$ , когда

$$\sin \varphi - 0,5 \cos \varphi = 0,$$

т. е., когда  $\operatorname{tg} \varphi = 0,5$ ;  $\varphi = 26^\circ 34'$ ;  $\sin \varphi = 0,447$ ;  $\cos \varphi = 0,894$ . Подставив эти значения  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  в первое и третье уравнения (3.9), найдем:

$$\begin{aligned} M_{\min} &= (1 - 0,894 - 0,5 \cdot 0,447) PR = -0,118PR; \\ N_{\max} &= (0,894 + 0,5 \cdot 0,447) P = 1,118P. \end{aligned}$$

Зависимость (3.14) дает возможность найти экстремальные точки на эпюре  $Q$ : в тех сечениях, где  $Q = Q_{\max}$  или  $Q = Q_{\min}$ ,

$$N = -qr, \quad (3.19)$$

если сечение находится на участке стержня с распределенной нагрузкой, или

$$N = 0, \quad (3.20)$$

если сечение находится на участке стержня без распределенной нагрузки.

Вследствие этого, на рис. 79, например, усилие  $Q$  нигде не будет достигать экстремальных значений (касательная к эпюре  $Q$  ни в какой точке не будет параллельна касательной к оси стержня в том же сечении), так как распределенной нагрузки нет, а  $N$  нигде не равно нулю.

Заметим, что условия  $Q = 0$ , (3.19) и (3.20) необходимы, но не достаточны для достижения функциями  $N(x)$ ,  $Q(x)$  и  $M(x)$  экстремальных значений; при выполнении их экстремума может и не быть, но тогда на соответствующей эпюре будет точка перегиба, причем касательная к эпюре обязательно будет параллельна оси стержня в этом сечении.

Эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  для криволинейных стержней обладают следующими свойствами (часть их вытекает из определения  $N$ ,  $Q$  и  $M$ , остальные — из формул (3.13) — (3.15):

1) в концевой шарнирной опоре и на свободном конце консоли, если они не нагружены внешними моментами,  $M = 0$ ;

2) в сечениях, где к стержню применен сосредоточенный момент, на эпюре  $M$  будет скачок (рис. 84), причем касательные к эпюре до скачка и за ним параллельны;

3) в сечениях, где к стержню применены сосредоточенные силы, нормальные к оси стержня (т. е. направленные по радиусу), на эпюре  $Q$  будут скачки, а на эпюрах  $M$  и  $N$  — переломы (рис. 85);

4) в сечениях, где применены сосредоточенные силы, направленные по касательной к оси стержня, на эпюре  $N$  будут скачки, а на эпюрах  $Q$  и  $M$  — переломы (рис. 86);

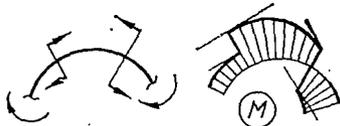


Рис. 84.

5) в сечениях, где  $Q = 0$ , на эпюрах  $M$  и  $N$  будут экстремумы, т. е. касательные к эпюрам будут параллельны касательным к оси стержня в этом же сечении (рис. 86);

6) в сечениях, где  $N = 0$ , на эпюре  $Q$  будут экстремумы (рис. 85);

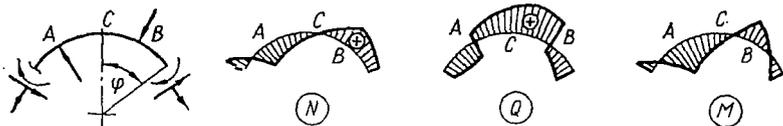


Рис. 85.

7) на участках, где  $Q > 0$ ,  $M$  возрастает, а  $N$  убывает в направлении отсчета  $\varphi$ ; там же, где  $Q < 0$ ,  $M$  убывает, а  $N$  возрастает (рис. 85 и 86);

8) на участках, где  $N > 0$ ,  $Q$  возрастает в направлении отсчета  $\varphi$ , а где  $N < 0$ ,  $Q$  убывает (рис. 85 и 86).

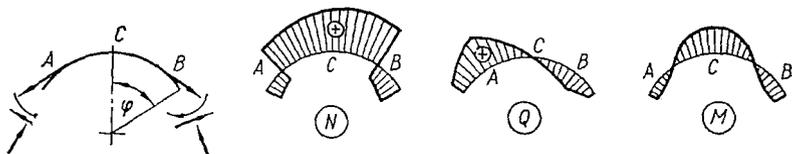


Рис. 86.

**Пример 10.** Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для стержня, показанного на рис. 87, а.

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot 4 - 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2(1 - \cos 30^\circ) = 0, R_B = 0,18T;$$

$$\Sigma M_B = -2 \cdot 2 - 3 - 1 \cdot 2(1 + \cos 30^\circ) + R_A \cdot 4 = 0, R_A = 2,68T;$$

$$\Sigma M_C = -0,18 \cdot 2 - H_B \cdot 2 - 3 - 1 \cdot 2(1 - \sin 30^\circ) + 2,68 \cdot 2 = 0, H_B = 0,5T.$$

Проверка:

$$\Sigma X = 0,5 - 1 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 - 0,5 = 0,$$

$$\Sigma Y = -0,18 + 2 + 1 \cdot \cos 30^\circ - 2,68 = 2,87 - 2,86 = 0,01T.$$

Погрешность в 0,4% получилась вследствие округлений.

2. Выбираем произвольные сечения:

$K_1$  на участке  $AD$  ( $0 \leq \varphi \leq 30^\circ$ );

$K_2$  на участке  $DC$  ( $30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ );

$K_3$  на участке  $CB$  ( $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ , или  $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ ). Очевидно, на участке  $BC$  удобнее пользоваться углом  $\beta = 180^\circ - \varphi$ .

Записываем для этих сечений выражения  $M(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  и  $N(\varphi)$ .

Участок  $AD$ :

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= 2,68 \cdot 2(1 - \cos \varphi) = 5,36(1 - \cos \varphi); \\ Q(\varphi) &= 2,68 \sin \varphi; \\ N(\varphi) &= 2,68 \cos \varphi; \end{aligned} \quad (3.21)$$

участок  $DC$ :

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= 2,68 \cdot 2(1 - \cos \varphi) - 1 \cdot 2[1 - \cos(\varphi - 30^\circ)]; \\ Q(\varphi) &= 2,68 \sin \varphi - 1 \cdot \sin(\varphi - 30^\circ); \\ N(\varphi) &= 2,68 \cos \varphi - 1 \cdot \cos(\varphi - 30^\circ); \end{aligned} \quad (3.22)$$

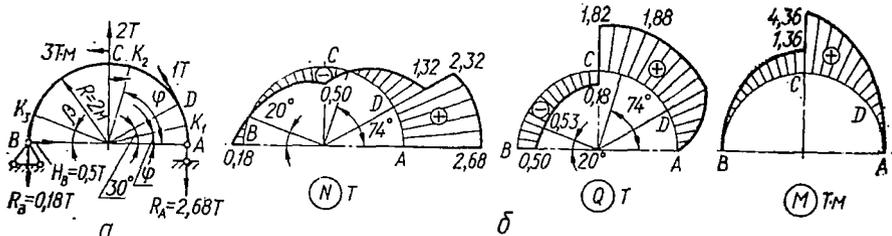


Рис. 87.

участок  $BC$ :

$$\begin{aligned} M(\beta) &= 0,18 \cdot 2(1 - \cos \beta) + 0,5 \cdot 2 \sin \beta; \\ Q(\beta) &= -0,18 \sin \beta - 0,5 \cos \beta; \\ N(\beta) &= 0,18 \cos \beta - 0,5 \sin \beta, \end{aligned} \quad (3.23)$$

или, поскольку  $\beta = 180^\circ - \varphi$ , то  $\cos \beta = -\cos \varphi$ , а  $\sin \beta = \sin \varphi$  и тогда

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= 0,36(1 + \cos \varphi) + \sin \varphi; \\ Q(\varphi) &= -0,18 \sin \varphi + 0,5 \cos \varphi; \\ N(\varphi) &= -0,18 \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выражения (3.24) приведены для того, чтобы можно было осуществить проверку, так как дифференцирование ведется по углу  $\varphi$ , который должен отсчитываться против часовой стрелки. Для вычислений же удобнее формулы (3.23), так как угол  $\beta$  острый, а  $\varphi$  — тупой.

3. Подставляя выражения (3.21), (3.22) и (3.24) в формулы (3.13) — (3.15), убеждаемся в их правильности. Например, для выражений (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \cdot \frac{dM}{d\varphi} &= \frac{1}{2} (-0,36 \sin \varphi + \cos \varphi) = Q(\varphi); \\ \frac{dN}{d\varphi} &= 0,18 \sin \varphi - 0,5 \cos \varphi = -Q(\varphi); \\ \frac{dQ}{d\varphi} &= -0,18 \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi = N(\varphi). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таблица 6

1	2	3	4	5	6	7	
$\varphi^\circ$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$1 - \cos \varphi$	$M(\varphi) = 5,36 \cdot [4],$ $T \cdot M$	$Q(\varphi) = 2,68 \cdot [2]$		$N(\varphi) = 2,68 \cdot [3]$
					$T$		
0	0	1	0	0	0	2,68	
15	0,259	0,966	0,034	0,18	0,69	2,59	
30	0,500	0,866	0,134	0,72	1,34	2,32	

Таблица 7

1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi^\circ$	$\varphi - 30^\circ$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin (\varphi - 30^\circ)$	$\cos (\varphi - 30^\circ)$	$1 - \cos \varphi$	$1 - \cos (\varphi - 30^\circ)$
30	0	0,500	0,866	0	1,000	0,134	0
45	15	0,707	0,707	0,259	0,966	0,293	0,034
60	30	0,866	0,500	0,500	0,866	0,500	0,134
75	45	0,966	0,259	0,707	0,707	0,741	0,293
90	60	1,000	0	0,866	0,500	1,000	0,500

1	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi^\circ$	$5,36 \cdot [7]$	$2 \cdot [8]$	$M(\varphi) = [9] -$ $- [10], T \cdot M$	$2,68 \cdot [3]$	$Q(\varphi) = [12] -$ $- [5], T$	$2,68 \cdot [4]$	$N(\varphi) = [14] -$ $- [6], T$
30	0,72	0	0,72	1,34	1,34	2,32	1,32
45	1,57	0,07	1,50	1,89	1,63	1,89	0,92
60	2,68	0,27	2,41	2,32	1,82	1,34	0,47
75	3,97	0,59	3,38	2,59	1,88	0,69	-0,02
90	5,36	1,00	4,36	2,68	1,82	0	-0,50

4. Пользуясь формулами (3.21) — (3.23), составляем таблицы значений  $M$ ,  $Q$  и  $N$ : табл. 6 — для участка  $AD$ , табл. 7 — для  $DC$  и табл. 8 — для  $BC^1$ .

Откладываем вычисленные ординаты на эллипах  $M$ ,  $N$  и  $Q$  (рис. 87, б).

5. По версам отложенных ординат обнаруживаем, что  $Q$  обращается в нуль только в сечении  $A$ . Значит, только для этого сечения касательные к эллипам  $M$  и  $N$  будут перпендикулярны к радиусу стержня.

На эллипе  $N$  кривая, мысленно проведенная через вершины ординат, два раза проходит через нуль: на участке  $DC$  и на участке  $BC$ . Пользуясь формулами (3.22) и (3.23), находим угловые координаты этих точек:

<sup>1</sup> Здесь и далее цифры в квадратных скобках, помещенные в головках таблиц, указывают значение соответствующей графы.

1	2	3	4	5	6	7
$\beta$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$1 - \cos \beta$	$0,36 \cdot [4]$	$M(\beta) = \frac{[2] + [5]}{T \cdot \mu}$	$-0,18 \cdot [2]$
0	0	1,000	0	0	0	0
15	0,259	0,966	0,034	0,01	0,27	-0,05
30	0,500	0,866	0,134	0,05	0,55	-0,09
45	0,707	0,707	0,293	0,11	0,82	-0,13
60	0,866	0,500	0,500	0,18	1,05	-0,16
75	0,966	0,259	0,741	0,27	1,24	-0,17
90	1,000	0	1,000	0,36	1,36	-0,18

1	8	9	10	11	12
$\beta$	$-0,5 \cdot [3]$	$Q(\beta) = \frac{[7] + [8]}{T}$	$0,18 \cdot [3]$	$-0,5 \cdot [2]$	$N(\beta) = \frac{[10] + [11]}{T}$
0	-0,50	-0,50	0,18	0	0,18
15	-0,48	-0,53	0,17	-0,13	0,04
30	-0,43	-0,52	0,16	-0,25	-0,09
45	-0,35	-0,48	0,13	-0,35	-0,22
60	-0,25	-0,41	0,09	-0,43	-0,34
75	-0,13	-0,30	0,05	-0,48	-0,43
90	0	-0,18	0	-0,50	-0,50

на участке DC

$$2,68 \cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 - 30^\circ) = 0;$$

$$2,68 \cos \varphi_0 - \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi_0 - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi_0 = 0;$$

$$1,81 \cos \varphi_0 = 0,5 \sin \varphi_0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1,81}{0,5} = 3,62; \varphi_0 = 74^\circ 35'; \sin \varphi_0 = 0,964,$$

значит,

$$Q_{\max} = Q(\varphi_0) = 2,68 \sin \varphi_0 - \sin(\varphi_0 - 30^\circ) = \\ = 2,68 \cdot 0,964 - \sin 44^\circ 35' = 1,88T;$$

на участке BC

$$0,18 \cos \beta_0 - 0,5 \sin \beta_0 = 0; \operatorname{tg} \beta_0 = 0,36; \beta_0 = 19^\circ 45';$$

$$\sin \beta_0 = 0,338; \cos \beta_0 = 0,941,$$

значит,

$$Q_{\min} = Q(\beta_0) = -0,18 \sin \beta_0 - 0,5 \cos \beta_0 = \\ = -(0,18 \cdot 0,338 + 0,5 \cdot 0,941) = -0,53T.$$

6. Откладываем ординаты  $Q_{\max}$  и  $Q_{\min}$  и проводим кривые эпюр (рис. 87, б).

7. Анализируем эпюры с точки зрения общих свойств:

а) в шарнирах A и B момент  $M = 0$ ;

- б) в сечении  $C$  приложен момент  $M = 3T \cdot l$  и на эпюре получается скачок на эту величину;
- в) в сечении  $C$  приложена сила  $2T$ , чему на эпюре  $Q$  отвечает скачок, а на эпюрах  $M$  и  $N$  — переломы;
- г) в сечении  $D$  приложена сила  $1T$ , чему на эпюре  $N$  отвечает скачок, а на эпюре  $Q$  — перелом;
- д) в сечении  $A$  усилие  $Q = 0$  и касательные в этой точке к эпюрам  $M$  и  $N$  вертикальны (перпендикулярны к радиусу);
- е) в сечениях  $\varphi = \varphi_0$  и  $\beta = \beta_0$  усилие  $N = 0$  и на эпюре  $Q$  в этих сечениях есть экстремумы;
- ж) на участке  $AC$  усилие  $Q > 0$ ,  $M$  возрастает, а  $N$  убывает (если двигаться вдоль стержня в направлении отсчета  $\varphi$ , т. е. из точки  $A$  против часовой стрелки); на участке  $CB$  усилие  $Q < 0$ ,  $M$  убывает, а  $N$  возрастает;
- з) на участке  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  и  $0 \leq \beta \leq \beta_0$  усилие  $N > 0$  и  $Q$  возрастает, а на участке между  $\varphi_0$  и  $\beta_0$   $N < 0$  и  $Q$  убывает;
- и) значения  $Q$  и  $N$  в сечениях  $A$  и  $B$  соответствуют величинам опорных реакций.

Если стержень имеет прямолинейные и криволинейные участки, то на прямолинейных участках эпюры строятся так, как для балок или рам, а на криволинейных, — как было показано в предыдущем примере.

## § 25. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В конструкциях встречаются стержни, оси которых не лежат в одной плоскости, а также и плоские системы, находящиеся под воздействием пространственной нагрузки. В поперечных сечениях таких систем могут действовать все шесть внутренних силовых факторов:  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (см. рис. 40).

С методикой построения эпюр в этом случае познакомимся на примере стержня, ось которого представляет собой пространственную ломаную линию (рис. 88). Условимся при переходе от одного стержня системы к другому совмещать ось  $x$  с осью рассматриваемого стержня, соответственно располагая положительные направления осей  $y$

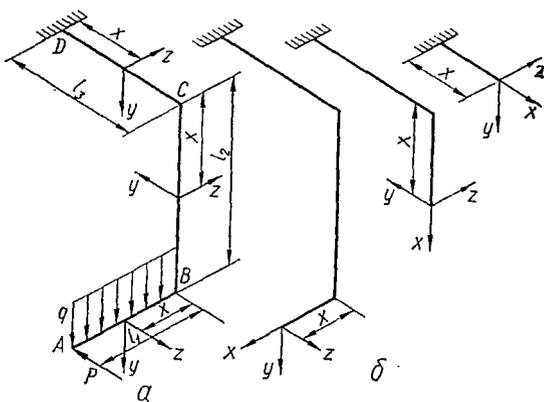


Рис. 88.

и  $z$  так, чтобы при наблюдении против направления оси  $x$  поворот от оси  $y$  к оси  $z$  на угол  $90^\circ$  совершался против часовой стрелки. На рис. 88, б показаны положительные направления осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  в отдельных частях стержня с ломаной осью.

Эпюры изгибающих моментов по-прежнему будем строить на сжатых волокнах, причем ориентировать их нужно так, чтобы плоскость

эпюры совпадала с плоскостью действия пары того изгибающего момента, для которого она построена. Знак изгибающего момента вводится произвольно и притом только в случае необходимости записать соответствующее уравнение (как для плоских рам и криволинейных стержней).

Для продольных сил и крутящих моментов сохраняются прежние правила знаков. Эпюры  $N$  и  $M_{кр}$  могут быть ориентированы как угодно, но ординаты всегда откладываются по нормали к оси стержня. Поперечные силы в сечении будем считать положительными, если их направление совпадает с положительными направлениями осей  $y$  и  $z$ .

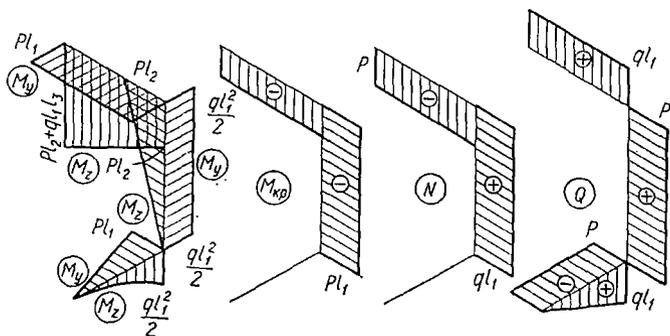


Рис. 89.

Построение начинаем с участка  $AB$ . Для произвольного сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от точки  $B$ , определяем результат действия сил, расположенных слева от сечения (т. е. силы  $P$  и равнодействующей распределенной нагрузки  $q$ ):

$$N \equiv 0; Q_y = q(l_1 - x); Q_z = -P; M_{кр} \equiv 0;$$

$$M_z = \frac{q(l_1 - x)^2}{2} \text{ (сжаты нижние волокна);}$$

$$M_y = P(l_1 - x) \text{ (сжаты левые волокна).}$$

В сечении  $B$  (при  $x=0$ )

$$N = 0; Q_y = ql_1; Q_z = -P; M_{кр} = 0;$$

$$M_z = \frac{ql_1^2}{2}; M_y = Pl_1.$$

По этим данным строим эпюры для участка  $AB$  (рис. 89). Пара момента  $M_z$  действует в вертикальной плоскости  $xy$ , в этой плоскости и ориентируем параболическую эпюру. Пара момента  $M_y$  действует в горизонтальной плоскости  $xz$ , в этой плоскости и ориентируем треугольную эпюру  $M_y$ .

Переходим к участку  $BC$ . Проекцию на ось стержня дает только распределенная нагрузка, значит,  $N = ql_1$  и эпюра  $N$  на участке  $BC$  прямоугольна. Легко видеть, что  $Q_z = 0$ , а  $Q_y = P$ , следовательно, эпюра  $Q_y$  прямоугольна.

Момент относительно оси стержня получается только от силы  $P$ , причем к верхней стороне любого сечения он приложен против часовой стрелки (смотреть снизу вверх, т. е. против направления оси  $x$ ). В соответствии с принятым выше правилом знаков для крутящих моментов на участке  $BC$

$$M_{кр} = -Pl_1$$

и эпюра  $M_{кр}$  здесь будет прямоугольной.

Эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  на участке  $BC$  прямолинейны, поскольку распределенная нагрузка на нем отсутствует. Следовательно, достаточно вычислить значения изгибающих моментов в двух сечениях, например в  $B$  и  $C$ .

В сечении  $B$  момент  $M_z = 0$ , так как и сила  $P$  и равнодействующая распределенной нагрузки проходят через ось  $z$  этого сечения.

В сечении  $C$

$$M_z = Pl_2.$$

Равнодействующая распределенной нагрузки момента  $M_z$  не дает и в этом сечении, так как пересекает ось  $z$  сечения  $C$ .

По этим данным строим треугольник эпюры  $M_z$  (рис. 89) на сжатых волокнах, располагая его в плоскости  $xy$ , в которой действует пара изгибающего момента  $M_z$ .

Для изгибающего момента  $M_y$  в сечениях  $B$  и  $C$

$$M_y = ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{ql_1^2}{2}.$$

Сила  $P$  не дает момента относительно осей  $y$  в сечениях  $B$  и  $C$ , так как она параллельна этим осям. Следовательно, эпюра  $M_y$  на участке  $BC$  прямоугольна. На рис. 89 прямоугольник построен на сжатых волокнах и располагается в плоскости  $xz$ .

Осталось построить эпюры на участке  $CD$ . На ось  $x$  проектируется только сила  $P$ , причем она вызывает сжатие. Поэтому здесь

$$N = -P$$

и эпюра продольных сил прямоугольна.

В произвольном сечении участка  $Q_z = 0$ , а  $Q_y = ql_1$ , следовательно, эпюра  $Q_y$  прямоугольна.

Момент относительно оси  $x$  получается только от действия  $q$  ( $P$  параллельна оси  $x$ ), причем, согласно принятому правилу знаков для крутящих моментов, этот момент отрицателен:

$$M_{кр} = -ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = -\frac{ql_1^2}{2}.$$

Эпюра  $M_{кр}$  вновь получается прямоугольной.

Поскольку эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  будут прямолинейными, вычислим их значения только в двух сечениях — в  $C$  и  $D$ :

в сечении  $C$

$$M_z = P \cdot BC = Pl_2 \quad (\text{сжаты нижние волокна});$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \quad (\text{сжаты левые волокна});$$

в сечении  $D$

$$M_z = P \cdot BC + ql_1 \cdot CD = Pl_2 + ql_1 l_3 \quad (\text{сжаты нижние волокна});$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \quad (\text{сжаты левые волокна}).$$

По этим данным строим прямоугольную эпюру изгибающего момента  $M_y$  в горизонтальной плоскости и трапециевидную эпюру изгибающего момента  $M_z$  в вертикальной плоскости.

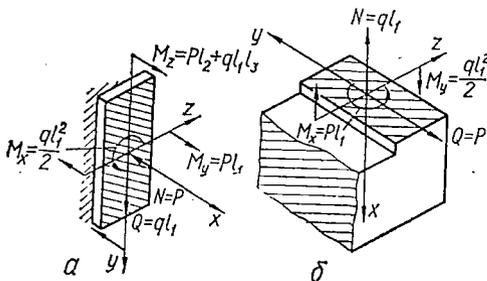


Рис. 90.

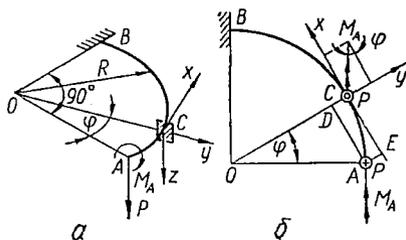


Рис. 91.

Пользуясь построенными эпюрами (рис. 89), можно в любом сечении пространственного стержня найти величины и направления изгибающих и крутящих моментов, продольной и поперечной сил. В качестве иллюстрации показаны усилия и моменты в сечении  $D$  (рис. 90, а) и в сечении  $B$  участка  $BC$  (рис. 90, б).

**Пример 11.** Построим эпюры для пространственно нагруженного криволинейного стержня (рис. 91, а), расположенного в горизонтальной плоскости. Сечения его (например, показанное на рисунке пунктиром прямоугольное) таковы, что одна из главных центральных осей  $y$  совпадает с направлением радиуса, проведенного в центр тяжести (ц. т.) сечения, а вторая —  $z$  — вертикальна. Касательная к окружности дает для каждого сечения направление оси стержня (оси  $x$ ). Сила  $P$  вертикальна, а внешний момент  $M$  приложен в плоскости конечного сечения  $A$ .

В данном случае, чтобы построить эпюры, нужно ввести угловую координату  $\varphi$  и записать выражения для усилий и моментов. При этом проще рассматривать проекцию стержня на горизонтальную плоскость (рис. 91, б). Ось  $z$  тогда совпадает с точкой  $C$  и отмечена точкой в кружочке, а сила  $P$  — с точкой  $A$  и отмечена крестиком в кружочке; приложенный внешний момент представлен в виде вектора-момента.

Рассмотрев результат действия приложенных к стержню сил в текущем сечении  $C$ , получим:

$$N(\varphi) = \sum X = 0; \quad Q_x(\varphi) = P; \quad Q_y(\varphi) = 0;$$

$$M_z(\varphi) = \sum M_z = 0.$$

Изгибающий момент  $M = M_y$  и крутящий  $M_{кр} = M_x$  от силы  $P$  вычислим, умножая  $P$  на соответствующие плечи:  $AD = R \sin \varphi$  и  $AE = DC = R(1 - \cos \varphi)$ .

Чтобы вычислить составляющие  $M$  и  $M_{кр}$  от действия момента  $M_A$ , перенесем мысленно вектор  $M_A$  в точку  $C$  (рис. 91, б). Проекции этого вектора на оси  $y$  и  $x$  дадут соответственно составляющие изгибающего и крутящего моментов в сечении  $C$ . Придерживаясь принятого правила знаков для  $M_{кр}$  и считая  $M$  положительным, если он вызывает сжатие в нижних волокнах стержня, получим следующее:

$$M(\varphi) = M_y(\varphi) = PR\sin\varphi + M_A\sin\varphi = (PR + M_A)\sin\varphi;$$

$$M_{кр}(\varphi) = M_x(\varphi) = -PR(1 - \cos\varphi) + M_A\cos\varphi = (PR + M_A)\cos\varphi - PR.$$

При  $P = 200$  кг,  $M_A = 2000$  кг·см,  $R = 30$  см

$$M(\varphi) = 8000 \sin\varphi \text{ кг·см};$$

$$M_{кр}(\varphi) = 8000 \cos\varphi - 6000 \text{ кг·см}.$$

Таблица 9

1	$\varphi^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
2	$\sin \varphi$	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1
3	$\cos \varphi$	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0
4	$8000 \cdot [3]$	8000	7730	6930	5660	4000	2070	0
5	$M_{кр} = [4] - 6000$	2000	1730	930	-340	-2000	-3930	-6000
6	$M = 8000 \cdot [2]$	0	2070	4000	5660	6930	7730	8000

Составляем таблицу (табл. 9) и по полученным данным строим эпюры  $M$  и  $M_{кр}$  (рис. 92).

Иногда эпюры для пространственно нагруженных криволинейных стержней строят не на проекции стержня, как это сделано на рис. 92, а в перспективе (рис. 93).

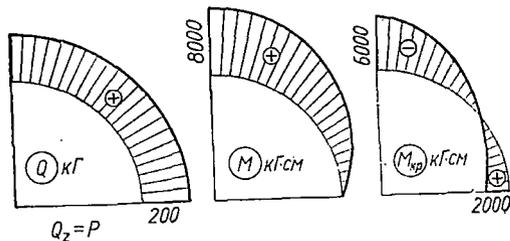


Рис. 92.

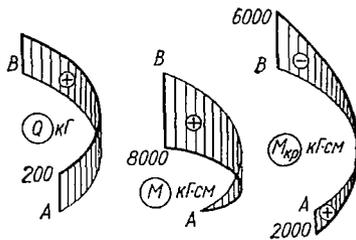


Рис. 93.

## § 26. НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИИ

Как уже говорилось (§ 14), в сечениях нагруженного стержня действуют непрерывно распределенные по сечению внутренние усилия. Приводя их к центру тяжести сечения, получаем главный вектор  $\vec{R}$  и главный момент  $\vec{M}$ , проекции которых на главные центральные оси сечения  $y$ ,  $z$  и ось стержня  $x$  дают величины  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_{кр}$ , называемые усилиями и моментами в сечении.

На рис. 94, а показаны распределенные по левой стороне сечения усилия, являющиеся результатом действия правой части стержня

(изображена пунктиром) на левую, их главный вектор  $\vec{R}$  и главный момент  $\vec{M}$ . Вектор  $\vec{R}$  представляет собой некоторую сумму усилий, распределенных по всей площади сечения.

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади  $dF$  (рис. 94, б). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их

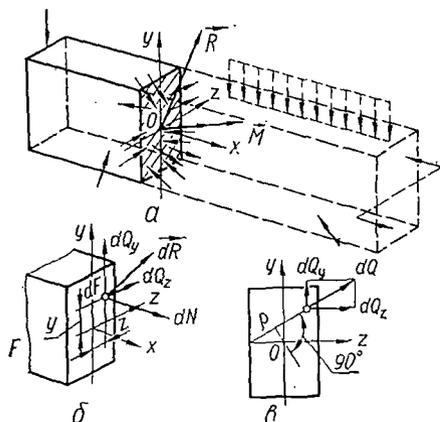


Рис. 94.

$\vec{dR}$  будет проходить через центр тяжести элемента  $dF$ , координаты которого равны  $y$  и  $z$ . Следовательно, приводя эти усилия к центру тяжести элемента  $dF$ , получим главный вектор  $\vec{dR}$  и главный момент, равный нулю.

Проекциями  $\vec{dR}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будут элементарная продольная сила  $dN$  и элементарные поперечные силы  $dQ_y$  и  $dQ_z$ . Поскольку, как было сказано выше, усилия на элементе можно считать распределенными равномерно, то, разделив величины  $dN$ ,  $dQ_y$  и  $dQ_z$  на площадь  $dF$ , получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади:

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \tau_z = \frac{dQ_z}{dF}. \quad (3.26)$$

Эти величины называются напряжениями в точке  $(y, z)$  поперечного сечения стержня, причем

$\sigma$  — нормальное напряжение;  
 $\tau$  — касательное напряжение.

Они имеют размерность силы, деленной на квадрат длины. В расчетах  $\sigma$  и  $\tau$  всегда будем выражать в  $\text{кг/см}^2$ . При экспериментальных исследованиях свойств материалов, а также в справочных таблицах напряжения часто выражают в  $\text{кг/мм}^2$ .

Таким образом, напряжением называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

Иногда, кроме нормальных напряжений  $\sigma$  и касательных  $\tau_y$ ,  $\tau_z$ , рассматривают еще и полное напряжение

$$p = \frac{dR}{dF}, \quad (3.27)$$

<sup>1</sup> Согласно СИ напряжения измеряют в ньютонах на квадратный метр ( $\text{н/м}^2$ ).

1  $\text{кг/см}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2 = 9,81 \text{ н/см}^2 = 0,0981 \text{ Мн/м}^2$ ;  
 1  $\text{Мн/м}^2 = 10,2 \text{ кг/см}^2 = 0,102 \text{ кг/мм}^2$ .

т. е. величину полного усилия, приходящегося на единицу площади. Очевидно,

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (3.28)$$

В общем случае нагружения тела напряжения различны в разных точках сечения (как принято говорить, напряжения распределены по сечению неравномерно), но встречается также и равномерное распределение напряжений.

Понятие «напряжение» играет очень важную роль в расчетах на прочность. Поэтому значительная часть курса сопротивления материалов отводится изучению способов вычисления напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ .

Нетрудно установить общие зависимости между  $\sigma$  и  $\tau$  с одной стороны и  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  и  $M_{кр}$  — с другой. Исходя из определений для усилий и моментов (§ 14) и учитывая формулы (3.26), имеем:

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma dF; \quad (3.29)$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y dF; \quad (3.30)$$

$$Q_z = \int_F dQ_z = \int_F \tau_z dF; \quad (3.31)$$

$$M_y = \int_F zdN = \int_F \sigma z dF; \quad (3.32)$$

$$M_z = \int_F ydN = \int_F \sigma y dF; \quad (3.33)$$

$$M_{кр} = \int_F (y dQ_z - z dQ_y) = \int_F (y \tau_z - z \tau_y) dF = \int_F \rho \tau dF. \quad (3.34)$$

В последнем выражении  $\tau$  представляет собой полное касательное напряжение в точке рассматриваемой площади:

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \sqrt{\frac{dQ_y^2 + dQ_z^2}{dF}} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

а  $\rho$  — расстояние от центра тяжести сечения до линии действия  $dQ$  (рис. 94, в).

Полученные выражения (3.29) — (3.34), устанавливающие связь между напряжениями и внутренними усилиями, будем называть *статическими уравнениями*, или *интегральными уравнениями равновесия*.

Хотя величины компонентов внутренних сил в любом сечении стержня обычно легко определить, например из эпюр, однако для практических расчетов полученные зависимости непосредственно использовать нельзя, так как закон распределения напряжений по сечению неизвестен. Следовательно, задача вычисления напряжений всегда статически неопределима. Например, зная величину изгибающего момента  $M_y$  в сечении, нельзя найти нормальные напряжения из формул (3.32).

Все же, если, пользуясь теми или иными соображениями, удастся установить закон распределения  $\sigma$  или  $\tau$  по сечению, тогда по формулам (3.29) — (3.34) можно найти и сами величины напряжений.

Выводить формулы для напряжений в стержнях будем всегда по такой схеме:

1. Рассматриваем статическую сторону поставленной задачи, т. е. записываем те из уравнений (3.29) — (3.34), которые нужны для вывода.

2. Рассматриваем геометрическую сторону задачи: на основе опытного изучения данного вида деформации стержня и определенных допущений устанавливаем зависимости между перемещениями точек стержня и их положением в сечении относительно принятой системы координат. Эти зависимости называются *геометрическими уравнениями*.

3. Рассматриваем физическую сторону: базируясь на экспериментальном исследовании физических свойств материала, определяем зависимость между напряжениями и деформациями (или перемещениями). Эти зависимости называют *физическими уравнениями*.

4. Производим синтез, т. е. совместное решение уравнений, полученных в п. 1—3, и путем исключения деформаций (или перемещений) получаем формулы, выражающие напряжения через усилия или моменты в сечении.

## § 27. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ. ВИДЫ РАСЧЕТОВ

Основной задачей сопротивления материалов является обеспечение надежных размеров поперечного сечения детали, подверженной тому или иному силовому, температурному или другому воздействию. Такие размеры, как уже отмечалось, могут быть определены из расчета на прочность, жесткость или (см. гл. XIX) устойчивость. Из двух первых видов основным есть расчет на прочность. На нем сейчас и остановимся.

Отметим прежде всего, что опасность наступления разрушения характеризуется не столько величинами внутренних усилий и моментов в сечении, сколько величинами наибольших нормальных или касательных напряжений, а также их комбинаций, которые действуют в опасных (т. е. наиболее напряженных) точках сечения. Физически очевидно, что материал не в состоянии выдерживать сколь угодно большие напряжения. Поэтому величины наибольших напряжений из условия надежности работы детали должны быть ограничены некоторыми допустимыми значениями. Их называют *допускаемыми напряжениями* и обозначают  $[\sigma]$  или  $[\tau]$ <sup>1</sup>.

Если известны допускаемые напряжения и есть формулы, выражающие напряжения через усилия и моменты в сечении, то в принципе рассчитать на прочность можно любую деталь.

На практике встречаются различные задачи по расчету на прочность:

1) по известным нагрузкам требуется для выбранного материала найти надежные с точки зрения прочности размеры поперечного сечения стержня (проектировочный расчет);

<sup>1</sup> Некоторые соображения о выборе допускаемых напряжений будут даны в § 34.

2) известны материал и размеры детали; требуется выяснить, может ли она выдержать заданную нагрузку (проверочный расчет);

3) известны материал, размеры детали и схема нагружения ее; нужно найти допустимую величину нагрузки.

В основе всех этих расчетов лежит условие прочности — неравенство

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \tau_{\max} \leq [\tau], \quad (3.35)$$

выражающее тот факт, что наибольшие напряжения — нормальное, касательное или эквивалентное (см. гл. VI), действующие в опасной точке, не должны превышать допустимого.

Аналогично проводят и расчет на жесткость, только вместо условия прочности используют условие жесткости, ограничивающее величину деформаций или перемещений. Но даже в том случае, когда выполнен расчет на жесткость, всегда необходимо произвести проверочный расчет на прочность и, если он дает отрицательный результат, принять размеры, получающиеся из расчета на прочность.

Ниже будут рассмотрены конкретные методы определения напряжений, а также расчетов на прочность и жесткость при основных видах деформации стержня.

## Глава IV

### РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

#### § 28. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Растяжение или сжатие стержня вызывается силами, действующими вдоль его оси (рис. 95, а). При этом в поперечных сечениях из шести внутренних силовых факторов возникает только один — продольная

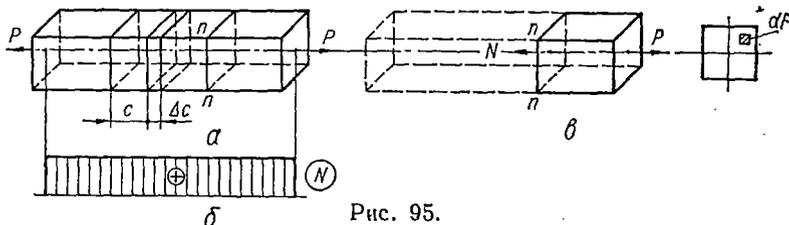


Рис. 95.

(осевая) сила  $N$ , эпюра которой приведена на рис. 95, б. Осевая сила в сечении является равнодействующей возникающих в каждой из точек сечения нормальных напряжений. Отсутствие поперечных сил дает основание предположить, что касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения равны нулю.

Выведем формулу для определения нормальных напряжений. При решении этой задачи будем придерживаться указанной в § 26 последовательности.

Рассечем стержень произвольным поперечным сечением  $n - n$  (рис. 95, в). Статическая сторона задачи выражается уже известным уравнением (3.29):

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Из уравнения (4.1) нельзя определить величину  $\sigma$ , так как закон распределения последних в точках поперечного сечения не известен.

Рассмотрим геометрическую сторону задачи. При наблюдении деформации растяжения стержня, на поверхности которого нанесены линии, перпендикулярные к оси бруса (рис. 95, а), можно отметить, что эти линии, смещаясь параллельно самим себе, остаются прямыми и перпендикулярными к оси бруса. Предполагая, что указанная картина перемещения сечений имеет место и внутри стержня, приходим к гипотезе плоских сечений: поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее, перемещаясь поступательно вдоль оси стержня.

Разобьем теперь стержень на продольные (параллельные оси стержня) элементы бесконечно малых поперечных сечений и будем в дальнейшем называть их *волокнами*. На основании гипотезы плоских сечений следует заключить, что все волокна удлиняются на одну и ту же величину и их относительные удлинения  $\epsilon$  одинаковы:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}. \quad (4.2)$$

Это аналитическое выражение геометрической стороны задачи.

Физическая сторона рассматриваемой задачи заключается в установлении зависимости деформаций от напряжений. При упругих деформациях эта зависимость подчиняется закону Гука. Для относительного удлинения при осевом растяжении закон Гука выражается формулой

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ или } \boxed{\sigma = E\epsilon}, \quad (4.3)$$

где  $E$  — коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости первого рода* или *модулем Юнга*. Модуль упругости — это одна из физических констант материала. Размерность модуля упругости такая же, как и размерность напряжения, т. е.  $\text{кг/см}^2$ .

Учитывая постоянство модуля упругости  $E$  для однородного и изотропного материала, а также выражения (4.2) и (4.3), находим, что

$$\sigma = E\epsilon = \text{const}. \quad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в формулу (4.1), получаем:

$$N = \int_F E\epsilon dF = E\epsilon \int_F dF = E\epsilon F = \sigma F, \quad (4.5)$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.6)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении. В случае сжатия напряжения считают отрицательными.

Отметим, что формула (4.6) справедлива лишь для сечений, достаточно удаленных от мест приложения сосредоточенных нагрузок. Вблизи приложения нагрузок распределение напряжений носит сложный характер и требует более точных методов исследования.

Определяя напряжения при растяжении, сжатии, и при других видах деформаций, в сопротивлении материалов, а также в теории упругости широко пользуются следующим весьма важным положением, носящим название принципа Сен-Венана: *если тело нагружается статически эквивалентными системами сил, т. е. такими, у которых главный вектор и главный момент одинаковы, и при этом размеры области приложения нагрузок невелики по сравнению с размерами тела, то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения сил, напряжения мало зависят от способа нагружения.* Общего теоретического доказательства принцип Сен-Венана не имеет, но его справедливость подтверждается многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Поясним этот принцип на следующем примере (рис. 96). Один и тот же стержень, закрепленный верхним концом, нагружается на свободном конце статически эквивалентными нагрузками, равнодействующие которых выражаются величиной вектора  $P$ . Нагрузки приложены различными способами: а) в виде сосредоточенной осевой силы; б) в виде двух сил; в) в виде распределенной нагрузки. Исследования показывают, что во всех случаях в поперечном сечении, удаленном на расстояние, превышающее в 1,5—2 раза его поперечные размеры, напряжения практически одинаковы. В сечениях же, расположенных близко от места приложения сил, величина напряжений и характер их распределения различны.

Перейдем к определению деформаций стержня. Из выражения (4.5) можно найти относительное удлинение:

$$\epsilon = \frac{N}{EF}. \quad (4.7)$$

В пределах призматического участка стержня длиной  $l$ , выполненного из однородного материала ( $E = \text{const}$ ), в сечениях которого действуют одинаковые продольные силы  $N$ , удлинение каждой единицы длины одинаково и, следовательно, абсолютное удлинение

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) выражает закон Гука для абсолютных удлинений.

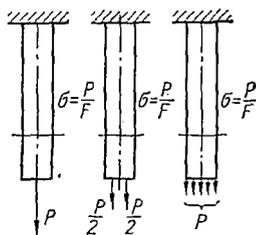


Рис. 96.

Произведение  $EF$  в знаменателе формулы называется *жесткостью поперечного сечения стержня* при растяжении и сжатии и имеет размерность силы. Величину  $c = \frac{EF}{l}$  называют *жесткостью стержня*.

Если на рассматриваемом участке продольная сила и поперечное сечение переменны (рис. 97, а — в), то для элемента бесконечно малой длины  $dx$  (рис. 97, г) на основании формулы (4.8) можно записать:

$$\Delta(dx) = \frac{N(x) dx}{EF(x)}.$$

Полное удлинение участка длиной  $l$  получим, суммируя удлинения всех бесконечно малых участков:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EF(x)}. \quad (4.9)$$

Заметим, что перемещение некоторого сечения относительно другого равно продольной деформации участка стержня, заключенного между рассматриваемыми сечениями, и обозначается буквой  $\lambda$ .

Растяжение и сжатие сопровождаются изменением поперечных размеров стержня (рис. 98). При растяжении они уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются.

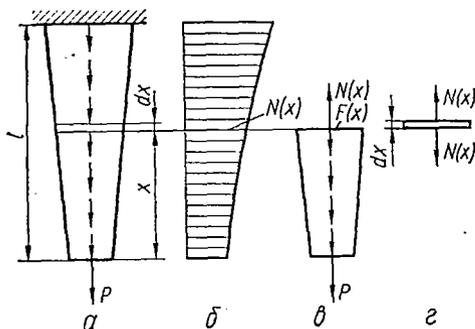


Рис. 97.

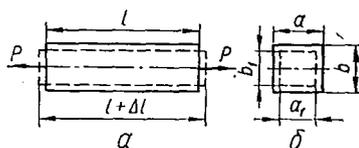


Рис. 98.

По аналогии с продольной деформацией разность соответствующих поперечных размеров после деформации и до нее назовем *абсолютной поперечной деформацией*:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_1 - a; \\ \Delta b &= b_1 - b. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При растяжении поперечные деформации отрицательны, а при сжатии — положительны.

Разделив абсолютную поперечную деформацию на соответствующий первоначальный размер, получим относительную поперечную деформацию, обозначаемую  $\epsilon'$ . Относительная поперечная деформация для изотропных материалов по всем поперечным направлениям одинакова:

$$\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (4.11)$$

Между поперечной и продольной относительными деформациями при простом растяжении и сжатии в пределах применимости закона Гука существует постоянное отношение. Абсолютная величина этого отношения носит название *коэффициента Пуассона* и обозначается буквой  $\mu$ :

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (4.12)$$

Коэффициент Пуассона — безразмерная величина.

Учитывая, что продольная и поперечная деформации всегда имеют противоположные знаки, получаем:

$$\epsilon' = -\mu \epsilon, \quad (4.13)$$

или согласно формуле (4.3):

$$\epsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (4.14)$$

При сжатии напряжение в формулу (4.14) следует подставлять со знаком минус.

Коэффициент Пуассона  $\mu$  наряду с модулем упругости  $E$  характеризует упругие свойства материала. Для всех изотропных материалов значения коэффициента Пуассона лежат в пределах 0—0,5. В частности, для пробки  $\mu$  близок к нулю, для каучука — к 0,5, для стали  $\mu \approx 0,3$ . В приложении 9 приведены значения модулей упругости  $E$  для некоторых материалов.

Как уже было сказано, основой для решения всех задач сопротивления материалов является условие прочности (гл. III). При растяжении и сжатии поступают следующим образом. На растянутых и сжатых участках стержня отыскивают *опасные сечения*, в которых напряжения достигают наибольших значений по абсолютной величине, и для этих сечений записывают *условие прочности*

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

В случае растяжения в правую часть условия прочности подставляют допустимое напряжение на растяжение  $[\sigma_+]$ , а в случае сжатия — допустимое напряжение на сжатие  $[\sigma_-]$ .

Исходя из условия прочности (4.15), можно решать задачи всех трех типов: подбор размеров поперечного сечения, проверку прочности, определение допустимой нагрузки.

В ряде случаев для обеспечения нормальной работы машин и орудий размеры их деталей должны быть выбраны так, чтобы обеспечивалось условие жесткости.

При растяжении (сжатии) *условие жесткости* имеет следующий вид:

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) dx}{EF(x)} \leq [\Delta l], \quad (4.16)$$

где  $\Delta l$  — изменение размеров детали;

$[\Delta l]$  — допускаемая величина этого изменения.

Напомним, что расчет по условию жесткости всегда должен быть дополнен расчетом на прочность. Если условие жесткости выполнено, а условие прочности не удовлетворяется, то задачу необходимо решать, исходя из условия прочности.

## § 29. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ

При проектировании и расчетах на прочность, жесткость и устойчивость элементов механизмов, машин и сооружений необходимо знать свойства материалов. Поэтому материалы испытывают на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб и твердость. Подробные описания всех видов механических испытаний, а также применяемых при этом машин и приборов приводятся в специальных курсах и руководствах к лабораторным работам по сопротивлению материалов<sup>1</sup>. Ограничимся лишь кратким описанием некоторых распространенных видов механических испытаний и получаемых при этом результатов.

Если нагрузка статическая, то основным является испытание на растяжение, при котором обнаруживаются наиболее важные свойства материалов. Для этого из испытуемого материала изготовляют специальные образцы. Чаще всего их делают цилиндрическими (рис. 99, а); из листового металла обычно изготовляют плоские образцы (рис. 99, б).

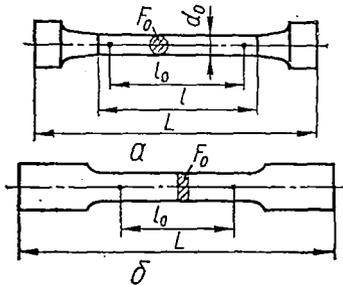


Рис. 99.

В цилиндрических образцах должно быть выдержано соотношение между расчетной длиной образца  $l_0$  и диаметром  $d_0$ : у длинных образцов  $l_0 = 10 d_0$ , у коротких  $l_0 = 5d_0$ .

Эти соотношения можно выразить в несколько иной форме. Учитывая, что

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1,13 \sqrt{F_0},$$

где  $F_0$  — площадь поперечного сечения образца, получаем:

для длинного образца

$$l_0 = 11,3 \sqrt{F_0}; \quad (4.18)$$

для короткого образца

$$l_0 = 5,65 \sqrt{F_0}.$$

<sup>1</sup> См., например, Н. М. Беляев. Лабораторные работы по сопротивлению материалов. М., Гостехиздат, 1956; Н. А. Шапошиников. Механические испытания металлов. М., Машгиз, 1954.

В качестве основных применяют образцы с диаметром  $d_0 = 10$  мм; при этом рабочая длина  $l_0 = 100$  мм. Допускается применение образцов и других диаметров при условии, что рабочая длина их  $l_0 = 10d_0$  или  $l_0 = 5d_0$ . Такие образцы называются *пропорциональными*.

Соотношение (4.18) принимается и для определения размеров образцов с некруглой формой поперечного сечения.

**Диаграммы растяжения.** Для испытаний на растяжение применяют разрывные машины, позволяющие в процессе испытания определять усилия и соответствующие им деформации образца. По этим данным строят первичную диаграмму растяжения, в которой по оси ординат откладывают усилия, а по оси абсцисс — соответствующие им удлинения.

Диаграмма растяжения может быть получена и автоматически при помощи специальных диаграммных аппаратов. Характер диаграммы растяжения зависит от свойств испытуемого материала. Типичный вид такой диаграммы для малоуглеродистой стали изображен на рис. 100.

Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы, а также соответствующие им стадии деформирования образца.

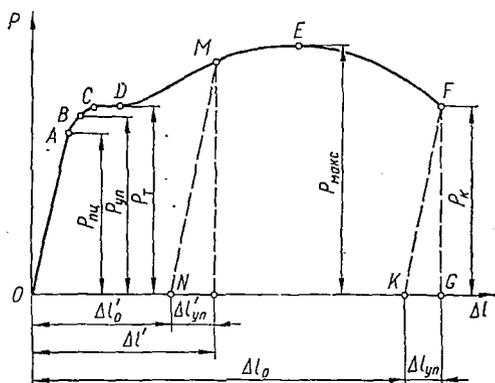


Рис. 100.

От начала нагружения до определенного значения растягивающей силы имеет место прямая пропорциональная зависимость между удлинением образца и силой. Эта зависимость на диаграмме выражается прямой  $OA$ . На этой стадии растяжения справедлив закон Гука.

Обозначим силу, при которой закон пропорциональности прекращает свое действие, через  $P_{пц}$ . Этому значению силы на диаграмме соответствует точка  $A$ . Напряжение, вызванное силой  $P_{пц}$ , называется *пределом пропорциональности* и вычисляется по формуле

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0}. \quad (4.19)$$

Таким образом, *пределом пропорциональности называется напряжение, после которого нарушается закон Гука.*

Как уже указывалось, *деформация называется упругой, если она полностью исчезает после разгрузки.* Допустим, что постепенно повышая нагрузку  $P$ , будем при каждом ее значении производить полную разгрузку образца. Пока сила  $P$  не достигнет определенной величины, вызванные ею деформации будут полностью исчезать при разгрузке. Процесс разгрузки при этом будет изображаться той же линией, что и нагружение.

Обозначим через  $P_{уп}$  наибольшее значение силы, при котором образец еще не дает при разгрузке остаточной деформации. Этому

значению на диаграмме соответствует точка  $B$ , а упругой стадии растяжения образца — участок диаграммы  $OB$ .

Наибольшее напряжение, до которого остаточная деформация при разгрузке не обнаруживается, называется пределом упругости. Это напряжение вызывается силой  $P_{уп}$  и определяется по формуле

$$\sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{F_0}. \quad (4.20)$$

Предел упругости является характеристикой, не связанной с законом Гука. Точка  $B$  может располагаться как выше, так и ниже точки  $A$ . Эти точки, а следовательно, и значения напряжений  $\sigma_{пц}$  и  $\sigma_{уп}$ , близки друг к другу и обычно различием между ними пренебрегают.

После точки  $A$  при дальнейшем растяжении образца кривая растяжения становится криволинейной и плавно поднимается до точки  $C$ , где наблюдается переход к горизонтальному участку  $CD$ , называемому *площадкой текучести*. На этой стадии растяжения удлинение образца растет при постоянном значении растягивающей силы, обозначаемой через  $P_T$ . Такой процесс деформации, называемый *текучестью материала*, сопровождается остаточным (пластическим) удлинением, не исчезающим после разгрузки.

Таким образом, *пределом текучести*  $\sigma_T$  называется наименьшее напряжение, при котором деформация образца происходит при постоянном растягивающем усилии. Величина предела текучести вычисляется по формуле

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (4.21)$$

Начало пластической деформации соответствует наступлению некоторого критического состояния металла, которое может быть обнаружено не только по остаточным деформациям, но и по ряду других признаков. При пластической деформации повышается температура образца; у стали изменяются электропроводность и магнитные свойства; на полированной поверхности образцов, особенно плоских, заметно потускнение, являющееся результатом появления густой сетки линий, носящих название *линий Чернова* (линий Людерса). Последние наклонены к оси образца приблизительно под углом  $45^\circ$  (рис. 101,  $a$ ) и представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие сдвигов в тех плоскостях кристаллов, где действуют наибольшие касательные напряжения. В результате сдвигов по наклонным плоскостям образец получает остаточные деформации. Механизм образования их упрощенно показан на рис. 101,  $b$ .

После стадии текучести материал вновь приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации и воспринимает возрастающее до некоторого предела усилие.

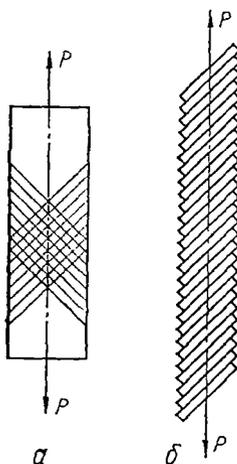


Рис. 101.

Этому отвечает восходящий участок  $DE$  (рис. 100) кривой растяжения, называемый *участком упрочнения*. Точка  $E$  соответствует наибольшему усилию  $P_{\text{макс}}$ , которое может воспринять образец.

*Напряжение, соответствующее максимальной силе  $P_{\text{макс}}$ , называется временным сопротивлением  $\sigma_{\text{в}}$  или пределом прочности  $\sigma_{\text{пч}}$* . Его вычисляют по формуле

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{P_{\text{макс}}}{F_0}. \quad (4.22)$$

До этого момента удлинения распределялись равномерно по всей длине  $l_0$  образца, поперечные сечения расчетной части образца изменялись незначительно и также равномерно по длине. Поэтому для вычисления  $\sigma_{\text{пч}}$ ,  $\sigma_{\text{уп}}$ ,  $\sigma_{\text{т}}$  и  $\sigma_{\text{в}}$  в расчетные формулы вводилось первоначальное значение площади  $F_0$ .

После достижения усилия  $P_{\text{макс}}$  при дальнейшем растяжении образца *деформация происходит, главным образом, на небольшой длине образца. Это ведет к образованию местного сужения в виде шейки*

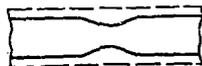


Рис. 102.

(рис. 102) и к падению силы  $P$ , несмотря на то что напряжение в сечении шейки непрерывно растет. Падение растягивающей силы  $P$  наблюдается лишь при испытании образца в машине, ограничивающей скорость нарастания деформации. При нагружении путем подвешивания грузов разрушение произойдет при постоянной нагрузке, но со все возрастающей скоростью деформации.

Обозначив через  $P_{\text{к}}$  величину растягивающей силы в момент разрыва, получим:

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{P_{\text{к}}}{F_0}. \quad (4.23)$$

Определяемое таким образом напряжение при разрыве образца весьма условно и не может быть использовано в качестве характеристики механических свойств стали. Условность состоит в том, что получено оно делением силы в момент разрыва на первоначальную площадь поперечного сечения образца, а не на действительную его площадь при разрыве, которая значительно меньше начальной вследствие образования шейки.

Основными характеристиками упругости и прочности материалов, используемыми в практических расчетах, являются *предел упругости  $\sigma_{\text{уп}}$ , предел текучести  $\sigma_{\text{т}}$  и временное сопротивление (предел прочности)  $\sigma_{\text{в}}$  ( $\sigma_{\text{пч}}$ )*.

Для малоуглеродистой стали, имеющей площадку текучести, например для стали Ст.2, эти характеристики следующие:  $\sigma_{\text{уп}} = 2000 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\text{т}} = 2200 \div 2600 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\text{в}} = 3400 \div 4200 \text{ кг/см}^2$ .

Для металлов, не имеющих площадки текучести, *предел текучести определяют условно как напряжение, при котором остаточная деформация составляет величину, установленную ГОСТом или техническими условиями*. По ГОСТ 1497—61 величина остаточной деформации составляет 0,2 % от измеряемой длины образца. Условные пределы текучести отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной деформации, например  $\sigma_{0,2}$ .

Учитывая, что практически трудно установить начало отклонения от закона пропорциональности и начало появления первых остаточных деформаций, вводят также понятия условных предела пропорциональности и предела упругости.

*Условным пределом пропорциональности называют наименьшее напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости между напряжением и деформацией достигает некоторой величины, устанавливаемой техническими условиями (например 0,002% от измеряемой длины образца).*

*Условным пределом упругости называют наименьшее напряжение, при котором остаточная деформация достигает заданной величины (обычно 0,001% — 0,05% от измеряемой длины образца). Его отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной остаточной деформации (например  $\sigma_{0,001}$  и  $\sigma_{0,05}$ ).*

Важнейшие механические характеристики некоторых широко применяемых материалов приведены в приложениях 2—8.

**Разгрузка и повторное нагружение.** Выше было указано, что если при усилении растяжения, вызывающем напряжение не выше предела упругости, прекратить нагружение, а затем разгрузить образец, то процесс разгрузки изобразится на диаграмме линией, практически совпадающей с линией нагрузки. После окончательной разгрузки образца его удлинение полностью исчезнет. Повторное нагружение на диаграмме пойдет по той же линии  $OB$ , полученной при первом нагружении образца.

Иначе будет, если к началу разгрузки напряжение в образце превышает предел упругости. Произведя разгрузку, например, после достижения силой значения, изображаемого ординатой точки  $M$  (рис. 100), заметим, что процесс разгрузки на диаграмме будет описываться уже не кривой, совпадающей с кривой  $OABCDM$  нагружения, а прямой  $MN$ , параллельной прямолинейному участку  $OA$  диаграммы. Удлинение  $\Delta'_1$ , полученное образцом до начала разгрузки, при разгрузке полностью не исчезнет. Исчезнувшая часть удлинения на диаграмме изобразится отрезком  $\Delta'_{уп}$ , а оставшаяся — отрезком  $\Delta'_0$ . Следовательно, полное удлинение образца за пределом упругости состоит из двух частей — упругой и пластической:

$$\Delta'_1 = \Delta'_{уп} + \Delta'_0. \quad (4.24)$$

Так будет вплоть до разрыва образца. После разрыва упругая составляющая полного удлинения в обеих частях образца (отрезок  $\Delta'_{уп}$ ) исчезает. Оставшееся удлинение изображается отрезком  $\Delta'_0$ .

Будем вновь нагружать образец, который был растянут силой, вызвавшей в нем напряжение выше предела текучести, а затем разгружен. При этом окажется, что линия повторного нагружения почти совпадает на диаграмме с линией разгрузки  $MN$ . Предел пропорциональности повысится и станет приблизительно равным тому напряжению, до которого первоначально был растянут образец. При дальнейшем увеличении растягивающей силы кривая диаграммы совпадет с  $MEF$ . Часть диаграммы, расположенная левее линии  $NM$ , окажется

отсеченной, т. е. начало координат переместится в точку  $M$ . Остаточное удлинение после разрыва будет меньше, чем в образце, не подвергнутому предварительной пластической деформации.

Таким образом, предварительная вытяжка за предел текучести изменяет некоторые механические свойства стали — повышает предел пропорциональности и уменьшает остаточное удлинение после разрыва, т. е. делает ее более хрупкой. Изменение свойств материала в результате деформации за пределом текучести называется *наклепом*. В некоторых случаях явление наклепа нежелательно и его стремятся устранить, в других же, наоборот, наклеп полезен и его создают искусственно.

**Относительное удлинение и сужение после разрыва.** Полное удлинение, полученное образцом перед разрушением, уменьшится после разрыва, так как в частях образца исчезнут упругие деформации. *Относительным удлинением после разрыва  $\delta$*  называют отношение в процентах приращения расчетной длины образца после разрыва к ее первоначальной величине:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% . \quad (4.25)$$

Относительное удлинение после разрыва характеризует пластичность материала. В зависимости от величины этого удлинения материалы делят на пластичные и хрупкие. Для первых можно условно принять  $\delta > 5\%$ , а для вторых —  $\delta < 5\%$ . К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, медь, свинец и др., а к хрупким — закаленная сталь, чугун, стекло, камень, бетон и др. Например, для углеродистой стали марки Ст. 2 относительное удлинение после разрыва  $\delta \approx 31\%$ .

*Относительное сужение образца после разрыва  $\Psi$*  определяется делением абсолютного уменьшения площади поперечного сечения в шейке на первоначальную площадь и выражается в процентах от начальной площади поперечного сечения:

$$\Psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} \cdot 100\% . \quad (4.26)$$

Чем больше относительное сужение после разрыва, тем пластичнее материал. Например, для мягкой углеродистой стали марки Ст. 2  $\Psi = 55 \div 65\%$ .

Относительное удлинение  $\delta$  и относительное сужение  $\Psi$  являются *характеристиками пластичности материала*.

**Работа деформации.** Кроме указанных выше характеристик механических свойств материала, диаграмма растяжения дает возможность определить еще и энергетические характеристики его.

Величина площади диаграммы растяжения в координатах  $P - \Delta l$  характеризует работу, затраченную на разрыв образца. Это можно показать следующим образом.

Пусть некоторой растягивающей силой  $P$  соответствует деформация образца  $\lambda$  (рис. 103). Дадим силе  $P$  бесконечно малое приращение

$dP$ , при этом деформация получит приращение  $d\lambda$ . Очевидно, работа внешних сил на этом перемещении

$$dA = (P + dP) d\lambda \approx Pd\lambda. \quad (4.27)$$

Работа, затраченная на растяжение образца до удлинения  $\lambda_1$ ,

$$A = \int_0^{\lambda_1} Pd\lambda. \quad (4.28)$$

Как видно из рис. 103, интеграл представляет собой площадь  $OABCDMNO$  диаграммы растяжения. Работа, затраченная на разрыв образца, будет равна всей площади  $OABCEFGO$  диаграммы растяжения.

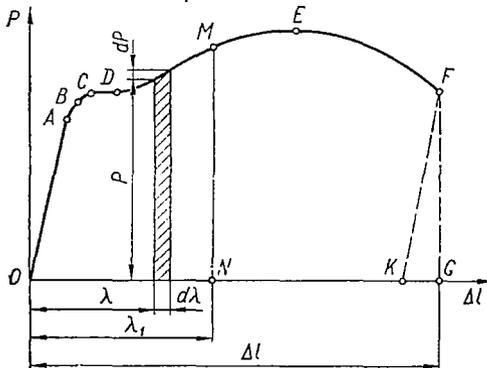


Рис. 103.

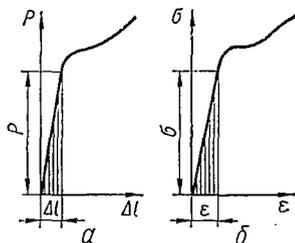


Рис. 104.

В пределах упругости полная работа деформации выражается площадью треугольника (рис. 104, а):

$$A_{уп} = \frac{P\Delta l}{2}. \quad (4.29)$$

Разделив полную работу деформации  $A$  на объем рабочей части образца, получим *удельную работу деформации*, т. е. работу, затраченную на деформирование единицы объема материала:

$$a_{уп} = \frac{A}{V}. \quad (4.30)$$

Подставив в формулу (4.30) значение  $A$  из формулы (4.29) и  $V = F_0 l_0$ , получим:

$$a_{уп} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma\epsilon}{2}. \quad (4.31)$$

Удельная работа деформации в пределах упругости выражается площадью треугольника на диаграмме  $\sigma - \epsilon$  (рис. 104, б).

Удельная работа деформации характеризует способность материала сопротивляться ударному действию нагрузки: чем больше удельная работа деформации до разрыва, тем лучше материал сопротивляется ударным нагрузкам.

**Диаграмма напряжений.** Вид диаграммы растяжения в координатах  $P - \Delta l$  зависит не только от свойств материала, но и от размеров испытываемого образца.

Чтобы получить диаграмму, характеризующую только механические свойства материала, первичную диаграмму растяжения перестраивают в координатах  $\sigma - \epsilon$ . Ординаты такой диаграммы получают делением значений растягивающей силы на первоначальную площадь поперечного сечения образца ( $\sigma = \frac{P}{F_0}$ ), а абсциссы — делением абсолютных удлинений расчетной части образца на первоначальную ее длину

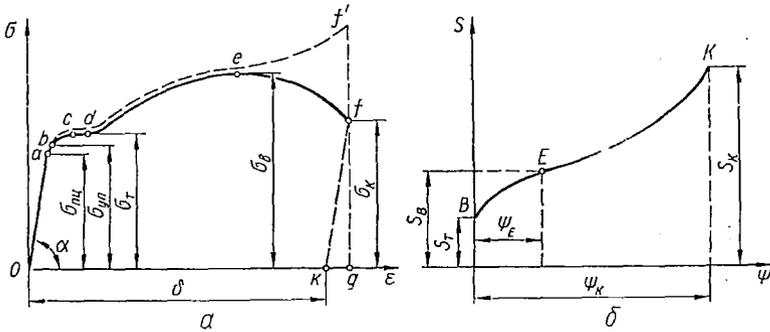


Рис. 105.

( $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ ). В частности, для характерных точек диаграммы ординаты вычисляют по формулам (4.19) — (4.23).

Диаграмма в координатах  $\sigma - \epsilon$ , соответствующая первичной диаграмме (рис. 100), изображена на рис. 105, а. Точкам  $O, A, B, C, D, E, F$  первичной диаграммы соответствуют точки  $O, a, b, c, d, e, f$  диаграммы  $\sigma - \epsilon$ .

Из диаграммы  $\sigma - \epsilon$  видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E, \quad (4.32)$$

т. е. модуль упругости при растяжении равен тангенсу угла наклона прямолинейного участка диаграммы к оси абсцисс.

Площадь диаграммы напряжений  $\sigma - \epsilon$  в соответствующем масштабе равна удельной работе деформации.

Нисходящий участок  $ef$  диаграммы носит условный характер, поскольку действительная площадь поперечного сечения образца после образования шейки и первоначальная площадь, по которой определяют ординаты диаграммы, значительно отличаются друг от друга. Деля величину силы на действительную площадь поперечного сечения образца, можно получить значения истинных напряжений и построить соответствующую диаграмму (на диаграмме рис. 105, а таким напряжениям соответствует штриховая линия).

Так как после образования шейки относительная продольная деформация распределяется по длине образца неравномерно, то истинные диаграммы принято строить в таких координатах: относительное сужение  $\Psi$  поперечного сечения в шейке — истинное напряжение  $S$ , где  $\Psi = \frac{F_0 - F_t}{F_0}$ ,  $S = \frac{P_t}{F_t}$ , а  $P_t$  и  $F_t$  — соответственно усилие и наименьшая площадь поперечного сечения в данный момент времени испытания.

Кривая истинных напряжений при растяжении малоуглеродистой стали представлена на рис. 105, б. Точке  $B$  соответствует начало возникновения остаточной деформации и истинное напряжение, являющееся пределом текучести. Точке  $E$  отвечает наибольшая сила  $P_{\max}$ , которую выдержал образец во время испытания. По ней определяется величина истинного временного сопротивления  $S_B$ . Деформация образца от начала растяжения до момента, отвечающего точке  $E$ , равномерна

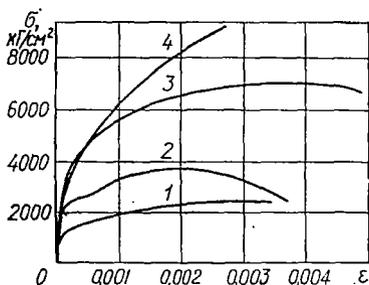


Рис. 106.

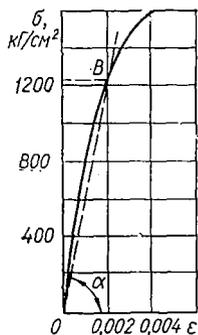


Рис. 107.

по длине образца. Абсцисса точки  $E$  ( $\Psi_E$ ) представляет наибольшее равномерное сужение. Разрыв образца обозначен точкой  $K$ . Ее абсцисса представляет собой наибольшее сужение сечения  $\Psi_K$ , а ордината — истинное сопротивление разрыву  $S_K$ .

Как видно из истинной диаграммы, сопротивление пластическому деформированию растет вплоть до момента разрушения.

Для определения механических характеристик на практике используют условные диаграммы растяжения в координатах  $\sigma - \epsilon$ . Построение диаграмм истинных напряжений значительно сложнее, и служат они, главным образом, целям теоретических исследований.

Заметим еще, что площадка текучести есть у сравнительно немногих металлов — малоуглеродистой стали, латуни и некоторых отожженных марганцовистых и алюминиевых бронз. Большинству же металлов свойственен постепенный переход в пластическую область. Для сравнения на рис. 106 изображены диаграммы растяжения нескольких металлов: кривая 1 — бронзы ( $\sigma_B = 2470 \text{ кг/см}^2$ ,  $\delta = 36\%$ ); 2 — углеродистой стали ( $\sigma_B = 3580 \text{ кг/см}^2$ ,  $\delta = 38\%$ ); 3 — никелевой стали ( $\sigma_B = 7150 \text{ кг/см}^2$ ,  $\delta = 54\%$ ) и 4 — марганцовистой стали ( $\sigma_B = 9160 \text{ кг/см}^2$ ,  $\delta = 30\%$ ).

Разрыв образцов из хрупких материалов происходит при весьма незначительном удлинении и без образования шейки. На рис. 107

приведена диаграмма растяжения серого чугуна СЧ 28-48, типичная для таких материалов. Диаграмма не имеет выраженного начального прямолинейного участка. Однако, определяя деформации в чугунных деталях, все же пользуются формулой, выражающей закон Гука. Значение модуля упругости  $E$  находят как тангенс угла наклона прямой, проведенной через начальную точку диаграммы  $O$  и точку  $B$ , соответствующую напряжению, при котором определяют деформацию. Такой модуль называется *секундным*.

### § 30. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

Несмотря на простоту, испытания на сжатие проводят реже, чем на растяжение.

Для пластичных материалов модуль упругости  $E$ , предел упругости и предел текучести при сжатии примерно те же, что и при растяжении. Напряжение, соответствующее разрушающей силе, при сжатии пластичных материалов получить нельзя, так как образец не разрушается, а превращается в диск и сжимающая сила постоянно возрастает. Характеристики, аналогичные относительному удлинению и относительному сужению при разрыве, при испытании пластичных материалов на сжатие также не могут быть получены.

Испытанию на сжатие подвергают, главным образом, хрупкие материалы, которые, как правило, лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и применяются для изготовления элементов, работающих в таких условиях. Для их расчета на прочность необходимо знать характеристики материала, получаемые испытанием на сжатие.

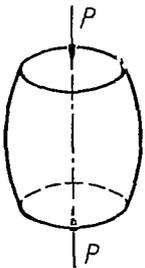


Рис. 108.

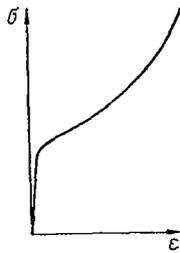


Рис. 109.

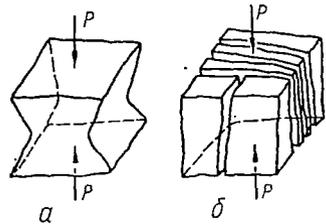


Рис. 110.

Испытание материалов на сжатие проводят на специальных прессах или универсальных испытательных машинах. Для этого изготовляют образцы в виде цилиндров небольшой высоты (обычно от одного до трех диаметров) или кубиков. Трение, возникающее во время испытания на сжатие между плитами машины и торцами образца, оказывает существенное влияние на результаты испытания и на характер разрушения. Цилиндрический образец из малоуглеродистой стали принимает при этом бочкообразную форму (рис. 108). На рис. 109 изображена диаграмма сжатия, полученная испытанием образца из такого материала. На рис. 110, *a* показан характер разрушения образца из камня под действием сжимающих усилий  $P$  при наличии сил трения между

плитами машины и торцами образца. Если уменьшить силы трения, нанеся слой парафина на торцы образца, разрушение произойдет иначе: образец даст трещины, параллельные направлению сжимающих сил и расслоится (рис. 110, б). Как образец из камня, разрушается бетонный образец.

Вид разрушенного при сжатии чугунного образца показан на рис. 111. Разрушение произошло вследствие сдвига одной части образца относительно другой. Диаграмма сжатия чугуна показана на рис. 112.



Рис. 111.

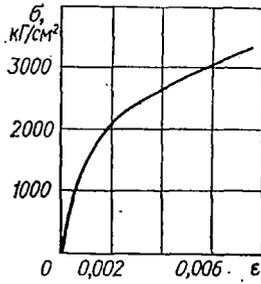


Рис. 112.

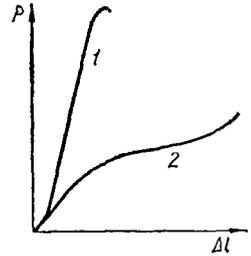


Рис. 113.

Древесина, являющаяся анизотропным материалом, при сжатии, как и при растяжении, обладает различной прочностью в зависимости от направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон. На рис. 113 изображены диаграммы сжатия двух кубиков из древесины одной породы. Кривая 1 иллюстрирует сжатие кубика вдоль волокон, а кривая 2 — поперек их. Видно, что при сжатии вдоль волокон древесина значительно прочнее, чем при сжатии поперек их. При сжатии вдоль волокон образец разрушается вследствие сдвига одной части относительно другой, а при сжатии поперек волокон древесина склонна к прессованию и не всегда удается определить момент начала разрушения.

В табл. 10 приведены значения временного сопротивления при сжатии некоторых материалов.

Таблица 10

Материал	$\sigma_{всж}$ , кг/см <sup>2</sup>	Материал	$\sigma_{всж}$ , кг/см <sup>2</sup>
Чугун серый обыкновенный . . . . .	6000—10000	Сосна (при 15% влажности)	
Гранит . . . . .	800—2000	вдоль волокон . . . . .	400
Кирпич . . . . .	80—300	поперек волокон . . . . .	50
Бетон . . . . .	70—500	Дуб (при 15% влажности)	
Текстолит . . . . .	1300—2500	вдоль волокон . . . . .	500
Гетинакс . . . . .	1500—1800	поперек волокон . . . . .	150

**Косвенные методы определения временного сопротивления.** В некоторых случаях для оценки величины временного сопротивления можно воспользоваться косвенным методом, в частности измерением твердости.

*Твердостью материала* называется способность оказывать сопротивление механическому проникновению в него другого, более твердого тела. Для определения твердости чаще всего в поверхность материала с определенной силой вдавливают какое-либо более твердое тело (индентор) в виде шарика, конуса или пирамиды. По размерам полученного отпечатка судят о твердости испытуемого материала.

Наиболее распространенным способом определения твердости является способ Бринелля (рис. 114). Стальной закаленный шарик диаметром  $D$  вдавливается в испытуемый образец (изделие) под действием нагрузки  $P$ , приложенной в течение определенного времени. После удаления нагрузки измеряется диаметр отпечатка, оставшегося на поверхности образца.

Число твердости по Бринеллю  $HB$  определяется путем деления нагрузки  $P$  кг на площадь поверхности сферического отпечатка, мм<sup>2</sup>, и может быть вычислено по следующей формуле:

$$HB = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})},$$

где  $P$  — нагрузка, кг;

$D$  — диаметр шарика, мм;

$d$  — диаметр отпечатка, мм.

Число твердости выражается в кг/мм<sup>2</sup>, хотя обычно размерность не указывают.

Если твердость измеряют шариком  $D = 10$  мм под нагрузкой  $P = 3000$  кг с выдержкой  $t = 10$  сек, то число твердости по Бринеллю сопровождают обозначением  $HB$ , например  $HB 300$ .

При других условиях определения твердости число твердости сопровождают индексами в следующем порядке: диаметр шарика, нагрузка и продолжительность выдержки. Например,  $HB 5/250/30 = 200$  означает число твердости по Бринеллю (200) при испытании шариком  $D = 5$  мм под нагрузкой  $P = 250$  кг, приложенной в течение  $t = 30$  сек.

Если твердость материала  $HB \geq 400$  кг/мм<sup>2</sup>, то определить ее, вдавливая шарик, нельзя в связи с заметной деформацией последнего. В этих случаях вместо шарика вдавливают алмазный конус (по Роквеллу) или алмазную пирамиду (по Виккерсу). Применяют и другие способы. Например, твердость определяют по высоте отскока бойка, падающего с определенной высоты на поверхность испытуемого материала; по периоду качаний маятника, упирающегося в поверхность материала.

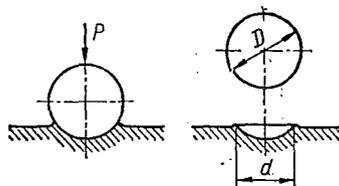


Рис. 114.

Твердость, полученная различными методами, при помощи специальных таблиц может быть переведена в твердость по Бринеллю.

Определение твердости — весьма распространенное испытание, что объясняется чрезвычайной простотой его. Твердость можно определять и непосредственно в условиях производства на готовых изделиях, так как остающиеся отпечатки во многих случаях не портят изделия.

Опытным путем установлено, что для некоторых материалов существует определенная связь между числом твердости по Бринеллю и временным сопротивлением при разрыве. Например, для малоуглеродистой стали  $\sigma_b \approx 0,36HB$ ; для стального литья  $\sigma_b = (0,3 \div 0,4) HB$ , для серого чугуна  $\sigma_b = \frac{HB - 40}{6}$ .

### § 31. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Различные виды механических испытаний металлов дают лишь внешнее представление о характере упругой и пластической деформации. Приведем краткое и упрощенное изложение современных представлений о процессах, происходящих в металлах при таких деформациях.

Как известно, металлы имеют кристаллическую структуру. При затвердевании металла в расплаве одновременно возникает много центров кристаллизации, вследствие чего рост каждого кристалла стеснен соседними. В результате технический металл состоит из большого числа кристаллов неправильной огранки, называемых *кристаллитами*, или *кристаллическими зернами*. Относительно друг друга кристаллические зерна ориентированы самым различным образом. Вместе с тем в каждом из них атомы расположены совершенно определенно и образуют так называемую *кристаллическую решетку*, состоящую из повторяющихся одинаковых ячеек.

Атомы электрически нейтральны, так как отрицательные заряды электронов, вращающихся вокруг ядра, нейтрализованы положительным зарядом его. В металлах при достаточном сближении атомов возникает возможность отрыва валентного электрона одного атома положительно заряженным ядром другого, у этого — следующим и т. д. Таким образом, часть валентных электронов начинает перемещаться вокруг ядер всех взаимодействующих атомов. Эти электроны называются *свободными*, поскольку не связаны с определенными атомами. Металл можно представить себе как постройку из нейтральных атомов и ионов, находящихся в атмосфере электронного газа, который как бы стягивает ионы. Связь между атомами, осуществляемая электростатическими силами в результате взаимодействия положительных ионов и электронного газа, называется *металлической*.

Поскольку эти атомы по своей природе одинаковы, то расположиться они должны на таких расстояниях друг от друга и в таких точках пространства, где действующие на них силы притяжения и отталкивания были бы равны. В результате происходит закономерное расположение атомов, наблюдаемое в кристаллической решетке.

Кристаллическую решетку образуют воображаемые линии и плоскости, проходящие через точки пространства, в которых располагаются ионы металла. Более правильно эти точки определить как центры наиболее вероятного расположения ионов, так как те не остаются неподвижными, а колеблются около этих центров. Последние обычно называют *узлами кристаллической решетки*. Наиболее распространенными типами таких решеток металлов являются кубическая объемноцентрированная (рис. 115, а), кубическая гранецентрированная (рис. 115, б) и гексагональная плотноупакованная (рис. 115, в).

В них атомы находятся в устойчивом положении равновесия и обладают минимальной потенциальной энергией.

При деформации металла расстояния между атомами под действием внешних сил изменяются по определенным направлениям, линии и плоскости, проходящие через атомы, искривляются, кристаллическая решетка искажается. Так как при этом равнодействующие сил притяжения и отталкивания между атомами уже не равны нулю, то в решетке будут действовать внутренние силы, стремящиеся вернуть атомы в положение равновесия. Зависимость между малыми смещениями атомов и силами взаимодействия с известной степенью приближения можно считать линейной. Суммарно это проявляется в линейной зависимости между смещениями точек тела и внешними силами, выражаемой законом Гука. При устранении внешних сил атомы вновь занимают свои прежние места в кристаллической решетке, вследствие чего происходит упругое восстановление формы металлического тела. Так объясняется упругая деформация.

Если внешние силы увеличиваются, то возрастают и внутренние. Тогда в зернах металла происходит смещение одной части относительно другой, называемое *скольжением*. Исследованиями установлено, что оно происходит по плоскостям и направлениям, вдоль которых атомы располагаются наиболее плотно. В каждой из кристаллических решеток, изображенных на рис. 115, одна такая плоскость заштрихована, а направления скольжений указаны стрелками. Важной характеристикой этих плоскостей и направлений является величина сдвигающего напряжения  $\tau$ , вызывающего скольжение.

Рассмотрим механизм образования пластической деформации в пределах одного кристалла с совершенной кристаллической решеткой, упрощенная модель которой изображена на рис. 116, а.

Пусть в такой решетке верхний слой атомов относительно нижнего смещается по плоскости  $A-A$ . Если предположить, что в процессе сдвига кристаллическая решетка не искажается, т. е. в частях ее выше и ниже плоскости  $A-A$  расстояния между атомами остаются

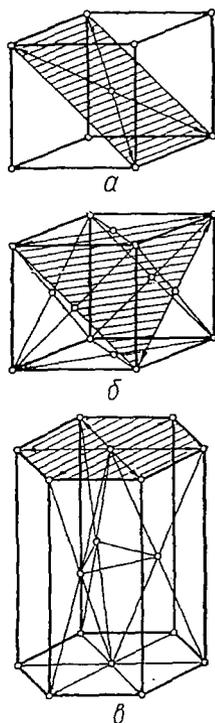


Рис. 115.

неизменными, то можно прийти к выводу, что все атомы верхнего слоя смещаются относительно нижнего одновременно и на одну и ту же величину.

Пока взаимное смещение  $u$  (рис. 116, б), возрастая, остается меньше половины расстояния между атомами  $\left(\frac{a}{2}\right)$ , силы взаимодействия между

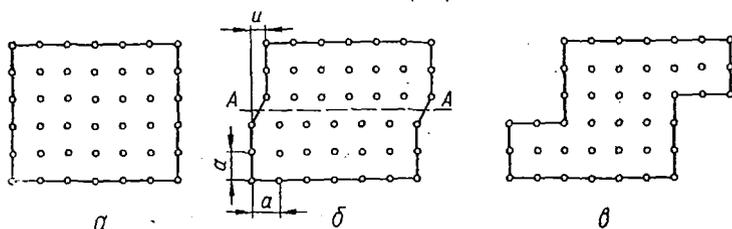
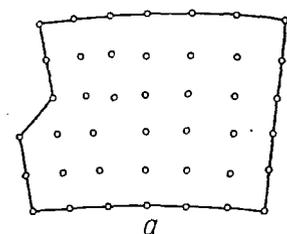


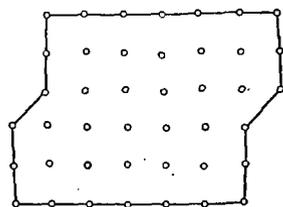
Рис. 116.

ними препятствуют сдвигу. Как только это смещение превысит расстояние  $\frac{a}{2}$ , силы взаимодействия начинают способствовать смещению

решетки в новое устойчивое положение равновесия. Пластическая деформация произойдет в результате смещения части решетки на расстояние, кратные  $a$  (рис. 116, в). Наименьшая пластическая деформация соответствует смещению на  $a$ . В результате таких смещений каждый предыдущий атом занимает место последующего, все атомы оказываются на местах, присущих данной кристаллической решетке. Кристалл сохраняет свои свойства, меняя лишь конфигурацию.



а



б

Рис. 117.

Точные теоретические расчеты, основанные на подобной картине деформации, позволяют определить максимальные касательные напряжения, которые должны возникнуть в кристалле, чтобы появилась пластическая деформация. В действительности она начинает образовываться при напряжениях, в сотни раз меньших, чем дает теория. Такое расхождение между теоретическим и действительным сопротивлением сдвигу в кристаллах объясняется тем, что переход атомов из одного положения в другое совершается не одновременно, а во времени, подобно волне, с местными искажениями решетки, называемыми *дислокациями*.

На рис. 117, а показана так называемая краевая дислокация. Верхняя часть решетки сдвинута относительно нижней на одно межатомное расстояние, причем зафиксировано положение, когда сдвиг охватил еще не всю плоскость скольжения. В результате появилось искажение решетки: одна вертикальная атомная плоскость верхней половины не имеет продолжения в нижней.

Отметим, что реальные кристаллы либо с самого своего возникновения содержат дислокации, либо имеют какие-то иные несовершенства и в них дислокации образуются уже при низких напряжениях сдвига.

Поэтому-то при низких напряжениях дислокации движутся через кристаллическую решетку, отчего и происходит пластическая деформация кристалла. После того как дислокация выйдет наружу кристалла, форма его изменится, но структура останется прежней (рис. 117, б). Возникают новые дислокации и движутся через кристалл. Суммарно результат этих скольжений в зернах проявляется в виде пластической деформации образца.

Перемещение дислокации через кристалл можно уподобить движению складки по коврау. Когда складка пройдет через весь ковер, он будет несколько сдвинут. Сила, необходимая для перемещения складки, существенно меньше той, которая нужна, чтобы сдвинуть весь ковер целиком.

Так теория дислокаций объясняет механизм образования пластических деформаций и расхождение между теоретической и действительной прочностью металлов.

При массовой пластической деформации дислокации, движущиеся в кристаллической решетке по пересекающимся плоскостям, образуют неподвижные пороги, поэтому перемещение дислокаций тормозится. Суммарно это проявляется в виде упрочнения металла после определенной пластической деформации.

Появление сдвигов в кристаллической решетке, приводящих к пластической деформации, не исключает искажений кристаллической решетки, соответствующих упругим деформациям. Это подтверждается тем, что при любой стадии деформации образца, вплоть до разрыва, полная деформация состоит из упругой и пластической.

Повышение сопротивления движению дислокаций приводит к увеличению прочности металла. Этого достигают введением в металлы специальных примесей, термической обработкой, наклепом и т. п. В настоящее время сделаны первые шаги по созданию металлов, не имеющих дефектов кристаллической решетки. Получены бездислокационные нитевидные металлические кристаллы («усы»), обладающие очень высокой прочностью, приближающейся к теоретической.

## § 32. ПОНЯТИЕ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что равномерное распределение напряжений по площади поперечного сечения растянутого или сжатого стержня, которое дает формула (4.6), будет только в тех случаях, когда по длине стержня поперечные сечения постоянны или изменяются весьма плавно. Резкие переходы площади поперечного сечения вследствие наличия поперечных отверстий, выкружек, канавок и надрезов приводят к неравномерному распределению напряжений, вызывают *концентрацию напряжений*. На рис. 118, а показан график распределения растягивающих напряжений в сечении полосы, ослабленном круглым отверстием, а на рис. 118, б — в сечении, ослабленном полукруглыми выкружками.

Отметим, что изображенная здесь и в дальнейшем картина концентрации напряжений несколько упрощена, но, в основном, верно отражает сущность происходящих явлений. Точные исследования показывают, что напряженное состояние в местах концентрации не является линейным, а носит более сложный характер.

Причина, вызвавшая концентрацию напряжений (отверстие, надрез и т. п.), называется *концентратором напряжений*. Максимального значения напряжения достигают в непосредственной близости от него (например у края отверстия или выкружки) и ограничиваются весьма небольшой частью площади поперечного сечения, т. е. имеют местный характер. Поэтому напряжения у мест концентрации и называют *местными*.

Остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность в случае концентрации напряжений.

**Номинальным напряжением** называют напряжение, вычисленное на основе предположений об отсутствии концентрации напряжений.

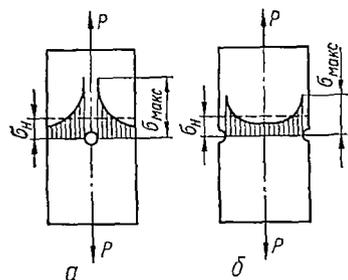


Рис. 118.

В рассмотренных примерах (рис. 118, а и б) номинальное напряжение вычисляется как среднее напряжение в ослабленном сечении пластины:

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{мин}}}, \quad (4.34)$$

где  $N$  — нормальная сила в ослабленном сечении;

$F_{\text{мин}}$  — площадь ослабленного сечения, называемая *площадью нетто*.

Иногда под номинальным напряжением понимают напряжение, вычисленное по площади  $F$  сплошного поперечного сечения без учета ее уменьшения за счет отверстия. Эту площадь называют *площадью поперечного сечения брутто*. Тогда

$$\sigma_n = \frac{N}{F}. \quad (4.35)$$

В случае весьма малого отверстия в полосе номинальные напряжения, вычисленные по формулам (4.34) и (4.35), будут практически одинаковы. В других случаях в величине напряжений может быть существенная разница.

Поэтому, используя понятие номинального напряжения, необходимо установить, на базе какого поперечного сечения оно вычислено.

**Теоретический коэффициент концентрации напряжений.** Количественной характеристикой концентрации напряжений является коэффициент концентрации  $\alpha$ , равный отношению наибольшего местного напряжения  $\sigma_{\text{макс}}$  к номинальному напряжению  $\sigma_n$ :

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_n}. \quad (4.36)$$

Коэффициенты концентрации напряжений чаще всего определяют методами теории упругости, основанными на предположении об однородности, изотропности и совершенной упругости материала. Эти коэффициенты называют теоретическими по следующим обстоятельствам.

Технические металлы могут считаться однородными и изотропными только в объемах, значительно превышающих объемы зерен. Упругие свойства многих металлов сохраняются только до определенного напряжения. Однако, как сказано выше, максимальные местные напряжения сосредоточены в небольших объемах материала и могут достигать значительной величины. Поэтому естественно, что наибольшие местные напряжения при концентрации, вычисленные по формулам теории упругости, более или менее отклоняются от истинных. Последние несколько меньше теоретических, так как происходит выравнивание напряжений между зернами металла.

Величина местных напряжений зависит от вида и размеров концентратора. Например, чем меньше радиус отверстия или выкружки в полосе, тем

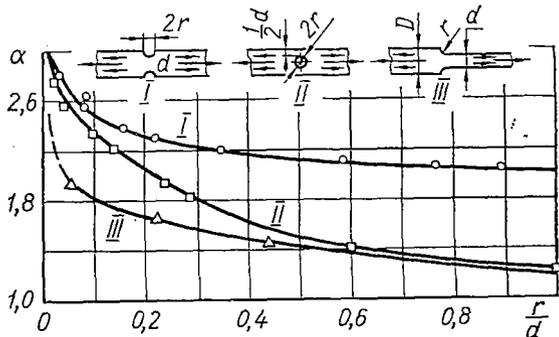


Рис. 119.

больше максимальные напряжения отличаются от номинальных. В случае весьма малого радиуса отверстия в полосе (рис. 118, а) у краев отверстия наибольшее напряжение равно трем номинальным ( $\alpha = 3$ ), а у краев полукруглых вырезов (рис. 118, б) — примерно двум номинальным ( $\alpha = 2$ ). Надрезы с острыми входящими углами дают еще более высокие коэффициенты концентрации напряжений у вершин углов. Для некоторых распространенных концентраторов напряжений в полосе прямоугольного поперечного сечения значения теоретических коэффициентов концентрации приведены на графике рис. 119, а в стержнях круглого поперечного сечения — в табл. 11. Более подробные данные о теоретических коэффициентах концентрации напряжений приводятся в справочниках по расчету на прочность и в специальных курсах<sup>1</sup>.

Определив расчетом номинальное напряжение и зная коэффициент концентрации напряжений для данного концентратора, находят максимальное напряжение в месте концентрации:

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_n. \quad (4.37)$$

С концентрацией напряжений приходится считаться при конструировании и расчете на прочность деталей машины. Следует по возмож-

<sup>1</sup> См., например, С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. И. Феодосьев. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II. М., Машгиз, 1956.

Таблица 11

Вид концентратора напряжения	$\alpha$
Полукруглая выточка при отношении радиуса к диаметру стержня	
0,1 . . . . .	2,0
0,5 . . . . .	1,6
1,0 . . . . .	1,2
2,0 . . . . .	1,1
Галтель при отношении радиуса галтели к диаметру стержня	
0,0625 . . . . .	1,75
0,125 . . . . .	1,50
0,25 . . . . .	1,20
0,5 . . . . .	1,10
Переход под прямым углом . . . . .	2,0
Острая V-образная выточка . . . . .	3,0
Отверстия при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня 0,1—0,33 . . . . .	2,0
Риски от резца на поверхности изделия . . . . .	1,2—1,4

ности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений, около которых возникает концентрация напряжений, способствующая в известных условиях преждевременному разрушению материала. Нужно также стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закаленных сталей. Даже мелкие следы шлифовального круга могут снизить предел прочности твердозакаленной стали при растяжении на 10—20%.

Влияние концентрации напряжений на прочность оценивается так называемым эффективным коэффициентом концентрации напряжений.

*Эффективный коэффициент концентрации  $k$*  определяют опытным путем как отношение предельной нагрузки образца без концентратора напряжений к предельной нагрузке такого же образца с концентратором напряжений. При статической нагрузке

$$k = \frac{P_I}{\bar{P}_{II}}, \quad (4.38)$$

где  $P_I$  — разрушающая нагрузка образца без концентратора напряжений;

$\bar{P}_{II}$  — разрушающая нагрузка образца с концентратором напряжений. Эффективный коэффициент концентрации в отличие от теоретического зависит не только от вида концентратора, но и от свойств материала.

На прочность пластичных и хрупких материалов концентрация напряжений влияет по-разному. Существенное значение при этом имеет также характер нагрузки. Если материал пластичный (диаграмма напряжений имеет площадку текучести значительной протяженности) и нагрузка статическая, то при увеличении последней рост наибольших местных напряжений приостанавливается, как только они достигнут предела текучести. В остальной части поперечного сечения напряжения будут еще возрастать до величины предела текучести  $\sigma_T$ , при этом зона пластичности у концентратора будет увеличиваться (рис. 120).

Таким образом, пластичность способствует выравниванию напряжений. На этом основании принято считать, что при статической нагрузке пластичные материалы мало чувствительны к концентрации напряжений. Эффективный коэффициент концентрации для таких материалов близок к единице.

При ударных и повторно-переменных нагрузках, когда деформации и напряжения быстро изменяются во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает и вредное влияние концентрации напряжений сохраняется. Поэтому в расчетах на прочность учитывать концентрацию напряжений необходимо.

Для однородного хрупкого материала неравномерность распределения напряжений из-за концентрации сохраняется на всех стадиях нагружения и при статических нагрузках. В местах действия максимальных напряжений начинается разрушение материала (путем образования трещин). Особенно чувствительна к концентраторам закаленная сталь и тем больше, чем выше ее характеристики прочности. Эффективный коэффициент концентрации напряжений для хрупких однородных материалов весьма близок к теоретическому. Следовательно, для хрупкого материала в расчетах на прочность при статических нагрузках можно пользоваться теоретическими коэффициентами концентрации напряжений.

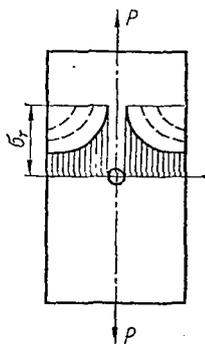


Рис. 120.

### § 33. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Механические характеристики материалов зависят от многих факторов. На свойства металлов и сплавов существенное влияние оказывают химический состав, технология их получения, термическая и механическая обработка, условия эксплуатации — температура, среда, характер нагрузки и др.

В последние годы получили развитие новые виды техники: реактивная авиация, ракетная техника, атомные реакторы и др. Применяемые в них материалы подвергаются действию высоких температур, высоких скоростей нагружения, агрессивных жидких и газообразных сред, радиоактивных, особенно нейтронных, проникающих облучений. Для работы в этих условиях создаются новые специальные сплавы и композиционные материалы.

Ниже рассматривается влияние некоторых факторов на механические характеристики наиболее важных в машиностроении материалов — сталей, чугуна, алюминия, различных сплавов.

**Влияние скорости деформации.** При увеличении скорости нарастания нагрузки и, следовательно, скорости роста напряжения и деформации, все материалы, находящиеся в пластическом состоянии, обнаруживают общую тенденцию к увеличению сопротивляемости деформированию. Чем выше скорость деформирования, тем выше предел

текучести и временное сопротивление. Особенно сильно зависят от скорости нагружения механические свойства пластмасс и других органических материалов. У металлов влияние скорости нагружения заметно проявляется лишь при значительной разнице в скоростях.

Сравнение результатов статических и динамических испытаний малоуглеродистых сталей на растяжение при нормальной температуре (рис. 121) показывает следующее:

1) кривая 1 динамического растяжения лежит выше кривой 2 статического растяжения;

2) максимум диаграммы для динамической нагрузки смещается в сторону начала диаграммы;

3) временное сопротивление при динамической нагрузке повышается, но меньше, чем предел текучести;

4) модуль упругости при динамической нагрузке практически не изменяется.

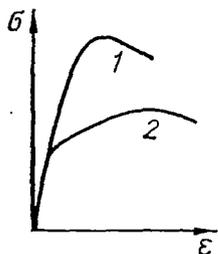


Рис. 121.

**Влияние технологических факторов.** Конструкционные стали, из которых изготавливают элементы конструкций, можно получить отливкой или прокаткой, ковкой, штамповкой и волочением. Механические свойства стали одного и того же состава весьма сильно изменяются в зависимости от способа ее получения и обработки.

При отливке заготовок возможно образование различных внутренних дефектов в виде пустот, раковин и включений, снижающих прочность изготовленных из заготовок деталей. В связи с этим требуется тщательный контроль качества таких деталей рентгеновским, ультразвуковым или каким-либо другим способом.

Прокатка делает сталь анизотропной. Прокатанная сталь имеет характерную структуру, у которой зерна, вытянутые в направлении прокатки, образуют своего рода волокна. Механические свойства стали в направлении прокатки существенно отличаются от таковых в направлении, перпендикулярном к ней. Образцы, вырезанные таким образом, что их ось совпадает с направлением прокатки, оказываются более прочными, чем те из них, ось которых перпендикулярна к направлению прокатки.

Предварительная вытяжка в холодном состоянии за предел текучести (наклеп) очень сильно повышает предел текучести и прочности, но снижает остаточное удлинение после разрыва. Материал становится более упругим и прочным, но менее пластичным.

Волочение в холодном состоянии, представляющее собой вытяжку с обжатием, еще сильнее влияет на механические свойства стали. Стальная проволока и стальные ленты, полученные волочением, весьма прочны.

Токарная обработка, обработка поверхности роликами, обдувка дробью, хромирование, никелирование, алитирование, азотирование и другие виды поверхностной обработки могут оказать существенное влияние на прочность деталей, особенно работающих при переменных напряжениях.

**Влияние термической обработки.** Закалка стали значительно повышает ее твердость, предел текучести и предел прочности, но сильно снижает пластичность. Модуль упругости стали закалка практически не меняет. Если нужна высокая поверхностная твердость с сохранением других свойств стали, используют поверхностную закалку токами вы́сокочастоты. Для малоуглеродистых сталей с этой целью применяют цементацию — увеличение в поверхностном слое углерода — с последующей закалкой. При этом закаливается только науглероженный поверхностный слой, а основная часть материала сохраняет свойства малоуглеродистой стали.

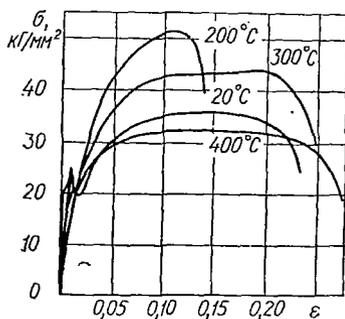


Рис. 122.

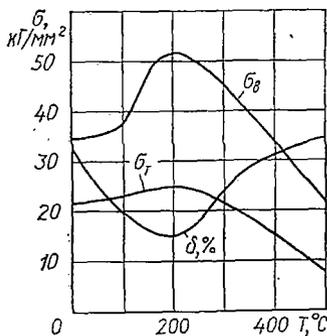


Рис. 123.

Для устранения наклепа используют отжиг. Чтобы выровнять и улучшить структуру, а также улучшить механические свойства стали, применяют нормализацию. Подробно эти виды термической обработки рассматриваются в металловедении.

**Влияние температуры.** Многие детали современных машин (например, паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и др.) работают при высоких температурах, достигающих 800—1000° С. Испытания показали, что все механические характеристики металлов существенно изменяются в зависимости от температуры.

На рис. 122 приведены диаграммы напряжения углеродистой стали при различных температурах, а на рис. 123 — графики зависимости предела текучести, временного сопротивления и относительного удлинения при разрыве от температуры. В интервале температур 150—250° С временное сопротивление достигает наибольшего значения, а относительное удлинение после разрыва — наименьшего; сталь, как говорят, становится синеломкой. При более высоких температурах прочность углеродистой стали быстро падает, поэтому выше 350—400° С такую сталь не применяют.

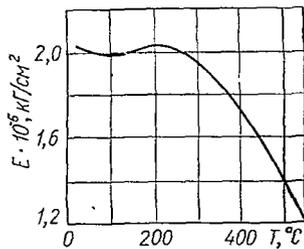


Рис. 124.

При повышении температуры также существенно уменьшается модуль упругости  $E$  (рис. 124), коэффициент Пуассона же несколько

возрастает. Так, при возрастании температуры от комнатной до  $500^{\circ}\text{C}$  коэффициент Пуассона увеличивается с 0,28 до 0,33.

Углеродистые стали при высоких температурах сильно окисляются, на их поверхности образуется окалина. В связи с этим применяют специальные жаростойкие и жаропрочные стали, содержащие различные легирующие добавки. *Жаростойкостью* называется свойство материала противостоять при высоких температурах химическому разрушению поверхности, а *жаропрочностью* — способность сохранять при высоких температурах механические свойства. В настоящее время созданы специальные сплавы, а также металлокерамические материалы, надежно работающие при температурах до  $1000^{\circ}\text{C}$ .

**Ползучесть.** При высоких температурах существенное значение имеет явление *ползучести* материалов (крип), заключающееся в росте пластической деформации с течением времени при постоянном напряжении, не вызывающем пластических деформаций при кратковременном действии нагрузки. В зависимости от величины напряжения и температуры деформация, происходящая в результате ползучести, может либо прекратиться, либо продолжаться до разрушения материала.

На рис. 125, *a* приведены кривые ползучести стали при постоянной температуре для различных напряжений  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$ , а на рис. 125, *б* — кривые ползучести при постоянном напряжении, но различных температурах, причем  $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$ . Как видно из сравнения графиков, увеличение напряжения при постоянной температуре и повышение температуры при постоянном

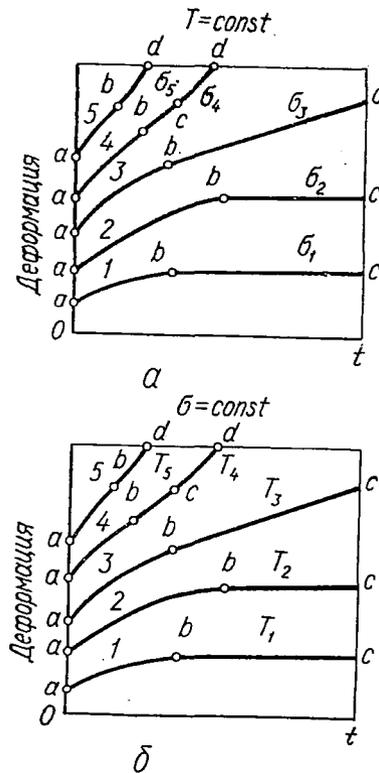


Рис. 125.

напряжении оказывают одинаковое влияние на ползучесть материала, а именно — скорость ползучести увеличивается.

Отдельные участки кривых рис. 125 характеризуют различные скорости нарастания деформации. Рассмотрим, например, кривую 4. Вертикальный отрезок *Oa* изображает удлинение, полученное тотчас после нагружения. Участок *ab* — это участок неустановившейся ползучести, так как скорость ее здесь со временем убывает. Прямолинейный участок *bc* называется участком установившейся ползучести, характеризующейся постоянной скоростью ее. Участок *cd* характеризует возрастание скорости ползучести, заканчивающееся разрушением образца (точка *d*).

Остальные кривые ползучести отличаются от кривой 4 тем, что у них отсутствует тот или иной участок. Так, кривые 1; 2 и 3

изображают случаи, когда ползучесть не вызывает разрушения (на них отсутствует участок  $cd$ ). Кривая  $b$  не имеет участка установившейся ползучести (точки  $b$  и  $c$  слились). Эта кривая соответствует случаю, когда период неустановившейся ползучести сменяется сразу периодом с возрастающей ее скоростью, который заканчивается разрушением. Граница между этими двумя периодами определяется точкой перегиба  $b$ .

*Пределом ползучести называется наибольшее напряжение, при котором скорость или деформация ползучести при данной температуре за определенный промежуток времени не превышает установленной величины* (например, скорости  $0,0001\%/ч$ , или деформации  $1\%$  за  $10000$  ч).

Если предел ползучести определяют по величине деформации, то обозначают его буквой  $\sigma$  с тремя числовыми индексами: двумя нижними и одним верхним. Первый нижний индекс отражает заданное удлинение (суммарное или остаточное), %; второй нижний индекс — заданную продолжительность времени испытания, ч; верхний индекс — температуру, °С. Например, запись  $\sigma_{0,2/100}^{700}$  означает предел ползучести при допуске на деформацию  $0,2\%$  за  $100$  ч испытания при температуре  $700^\circ\text{C}$ . При этом необходимо дополнительно указать, по суммарной или остаточной деформации определялся предел ползучести.

В случае определения предела ползучести по скорости ползучести его следует обозначать буквой  $\sigma$  с двумя числовыми индексами: одним верхним и одним нижним. Нижний индекс отражает заданную скорость ползучести,  $\%/ч$ ; верхний — температуру испытания, °С. Например,  $\sigma_{1 \cdot 10^{-5}}^{600}$  — это предел ползучести при скорости ее  $1 \cdot 10^{-5}\%/ч$  при температуре  $600^\circ\text{C}$ . При этом необходимо дополнительно указать время испытания, за которое была достигнута заданная скорость ползучести.

Детали, работающие при высоких температурах, рассчитывают на ползучесть специальными методами с использованием экспериментальных данных, характеризующих ползучесть материала. Целью таких расчетов является определение пределов ползучести.

По результатам экспериментального определения скорости ползучести  $V_0$  при растяжении образцов строят графики в логарифмических координатах  $\lg \sigma - \lg V_0$ . Экспериментальные точки хорошо группируются около некоторой прямой. На рис. 126,  $a$  такая прямая показана штриховой линией для стали 20 при температуре  $T = 500^\circ\text{C}$ .

Отметим, что у некоторых материалов (свинца, бетона, высокополимерных материалов и др.) ползучесть наблюдается и при нормальной температуре.

**Длительная прочность.** В случае высокой температуры и длительного воздействия нагрузки наблюдается разрушение материала при напряжении, величина которого меньше временного сопротивления материала при данной температуре. В связи с этим возникает необходимость определения длительной прочности материалов.

*Пределом длительной прочности называется напряжение, вызывающее разрыв образца после заданного срока непрерывного действия*

этого напряжения при определенной температуре. Обозначается предел длительной прочности буквой  $\sigma$  с двумя числовыми индексами. Верхний индекс дает температуру испытания,  $^{\circ}\text{C}$ , нижний — заданную продолжительность испытания до разрушения, ч. Последнюю можно обозначать числом часов или цифрой 10 с показателем степени. Например,  $\sigma_{10^3}^{700}$  или  $\sigma_{1000}^{700}$  — предел длительной прочности за 1000 ч испытания при температуре  $700^{\circ}\text{C}$ .

Испытания на длительную прочность заключаются в том, что образцы подвергают различным напряжениям при определенной температуре и узнают время до их разрыва. Результат представляют в виде графика (рис. 126, б). Имея кривую длительной прочности

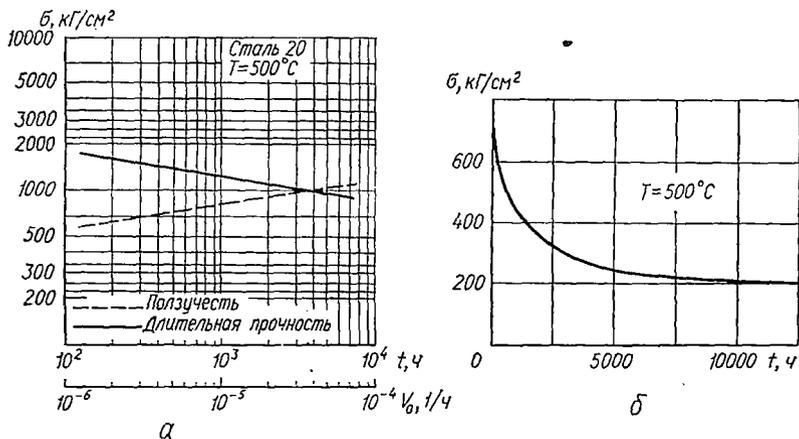


Рис. 126.

материала, можно определить разрушающее напряжение по заданной продолжительности службы детали при данной температуре. Наоборот, по заданному напряжению можно определить время до разрушения. Например, деталь, изготовленная из материала, для которого кривая длительной прочности изображена на рис. 126, б, при напряжении в  $300 \text{ кг/см}^2$  и температуре  $500^{\circ}\text{C}$  разрушится через 2550 ч.

Результаты экспериментального определения длительной прочности удобно представлять в логарифмических координатах  $\lg \sigma - \lg t$ , где они достаточно хорошо аппроксимируются прямыми. На рис. 126, а такая прямая изображена сплошной линией для стали 20 при температуре  $T = 500^{\circ}\text{C}$ .

Отметим, что чем меньше разрушающее напряжение, а значит, больше время до разрыва, тем меньше относительное удлинение при разрыве, т. е. материал становится более хрупким. Это явление называется *охрупчиванием*. Для ряда материалов (например для высокополимеров) указанный эффект проявляется и при комнатной температуре.

**Релаксацией напряжений** называется уменьшение их с течением времени вследствие ползучести в нагруженной детали при неизмен-

ной ее полной деформации. У большинства металлов релаксация заметна лишь при высоких температурах.

Типичная кривая релаксации напряжений изображена на рис. 127. Для иллюстрации этого явления приведем следующие примеры.

Между разведенными концами разрезанного стального кольца вставим пластинку (рис. 128). Вследствие деформации кольца в нем возникнут напряжения и концы кольца, стремясь сблизиться, с большой силой сожмут пластинку. Если это соединение выдержать некоторое

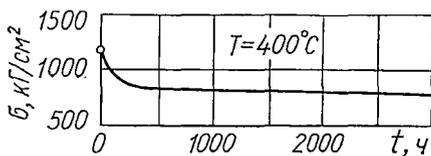


Рис. 127.

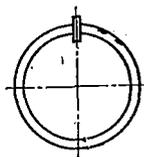


Рис. 128.

время при высокой температуре, то в кольце произойдет релаксация напряжений, сила зажатия пластинки уменьшится, и ее можно будет легко вынуть.

Известно, что начальная затяжка болтов, работающих при высокой температуре, с течением времени ослабевает и это вызывает необходимость подтягивать их.

**Влияние низких температур.** Существенное влияние на механические свойства некоторых материалов оказывают низкие температуры. Проявляется оно в том, что материалы, пластичные при нормальной температуре, становятся хрупкими при низких температурах. Такие материалы называются *хладноломкими*.

Хладноломкость характерна для металлов, имеющих кристаллическую решетку в виде объемноцентрированного куба или гексагональную. К числу их относится большинство черных металлов, в частности стали, а также цинковые сплавы.

Проявляется хладноломкость как при статическом действии нагрузки, так и, в особенности, при динамическом.

В качестве примера на рис. 129 приведены графики изменения величин предела текучести, временного сопротивления, относительного удлинения и сужения при статических испытаниях углеродистой стали в области низких температур.

Металлы, кристаллизующиеся в системе куба с центрированными гранями (медь, алюминий, никель, серебро, золото и др.), не обнаруживают хладноломкости ни при каком понижении температуры. Например, алюминий при температуре жидкого азота ( $-196^{\circ}\text{C}$ ) увеличивает прочность приблизительно в 2 раза, увеличивая одновременно относительное удлинение в 4 раза. Аналогично ведут себя медь и никель. Многие сплавы алюминия, меди, а также некоторые стали не обладают свойством хладноломкости.

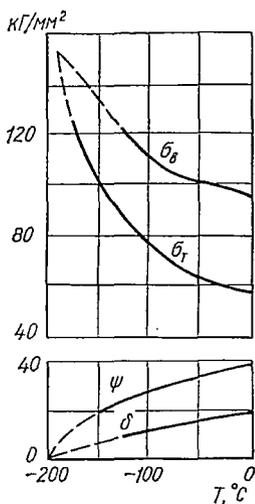


Рис. 129.

### § 34. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Как уже указывалось, детали машин и других конструкций должны удовлетворять условно прочности и жесткости. Размеры деталей необходимо подбирать такими, чтобы под действием приложенных нагрузок они не разрушались и не получали деформаций, превышающих допустимые. В большинстве машиностроительных деталей не допускаются, как правило, остаточные деформации.

Заметные остаточные деформации появляются в пластичных материалах, когда напряжения достигают предела текучести. Разрушение наступает, когда напряжения достигают величины временного сопротивления; при этом деформации хрупкого материала могут быть незначительными. Итак, для деталей, изготовленных из пластичного материала, опасным напряжением можно считать предел текучести, а для деталей из хрупкого материала — временное сопротивление.

Естественно, что эти напряжения не могут быть приняты в качестве допускаемых. Их следует уменьшить настолько, чтобы в эксплуатационных условиях действующие напряжения всегда были меньше предела упругости. Таким образом, допускаемое напряжение может быть определено по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (4.39)$$

где  $\sigma_0$  — опасное напряжение ( $\sigma_T$  или  $\sigma_B$ );

$n$  — коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз допускаемое напряжение меньше опасного.

Выбор величины коэффициента запаса прочности зависит от состояния материала (хрупкое или пластичное), характера приложения нагрузки (статическая, динамическая или повторно-переменная) и некоторых общих факторов, имеющих место в той или иной степени во всех случаях. К таким факторам относятся следующие:

- а) неоднородность материала, а следовательно, отличие его механических характеристик в малых образцах и в деталях;
- б) неточность задания величин внешних нагрузок;
- в) приближенность расчетных схем и некоторая приближенность расчетных формул.

Указанные факторы учитываются так называемым основным коэффициентом запаса прочности  $n_0$ .

Величина запаса прочности зависит от того, какое напряжение считать опасным.

Для пластичных материалов в случае статической нагрузки опасным напряжением, как уже сказано, следует считать предел текучести, т. е.  $\sigma_0 = \sigma_T$  и  $n_0 = n_T$ . Тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0} = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (4.40)$$

На основании данных длительной практики конструирования, расчета и эксплуатации машин и сооружений величина запаса прочности  $n_T$  для сталей при статической нагрузке принимается равной 1,4—1,6. Очевидно, меньшие значения  $n_T$  следует брать в тех случаях,

когда материал более однороден, лучше изучены его свойства, полнее учтены нагрузки, точнее метод расчета и расчетные схемы.

Для хрупких материалов при статических нагрузках опасным напряжением является временное сопротивление и тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_0} = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (4.41)$$

Принимают, что запас прочности  $n_B = 2,5 \div 3,0$ .

Допускаемые напряжения  $[\sigma]$ , получаемые по формулам (4.40) и (4.41), называют обычно *основными допускаемыми напряжениями*.

В связи с тем, что временное сопротивление определить проще, чем предел текучести, и, к тому же, в производственных условиях последний не всегда можно получить, иногда и для пластичных материалов при определении допускаемых напряжений исходят из временного сопротивления, пользуясь формулой

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (4.42)$$

В этом случае, учитывая, что временное сопротивление превышает предел текучести на 50—70%, запас прочности  $n_B$  для пластичных материалов принимают равным 2,4—2,6. Эту величину для пластичных материалов берут несколько меньшей, чем для хрупких, поскольку пластичные материалы, как правило, более однородны по своим физическим и механическим свойствам.

Иногда допускаемые напряжения на растяжение обозначают через  $[\sigma_+]$ , а на сжатие — через  $[\sigma_-]$ . Хрупкие материалы лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и для них  $[\sigma_-] > [\sigma_+]$ . Для сталей и большинства других пластичных материалов можно принять  $[\sigma_+] = [\sigma_-]$  и обозначать допускаемые напряжения в таком случае через  $[\sigma]$  без индекса.

Выбор величины допускаемых напряжений весьма важен, так как от правильного установления их значения зависит прочность и безопасность проектируемой конструкции, а также экономическая сторона расчета — количество затрачиваемого материала. Поэтому установлением величины допускаемых напряжений для основных марок материалов, применяемых в машиностроении и строительном деле, занимаются государственные нормирующие органы. Они издают соответствующие нормы, которыми и следует руководствоваться в обычных условиях проектирования. По мере улучшения качества материалов и уточнения методов расчета производят повышение допускаемых напряжений. Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений, принятых в настоящее время для наиболее распространенных материалов, приведены в приложении 10.

В тех же случаях, когда нет данных о допускаемых напряжениях для того или иного материала, вопрос об их величине приходится решать на основании изложенных выше соображений и рекомендаций.

Остановимся кратко на составлении условий прочности в наиболее часто встречающихся случаях.

В пластичных материалах при статической нагрузке концентрация напряжений незначительно влияет на прочность, поэтому в ка-

честве действующего рабочего напряжения можно принять среднее (номинальное) в опасном сечении и записать условие прочности следующим образом:

$$\sigma \leq [\sigma]. \quad (4.43)$$

В случае однородных хрупких материалов (например, закаленных сталей) при статической нагрузке необходимо учитывать концентрацию напряжений и расчет на прочность вести по наибольшим местным напряжениям. В этом случае условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_n \leq [\sigma]. \quad (4.44)$$

К вопросу о выборе величин допускаемых напряжений будем неоднократно возвращаться, рассматривая другие виды деформаций, а также при изучении различного характера приложения нагрузок и пр.

## Глава V

### РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

#### § 35. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Рассмотрим некоторые задачи на растяжение и сжатие.

1. Определим диаметр стержня постоянного поперечного сечения длиной  $l = 60 \text{ см}$  (рис. 130). Материал стержня — сталь Ст. 3, модуль упругости  $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Построим также эпюру  $\lambda$  перемещений сечений стержня и определим изменение его общей длины.

Прежде всего строим эпюру нормальных усилий. Из нее видно, что стержень имеет три участка, в крайних из которых действуют растягивающие усилия  $N_I = N_{III} = P = 1200 \text{ кг}$ , а в среднем — усилие сжатия  $N_{II} = 2P = 2400 \text{ кг}$ .

Так как проектируемый стержень должен быть постоянного поперечного сечения, то подбирать последний нужно по большему по абсолютной величине усилию, действующему в средней

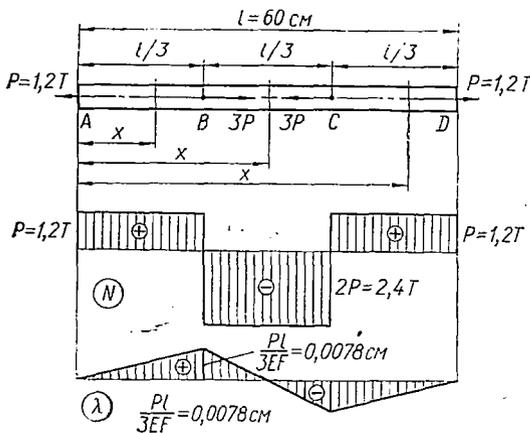


Рис. 130.

части. Выражение для напряжения в поперечных сечениях этого участка запишется следующим образом:

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F} = \frac{2P}{F}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{II} \leq [\sigma],$$

или

$$\frac{2P}{F} \leq [\sigma],$$

откуда

$$F \geq \frac{2P}{[\sigma]}.$$

Для стали марки Ст. 3 допустимое напряжение  $[\sigma]$  на растяжение и сжатие одинаково. При статической нагрузке его можно принять равным  $1600 \text{ кг/см}^2$  (см. приложение 10).

Подставляя числовые значения, получим площадь поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{2 \cdot 1200}{1600} = 1,5 \text{ см}^2$$

и диаметр его:

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} F} = 1,13 \sqrt{F} = 1,13 \sqrt{1,5} = 1,38 \text{ см}.$$

Диаметр необходимо увеличить до ближайшего большего, принятого согласно ГОСТу. Следует взять  $d = 14 \text{ мм}$  ( $F = 1,54 \text{ см}^2$ ).

Отметим, что расчет на прочность при сжатии является достаточным только для коротких стержней, в частности для стальных круглых, когда  $\frac{l}{d} < 20$ . При сжатии же длинных стержней может произойти потеря устойчивости<sup>1</sup>. В нашем случае указанное выше условие для сжатой части стержня выполняется.

Определим перемещения сечений стержня. Примем, например, за начало отсчета левый конец стержня (сечение  $A$ ), условно считая его неподвижным. Напомним, что перемещение любого сечения относительно начала отсчета равно изменению длины участка стержня между неподвижным и рассматриваемым сечениями.

На первом участке перемещение сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от левого конца стержня ( $0 \leq x \leq \frac{l}{3}$ ),

$$\lambda(x) = \frac{Px}{EF};$$

при  $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

<sup>1</sup> Расчеты сжатых стержней на устойчивость излагаются в гл. XIX.

при  $x = \frac{l}{3}$

$$\lambda_B = \frac{Pl/3}{EF} = \frac{1200 \cdot 60}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,54} = 0,0078 \text{ см.}$$

На втором участке  $\left(\frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}l\right)$  перемещение сечения  $x$

$$\lambda(x) = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \left(x - \frac{l}{3}\right)}{EF};$$

при  $x = \frac{l}{3}$

$$\lambda_B = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} = 0,0078 \text{ см;}$$

при  $x = \frac{2}{3}l$

$$\lambda_C = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \frac{l}{3}}{EF} = -0,0078 \text{ см.}$$

На третьем участке, где  $\frac{2}{3}l \leq x \leq l$ ,

$$\lambda(x) = + \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{P \frac{2}{3}l}{EF} + \frac{P \left(x - \frac{2}{3}l\right)}{EF};$$

при  $x = \frac{2}{3}l$

$$\lambda_C = - \frac{Pl}{3EF} = -0,0078 \text{ см;}$$

при  $x = l$

$$\lambda_D = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \frac{l}{3}}{EF} + \frac{P \frac{l}{3}}{EF} = 0.$$

Эпюра перемещений представлена на рис. 130.

В данном случае длина всего стержня не изменится, так как перемещение его правого конца относительно левого оказалось равным нулю.

2. Построим эпюры нормальных сил, нормальных напряжений, относительных деформаций и перемещений для ступенчатого стержня (рис. 131).

Стержень состоит из трех участков. В пределах первого из них в сечении, находящемся на расстоянии  $x$  от закрепленного конца ( $0 \leq x \leq l$ ), нормальная сила, нормальное напряжение и относительное удлинение не зависят от координаты  $x$ , т. е. от положения сечения, и имеют следующие значения:

$$N_I = 2P; \quad \sigma = \frac{2P}{1,5F} = \frac{4P}{3F}; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{4P}{3EF}.$$

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от закрепленного конца стержня,

$$\lambda(x) = \varepsilon x = \frac{4Px}{3EF}.$$

Следовательно, перемещения изменяются по линейному закону. В начальной и конечной точках участка они имеют следующие значения:

при  $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

при  $x = l$

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF}.$$

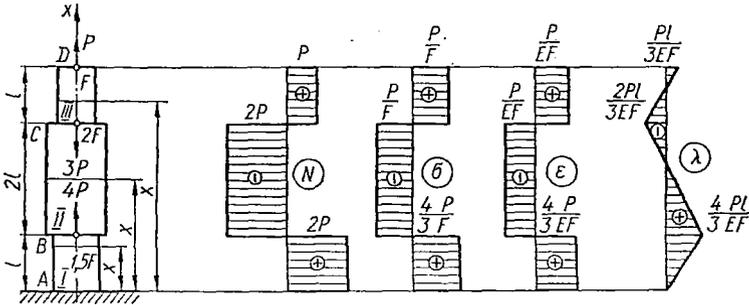


Рис. 131.

Аналогично на втором участке ( $l \leq x \leq 3l$ )

$$N_{II} = -2P; \quad \sigma = -\frac{2P}{2F} = -\frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{P}{EF}.$$

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от закрепленного конца стержня,

$$\lambda(x) = \frac{4Pl}{3EF} - \frac{P(x-l)}{EF}.$$

В начале второго участка, при  $x = l$ ,

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF},$$

в конце участка, при  $x = 3l$ ,

$$\lambda_C = -\frac{2Pl}{3EF}.$$

Знак минус указывает на то, что рассматриваемое сечение перемещается в направлении к сечению, принятому за начало отсчета.

На третьем участке ( $3l \leq x \leq 4l$ )

$$N = P; \quad \sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{P}{EF}.$$

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от конца  $A$

$$\lambda(x) = -\frac{2Pl}{3EF} + \frac{P(x-3l)}{EF}.$$

В начале третьего участка, при  $x = 3l$ ,

$$\lambda_C = -\frac{2Pl}{3EF}.$$

В конце третьего участка, при  $x = 4l$ ,

$$\lambda_D = \frac{Pl}{3EF}.$$

Эпюры  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$  и  $\lambda$  изображены на рис. 131. Эпюра  $\lambda$  позволяет определить изменение расстояния между любыми двумя сечениями стержня, следовательно, и изменение длины любого его участка.

Определим, например, изменение длины второго участка стержня. Для этого от перемещения сечения в конце участка (сечение  $C$ ) нужно вычесть перемещение сечения в начале участка (сечение  $B$ ). В результате получим:

$$\Delta l_{BC} = -\frac{2Pl}{3EF} - \frac{4Pl}{3EF} = -2\frac{Pl}{EF}.$$

Знак минус показывает, что длина рассмотренного участка уменьшилась.

3. Проверим прочность ступенчатого стержня круглого поперечного сечения (рис. 132). Материал стержня — закаленная высокоуглеродистая сталь с временным сопротивлением  $\sigma_n = 9000 \text{ кг/см}^2$ . Стержень растягивается силами  $P = 8000 \text{ кг}$ .

В связи с резким изменением поперечного сечения стержня возникает концентрация напряжений. Так как закаленная сталь чувствительна к ней, то проверку прочности нужно производить по наибольшим местным напряжениям. Чтобы найти эти напряжения, нужно знать коэффициент концентрации напряжений. Последний зависит от отношения радиуса галтели к меньшему диаметру стержня. В нашем случае  $\frac{r}{d} = \frac{5}{20} = 0,25$ . По табл. 11 (с. 108) теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha = 1,2$ .

Номинальное напряжение вычисляем по меньшей площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{мин}}} = \frac{8000}{\frac{\pi d^2}{4}} = 2550 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшие местные напряжения найдем на основании формулы (4.37):

$$\sigma_{\text{макс}} = \alpha \sigma_n = 1,2 \cdot 2550 = 3060 \text{ кг/см}^2.$$

Стержень будет иметь запас прочности

$$n_b = \frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} = \frac{9000}{3060} = 2,95.$$

Для хрупких материалов при статической нагрузке принимают, как уже отмечалось, коэффициент запаса прочности  $n_b = 2,5 \div 3$ . Коэффициент запаса прочности рассматриваемого стержня лежит в указанных пределах, т. е. стержень при данной нагрузке имеет достаточный запас прочности.

4. Определим размеры поперечных сечений стержней  $AB$  и  $BC$  кронштейна (рис. 133, а), предназначенного для крепления блока, при помощи которого будут подниматься грузы весом  $Q = 2000$  кг, а также

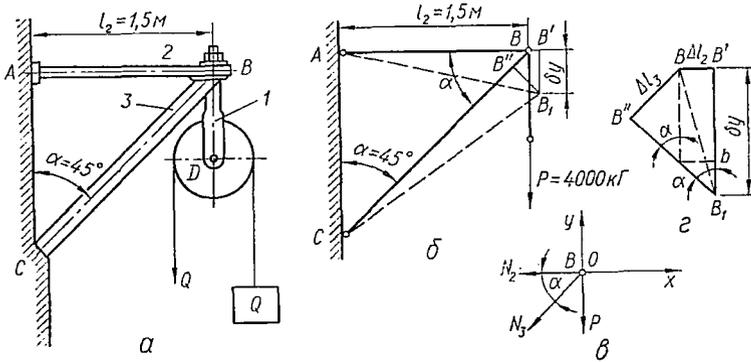


Рис. 133.

поперечное сечение подвески  $BD$  блока. Стержень  $AB$  и подвеска  $BD$  (в верхней части) имеют круглое поперечное сечение. Материал — сталь Ст.3. Стержень  $BC$  будет изготовлен из сосны и имеет квадратное поперечное сечение. Определим также вертикальное перемещение узла  $B$  кронштейна.

Конструкция кронштейна позволяет при расчете приближенно считать крепления стержней к стенке и соединение их между собой шарнирными. Расчетная схема кронштейна изображена на рис. 133, б.

Прежде всего определим усилие в подвеске блока и равную ему силу, действующую на узел  $B$ . Так как при подъеме груза  $Q$  ко второй ветви троса, переброшенного через блок, должна быть приложена сила, равная весу поднимаемого груза  $Q$  (если пренебречь трением), то в сечении подвески будет действовать усилие  $N_1 = 2Q = 4000$  кг. К узлу  $B$  кронштейна, следовательно, приложена сила  $P = N_1 = 4000$  кг.

Для стали Ст.3 допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma] = 1600$  кг/см<sup>2</sup>, для сосны допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma_-] = 120$  кг/см<sup>2</sup>. Модуль упругости для стали  $E_c = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, для сосны  $E_d = 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

Найдем необходимую площадь поперечного сечения подвески  $BD$ . Нормальное напряжение в подвеске определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1}.$$

Запишем условие прочности

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma],$$

откуда необходимая площадь поперечного сечения подвески

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{4000}{1600} = 2,5 \text{ см}^2.$$

Определяем диаметр подвески:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} \geq 1,13 \sqrt{2,5} = 1,78 \text{ см} = 17,8 \text{ мм}.$$

Примем ближайший больший стандартный диаметр  $d = 18 \text{ мм}$  ( $F = 2,54 \text{ см}^2$ ).

Так как предполагается, что стержни прикреплены к стене и соединены между собой шарнирами, а нагрузка приложена в узле (к шарниру), то стержни будут испытывать только продольные (растягивающие или сжимающие) усилия. Чтобы определить их, рассмотрим равновесие узла  $B$  (рис. 133,  $\theta$ ), к которому приложены вертикальная нагрузка  $P$  и две неизвестные силы  $N_2$  и  $N_3$ , действующие соответственно со стороны стержней  $AB$  и  $BC$  и направленные вдоль их осей.

При определении неизвестных усилий в стержнях обычно принято считать их растянутыми и соответственно этому направлять векторы сил от узла. Знак плюс в решении для усилия будет подтверждать правильность сделанного предположения о направлении усилия, а знак минус укажет на то, что в действительности усилие направлено противоположно и соответствующий стержень сжат. Полагая оба стержня растянутыми, следует усилия  $N_2$  и  $N_3$  направить так, как показано на рис. 133,  $\theta$ .

Для равновесия узла  $B$  в плоскости достаточно, чтобы сумма проекций всех сил, приложенных к узлу, на координатные оси  $x$  и  $y$  равнялась нулю. Направим координатные оси, как показано на рис. 133,  $\theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_2 - N_3 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y &= -P - N_3 \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} N_3 &= -\frac{P}{\sin \alpha} = -\frac{4000 \cdot 2}{\sqrt{2}} = -5660 \text{ кг}; \\ N_2 &= -N_3 \cos \alpha = \left(\frac{4000 \cdot 2}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = 4000 \text{ кг}, \end{aligned}$$

т. е. стержень  $AB$  растянут, а стержень  $BC$  сжат.

Из условия прочности стержня  $AB$

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} \leq [\sigma]$$

определяем необходимую площадь его поперечного сечения:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{4000}{1600} = 2,5 \text{ см}^2.$$

В данном случае она оказалась равной площади поперечного сечения подвески. Следовательно, диаметр стержня  $AB$  должен быть равен диаметру подвески, т. е.  $d = 18 \text{ мм}$ .

Необходимая площадь поперечного сечения деревянного стержня  $BC$

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{5660}{120} = 47 \text{ см}^2.$$

Сторона квадрата поперечного сечения

$$a = \sqrt{47} = 6,85 \text{ см}.$$

Округляя до ближайшего целого числа, принимаем  $a = 70 \text{ мм}$  ( $F = 49 \text{ см}^2$ ).

Определим вертикальное перемещение шарнира  $B$  кронштейна. Стержень  $AB$  удлинится на величину

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_c F_2} = \frac{4000 \cdot 150}{2 \cdot 10^6 \cdot 2,54} = 0,118 \text{ см}.$$

Стержень  $BC$  укоротится на величину

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_d F_3} = \frac{5660 \cdot 150 \sqrt{2}}{10^5 \cdot 49} = 0,245 \text{ см}.$$

Учитывая, что деформации малы, перемещения узла  $B$  можно определить следующим образом. Предположим, что стержни в шарнире  $B$  разъединены. От точки  $B$  направо, в направлении стержня  $AB$ , отложим его удлинение  $BB'$ , а в направлении  $BC$  — укорочение  $BB''$  стержня  $BC$  (рис. 133, б, з). На рис. 133, з это показано в масштабе, значительно большем, чем масштаб длины стержней на схеме конструкции. Положение шарнира  $B$  после деформации совпадет с точкой пересечения дуг, описанных из точек  $A$  и  $C$  радиусами, равными новым длинам  $AB'$  и  $CB''$  стержней. Вследствие малости деформаций стержней дуги можно заменить перпендикулярами, восстановленными в точках  $B'$  и  $B''$  к направлениям  $AB$  и  $BC$ . Точка  $B_1$  пересечения перпендикуляров определит новое положение узла  $B$  после деформации кронштейна. Отрезок  $BB_1$  изобразит полное перемещение узла  $B$ , а отрезок  $B'B_1 = \delta_y$  — вертикальную составляющую этого перемещения.

Приведенное здесь построение дает возможность легко установить аналитическую зависимость между перемещениями точки и удлинениями стержней. Вертикальное перемещение узла  $B$  (рис. 133, з)

$$\delta_y = \overline{B'B_1} = \overline{B_1b} + \overline{bB'} = \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin \alpha}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\delta_y = 0,118 + \frac{0,245 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 0,46 \text{ см}.$$

**Пример 12.** Определить наибольшую величину груза  $Q$ , который может быть безопасно подвешен к узлу  $B$  стержневой подвески (рис. 134). Стержни подвески изготовлены из стали Ст. 2, для которой допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ . Диаметр стержней  $d = 2 \text{ см}$ .

Наибольшее безопасное нормальное усилие, которое можно допустить в каждом стержне подвески,

$$N = [\sigma] F = 1400 \frac{\pi d^2}{4} = 4400 \text{ кг.} \quad (1)$$

Наибольшую допускаемую величину груза  $Q$  найдем, рассматривая равновесие узла  $B$ . Приравняем нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на узел  $B$ :

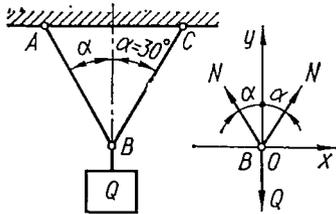


Рис. 134.

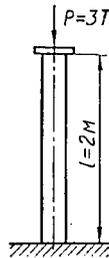


Рис. 135.

$$\Sigma Y = -Q + 2N \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$Q = 2N \cos \alpha = 2 \cdot 4400 \cdot 0,866 = 7620 \text{ кг.}$$

**Пример 13.** Определить, какой должна быть площадь поперечного сечения деревянной колонны из сосны с модулем упругости (см. приложение 9)  $E = 10^9 \text{ кг/см}^2$  (рис. 135), чтобы опускание верхнего конца колонны не превышало  $[\Delta l] = 0,2 \text{ см}$ .

Для определения площади колонны запишем условие жесткости:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \leq [\Delta l],$$

где  $N = P$ .

Отсюда

$$F \geq \frac{Nl}{E[\Delta l]}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$F = \frac{3000 \cdot 200}{10^9 \cdot 0,2} = 30 \text{ см}^2.$$

Проверим, будет ли выполняться условие прочности при данной площади поперечного сечения. Допускаемое напряжение на сжатие для сосны  $[\sigma_-] = 120 \text{ кг/см}^2$  (см. приложение 10). Напряжение, вызванное силой  $N$ ,

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{3000}{30} = 100 \text{ кг/см}^2 \leq [\sigma_-] = 120 \text{ кг/см}^2.$$

Условие прочности выполняется.

## § 36. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА И СИЛ ИНЕРЦИИ

Собственный вес материала элементов конструкций, а также силы инерции движущихся частей машин и механизмов являются внешними нагрузками, распределенными по объему. Ниже рассмотрены некоторые задачи определения напряжений и перемещений при действии таких нагрузок.

**Учет собственного веса.** В машиностроении, как правило, влияние собственного веса не учитывается, так как машиностроительные детали имеют сравнительно небольшие размеры, при которых влияние соб-

ственного веса невелико. Однако в ряде инженерных конструкций собственный вес — это одна из основных нагрузок. В случае расчета канатов шахтных подъемников, штанг бурильных устройств, устоев мостов, стен зданий, плотин влияние собственного веса учитывать необходимо.

Предположим, что прямой стержень постоянного поперечного сечения большой длины закреплен верхним концом и нагружен на свободном конце силой  $P$  (рис. 136, а). Определим закон изменения

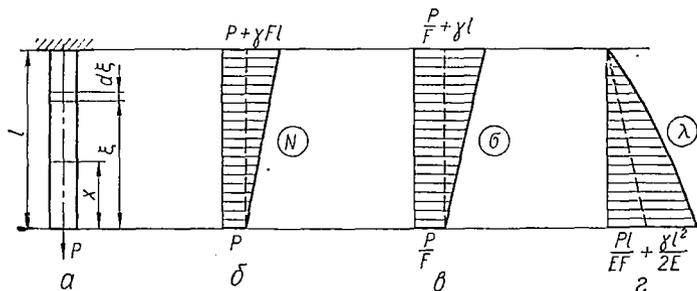


Рис. 136.

нормальных усилий и напряжений в поперечных сечениях стержня, а также перемещения сечений по длине стержня, учитывая влияние собственного веса.

В сечении стержня, находящемся на расстоянии  $x$  от свободного конца, нормальная сила

$$N(x) = P + \gamma Fx, \quad (5.1)$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема материала.

Наибольшего значения нормальная сила достигает в верхнем закреплённом сечении:

$$N_{\text{макс}} = P + \gamma Fl. \quad (5.2)$$

Эпюра нормальных усилий изображена на рис. 136, б.

Нормальное напряжение в сечении стержня на расстоянии  $x$  от свободного конца получим, разделив усилие  $N(x)$  на площадь сечения:

$$\sigma = \frac{N(x)}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \quad (5.3)$$

Наибольшего значения нормальное напряжение достигает в верхнем закреплённом сечении, которое в этом случае будет опасным:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (5.4)$$

В этой формуле первое слагаемое представляет собой напряжение от силы  $P$ , второе — от собственного веса. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 136, в.

Условие прочности для опасного сечения запишется следующим образом:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (5.5)$$

Из выражения (5.5) получим формулу для подбора площади  $F$  поперечного сечения стержня при расчете на прочность с учетом влияния собственного веса, а именно:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (5.6)$$

Если нагрузка на конце стержня отсутствует, т. е.  $P = 0$ , то напряжение в опасном сечении, вызванное только собственным весом, согласно выражению (5.4)

$$\sigma_{\text{макс}} = \gamma l. \quad (5.7)$$

Условие прочности принимает следующий вид:

$$\gamma l \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

Отсюда можно определить длину стержня, при которой напряжение только от собственного веса достигает допускаемого и стержень не может нести полезной нагрузки. Эту предельную допустимую длину найдем из условия (5.8), сохранив в нем знак равенства:

$$l_{\text{пр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (5.9)$$

От собственного веса может произойти разрыв стержня. Это будет в случае, когда  $\sigma_{\text{макс}}$  в выражении (5.7) достигнет величины временного сопротивления. Длина стержня, при которой он разрывается от собственного веса, называется *критической*. Ее получим из формулы (5.9), заменив допускаемое напряжение временным сопротивлением материала:

$$l_{\text{к}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\gamma}. \quad (5.10)$$

Предельная и критическая длины не зависят от площади поперечного сечения стержня.

Подсчитаем, например, критическую длину для стали марки Ст. 2, у которой  $\sigma_{\text{в}} = 3600 \text{ кг/см}^2$ . Вес единицы объема стали

$$\gamma = 7,85 \text{ Г/см}^3 = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3.$$

Подставляя в формулу (5.10) числовые значения, получим:

$$l_{\text{к}} = \frac{3600}{7,85 \cdot 10^{-3}} = 458\,000 \text{ см} \approx 4,6 \text{ км}.$$

В рассматриваемом стержне (рис. 136, а) определим перемещение сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от свободного конца. Перемещение равно удлинению части стержня, расположенной выше этого сечения.

В сечении стержня, находящемся на расстоянии  $\xi$  от свободного конца (рис. 136, а), будем иметь:  $N(\xi) = P + \gamma F\xi$ . По формуле (4.9) при  $F = \text{const}$  находим:

$$\lambda(x) = \int_x^l \frac{N(\xi) d\xi}{EF} = \int_x^l \frac{(P + \gamma F\xi) d\xi}{EF} = \frac{P(l-x)}{EF} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2). \quad (5.11)$$

Удлинение  $\Delta l$  стержня (или равное ему перемещение  $\lambda$  нижнего конца стержня) получим из выражения (5.11), положив  $x = 0$ :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (5.12)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой удлинение стержня от силы  $P$ , второе — от собственного веса.

Учитывая, что полный вес стержня  $Q = \gamma Fl$ , вместо выражения (5.12) будем иметь

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \quad (5.13)$$

Таким образом, абсолютное удлинение стержня от собственного веса такое же, как удлинение от сосредоточенной силы, равной весу стержня и приложенной в его центре тяжести. Эпюра перемещений сечений изображена на рис. 136, з.

Стержень равного сопротивления растяжению (сжатию). При расчете на прочность стержня постоянного сечения с учетом собственного веса во всех сечениях стержня, кроме опасного, напряжения оказываются ниже допустимого, т. е. материал недогружен (см., например, рис. 136, в). Однако можно спроектировать стержень такого переменного сечения, у которого во всех поперечных сечениях напряжения будут одинаковыми и равными допустимому. Такой стержень называется *стержнем равного сопротивления* растяжению или сжатию. Установим закон изменения площади его поперечного сечения.

Пусть стержень сжимается силой  $P$  (рис. 137). Необходимая площадь верхнего сечения

$$F_0 = \frac{P}{[\sigma]}. \quad (5.14)$$

Площадь поперечного сечения на расстоянии  $x$  от верхнего конца стержня обозначим через  $F(x)$ , а вес части стержня длиной  $x$  — через  $Q(x)$ . По условию напряжение в этом сечении должно равняться допустимому. Уравнение равновесия части стержня длиной  $x$  запишется так:

$$P + Q(x) = [\sigma] F(x). \quad (5.15)$$

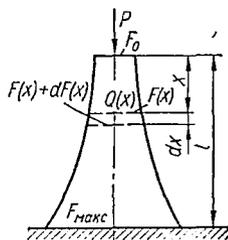


Рис. 137.

Перейдем к следующему сечению, отстоящему от первого на расстоянии  $dx$ . Площадь этого сечения будет  $F(x) + dF(x)$ , а вес части бруса, расположенной выше сечения, составит  $Q(x) + \gamma F(x) dx$ . В этом сечении напряжение также должно быть равно допусжаемому. Условие равновесия части бруса длиной  $x + dx$  запишется следующим образом:

$$P + Q(x) + \gamma F(x) dx = [\sigma] [F(x) + dF(x)]. \quad (5.16)$$

Вычитая выражение (5.15) из выражения (5.16), получаем:

$$\gamma F(x) dx = [\sigma] dF(x), \quad (5.17)$$

или, разделяя переменные:

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma dx}{[\sigma]}.$$

Принтегрировав это выражение, найдем:

$$\ln F(x) = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C.$$

Отсюда

$$F(x) = e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]} + C}. \quad (5.18)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия, что при  $x = 0$   $F(x) = F_0$ . Тогда из формулы (5.18) получим:

$$F_0 = e^C.$$

Подставляя в формулу (5.18) значение  $e^C = F_0$ , найдем закон изменения площади поперечного сечения стержня равного сопротивления:

$$\boxed{F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}}. \quad (5.19)$$

Наибольшая площадь в месте закрепления ( $x = l$ )

$$F_{\text{макс}} = F_0 e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}},$$

или с учетом выражения (5.14):

$$F_{\text{макс}} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}. \quad (5.20)$$

Найдем полный вес  $Q$  бруса равного сопротивления. Проще всего сделать это, исходя из условия равновесия всего бруса:

$$P + Q = [\sigma] F_{\text{макс}}.$$

Отсюда

$$Q = [\sigma] F_{\text{макс}} - P.$$

Учитывая формулу (5.20), получим:

$$Q = P \left( e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right).$$

Легко определить и укорочение стержня. Так как во всех поперечных сечениях напряжения постоянны и равны допускаемому, то и относительная деформация  $\epsilon$  по длине стержня равного сопротивления постоянна и равна  $\frac{[\sigma]}{E}$ . Абсолютное укорочение стержня

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l. \quad (5.21)$$

**Ступенчатый стержень.** Стержень, состоящий из отдельных участков (ступенек) с постоянной площадью поперечного сечения в пределах каждого участка, занимает промежуточное место между стержнем постоянного поперечного сечения и стержнем равного сопротивления. В ступенчатом стержне материал используется лучше, чем в стержне постоянного сечения, но менее эффективно, чем в стержне равного сопротивления. Последнее полностью окупается простотой изготовления ступенчатого стержня. Поэтому такие стержни имеют большее распространение, чем стержни равного сопротивления. В виде ступенчатых стержней иногда изготавливают опоры мостов.

Ступенчатые стержни следует проектировать так, чтобы в опасном сечении, находящемся в конце каждой ступеньки, напряжения равнялись допускаемому. Очевидно, при этом во всех других сечениях напряжения будут меньше допускаемого.

Составим формулы для подбора площади поперечного сечения каждой ступеньки (рис. 138).

Площадь поперечного сечения первой ступеньки найдем по формуле (5.6):

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}. \quad (5.22)$$

К нижнему концу второй ступеньки приложена сила, равная  $F_1 [\sigma]$ . Тогда, аналогично,

$$F_2 = \frac{F_1 [\sigma]}{[\sigma] - \gamma l_2}. \quad (5.23)$$

Учитывая формулу (5.22), получим:

$$F_2 = \frac{P [\sigma]}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2)}. \quad (5.24)$$

К нижнему концу третьей ступеньки приложена сила, равная  $F_2 [\sigma]$ . Для площади поперечного сечения третьей ступеньки формула запишется следующим образом:

$$F_3 = \frac{F_2 [\sigma]}{[\sigma] - \gamma l_3}.$$

Подставляя значение  $F_2$  из формулы (5.24), получим:

$$F_3 = \frac{P [\sigma]^2}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) ([\sigma] - \gamma l_3)}. \quad (5.25)$$

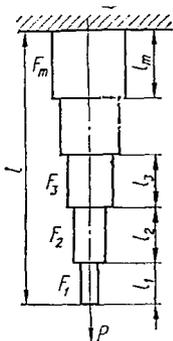


Рис. 138.

Очевидно, для площади поперечного сечения  $n$ -й ступеньки формула будет иметь следующий вид:

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) ([\sigma] - \gamma l_3) \cdots ([\sigma] - \gamma l_n)}.$$

Если длины всех ступенек одинаковы, то

$$l_1 = l_2 = l_3 = \cdots = l_n = \cdots = l_m = \frac{l}{m}, \quad (5.26)$$

где  $m$  — число ступенек в брус;

$l$  — общая длина бруса.

Тогда

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \gamma \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{l}{m}\right)^n}. \quad (5.27)$$

**Учет сил инерции.** Под силой инерции для некоторой движущейся материальной точки понимают силу, равную по величине произведению массы точки на ее ускорение. Направлена сила инерции в сторону, обратную ускорению. В реальном теле, которое можно рассматривать как совокупность материальных точек, силы инерции распределены по объему тела. Они складываются с другими нагрузками и оказывают влияние на величину возникающих в нем напряжений и деформаций. Часто силы инерции являются основными нагрузками на движущиеся детали.

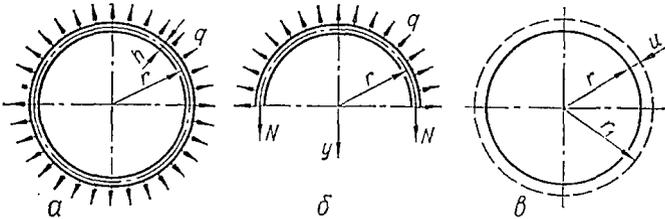


Рис. 139.

При решении задач с учетом сил инерции пользуются принципом Даламбера, который состоит в том, что уравнениям движения точки (или системы точек) можно придать вид уравнений равновесия, если к действующим заданным силам и динамическим реакциям связей присоединить силы инерции.

Определение напряжений и деформаций при действии сил инерции рассмотрим на примере расчета тонкого ( $h < \frac{r}{20}$ ) кольца (рис. 139, а), свободно вращающегося вокруг центральной оси.

Пусть угловая скорость вращения кольца

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \frac{1}{\text{сек}},$$

где  $n$  — число оборотов в минуту.

Для тонкого кольца можно считать, что все точки кольца находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, равном радиусу  $r$ . Так как центростремительное ускорение направлено к оси вращения, то силы инерции направлены от нее.

На элемент кольца длиной, равной единице, действует сила инерции в виде центробежной силы, величина которой (интенсивность)

$$q = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r, \quad (5.28)$$

где  $r$  — радиус осевой линии кольца;

$F$  — площадь поперечного сечения;

$\gamma$  — вес единицы объема материала.

Таким образом, действие на кольцо центробежных сил аналогично действию равномерного внутреннего давления интенсивностью  $q$ . Вследствие круговой симметрии системы и нагрузки в поперечных сечениях изгибающие моменты и поперечные силы во всех сечениях равны нулю.

Для определения нормальных усилий  $N$ , действующих в поперечных (радиальных) сечениях кольца, рассмотрим равновесие половины кольца (рис. 139, б). На половину кольца действуют две силы  $N$ , приложенные в проведенных сечениях, и силы инерции интенсивностью  $q$ .

Согласно теореме, доказанной в § 23, равнодействующая распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  равна произведению  $q$  на диаметр, перпендикулярна к диаметру и действует по оси, проходящей через его середину, т. е. по оси  $y$ . Условие равновесия половины кольца при проектировании сил на ось  $y$  запишется следующим образом:

$$2N - q2r = 0,$$

откуда

$$N = qr. \quad (5.29)$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении кольца

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{qr}{F}. \quad (5.30)$$

Подставляя значение  $q$  согласно формуле (5.28), получим:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (5.31)$$

или

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 r^2. \quad (5.32)$$

Напряжение в кольце можно выразить через его окружную скорость  $v$ . Учитывая, что  $v = \omega r$ , из выражения (5.31) будем иметь

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (5.33)$$

Формулами (5.31) и (5.33) можно пользоваться для приближенного (если пренебречь влиянием спиц) определения напряжения в ободе маховика.

Напряжение не зависит от площади поперечного сечения кольца. Из условия прочности

$$\frac{\gamma}{g} v^2 \leq [\sigma] \quad (5.34)$$

определяем допускаемую величину окружной скорости:

$$v \leq \sqrt{\frac{[\sigma] g}{\gamma}}. \quad (5.35)$$

Относительное удлинение по окружности кольца в соответствии с законом Гука и с учетом выражения (5.31)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{gE} \omega^2 r^2. \quad (5.36)$$

Рассматривая геометрическую сторону деформации (рис. 139, в), убедимся в том, что относительное удлинение по окружности кольца равно относительному удлинению радиуса, а именно:

$$\epsilon = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}. \quad (5.37)$$

Найдем радиальные перемещения  $u$  точек оси кольца. На основании формул (5.37) и (5.36)

$$u = \epsilon r = \frac{\gamma}{gE} \omega^2 r^3. \quad (5.38)$$

### § 37. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ КОНСТРУКЦИИ

*Статически неопределимыми конструкциями* называются такие конструкции, в элементах которых при помощи только одних уравнений статики определить усилия невозможно. Кроме уравнений статики, для расчета таких систем (конструкций) необходимо использовать также уравнения, содержащие деформации элементов конструкций.

Схемы некоторых статически неопределимых конструкций изображены на рис. 140: *а* — стержневой подвески; *б* — стержня, закрепленного обоими концами; *в* — стержневого кронштейна; *г* — ссоставного кольца; *д* — железобетонной колонны, состоящей из бетона с включенной в него арматурой (стальными стержнями); *е* — шарнирно-стержневой системы.

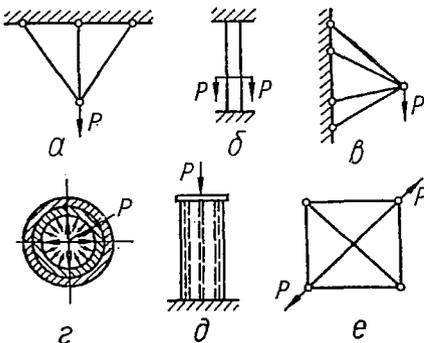


Рис. 140.

Все статически неопределимые конструкции имеют дополнительные, или, так называемые, «лишние», связи в виде закреплений, стержней либо других элементов. Лишними такие связи называются только потому, что они не являются необходимыми для обеспечения равно-

весия конструкции и ее геометрической неизменяемости, хотя постановка их диктуется условиями эксплуатации. По условиям прочности и жесткости конструкции лишние связи могут оказаться необходимыми.

В статически неопределимых конструкциях число неизвестных, подлежащих определению, больше, чем число уравнений статики, которые могут быть для этой цели использованы. Разница между числом неизвестных и числом уравнений статики определяет число лишних неизвестных, или степень статической неопределимости конструкции. При одной лишней неизвестной конструкция называется один раз статически неопределимой, при двух — дважды статически неопределимой и т. д. Конструкции, изображенные на рис. 140, а, б, г, д, е, имеющие по одной дополнительной связи, являются один раз статически неопределимыми, а конструкция, представленная на рис. 140, в, имеющая две лишние связи, — дважды статически неопределимой.

#### Решение статически неопределимых задач.

Статически неопределимые конструкции, элементы которых работают на растяжение и сжатие, будем рассчитывать, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи. При этом будем придерживаться следующего порядка.

1. Статическая сторона задачи. Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия.

2. Геометрическая сторона задачи. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между деформациями или перемещениями отдельных элементов конструкции. Полученные уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

3. Физическая сторона задачи. На основании закона Гука выражаем деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные усилия. В случае изменения температуры к деформациям, вызванным усилиями, добавляются температурные деформации.

4. Синтез. Решая совместно статические, геометрические и физические уравнения, находим неизвестные усилия.

Рассмотрим примеры расчета некоторых простейших статически неопределимых конструкций.

1. Пусть к стержню, закрепленному обоими концами, приложена осевая сила  $P$  (рис. 141, а). Определим усилия, возникающие в нижней и верхней частях стержня.

Статическая сторона задачи. Поскольку сила  $P$  действует вдоль оси стержня, на концах его могут возникнуть только вертикальные составляющие реакций ( $R_A$  и  $R_B$ ). Направим их произвольно — так, как показано на рис. 141, а.

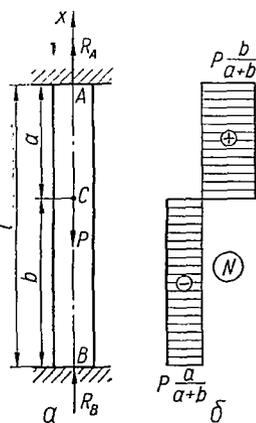


Рис. 141.

Для системы сил, действующих по прямой линии, можно составить лишь одно уравнение равновесия:

$$\sum X = R_A + R_B - P = 0. \quad (5.39)$$

Геометрическая сторона задачи. Так как концы стержня жестко закреплены, то его общая длина не изменяется. Следовательно,

$$\Delta l = 0. \quad (5.40)$$

Физическая сторона задачи. В поперечных сечениях верхней части стержня действуют усилия  $N_{AC} = R_A$ , а в поперечных сечениях нижней — усилия  $N_{BC} = -R_B$ . Используя закон Гука, выразим деформации через эти усилия:

$$\Delta l = \frac{N_{AC}a}{EF} + \frac{N_{BC}b}{EF} = \frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF}. \quad (5.41)$$

Синтез. Подставляя выражение (5.41) в уравнение (5.40), получим:

$$\frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF} = 0,$$

или после сокращения на  $EF$ :

$$R_A a = R_B b. \quad (5.42)$$

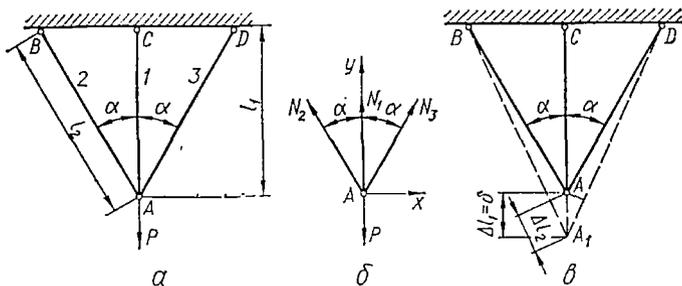


Рис. 142.

Решая совместно уравнения (5.39) и (5.42), получим:

$$R_A = \frac{b}{a+b} P; \quad R_B = \frac{a}{a+b} P.$$

Окончательная эпюра продольных сил представлена на рис. 141, б.

2. Подобрать площади поперечных сечений трехстержневой подвески, расчетная схема которой изображена на рис. 142, а. Длина среднего стержня  $l_1 = 1,5$  м, угол между осью среднего стержня и осями боковых стержней  $\alpha = 30^\circ$ . Все стержни из стали марки Ст. 2. Площади поперечных сечений боковых стержней  $F_2 = F_3$ . Подвеска в узле А будет нагружаться вертикальной силой  $P = 8000$  кг.

Из расчетной схемы конструкции, а также из допущения о том, что шарниры в узлах идеальные, следует, что при нагружении под-

вески в узле  $A$  силой в стержнях будут возникать только осевые усилия, в данном случае — растягивающие.

Подбор площади поперечного сечения стержня при растяжении (проектировочный расчет) производят по условию прочности

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

откуда, если известно усилие  $N$ , определяют необходимую площадь:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Найдем усилия в стержнях подвески. Конструкция один раз статически неопределимая, так как имеет одну лишнюю связь.

Статическая сторона задачи. Условие равновесия узла  $A$  (рис. 142, б) выражается двумя уравнениями статики:

$$\begin{aligned} \sum X &= N_3 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что  $N_2 = N_3$ . В результате остается одно второе уравнение, содержащее два неизвестных усилия:

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \quad (5.43)$$

Геометрическая сторона задачи. Так как система симметрична относительно оси среднего стержня и боковые стержни растягиваются одинаковыми силами, то узел  $A$  при деформации подвески опустится по вертикали на какую-то величину  $\delta$ . Новое положение узла будет  $A_1$  (рис. 142, в). Все стержни удлинятся и займут положение, показанное на рис. 142, в штриховыми линиями. Удлинение среднего стержня, очевидно, будет  $\Delta l_1 = \delta$ . Удлинения боковых стержней получим, если из точек  $B$  и  $D$  радиусом, равным  $BA$  (или  $DA$ ), проведем дуги через точку  $A$  и сделаем засечки на новых длинах стержней  $BA_1$  и  $DA_1$ . Вследствие того, что упругие удлинения очень малы по сравнению с длинами стержней (на рис. 142, в для наглядности удлинения сильно увеличены), можно считать, что углы  $\alpha$  между осями стержней не изменяются, а проведенные дуги заменить перпендикулярами, опущенными из узла  $A$  на новые направления стержней. Тогда, как видно из рисунка,

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \quad (5.44)$$

Физическая сторона задачи. Удлинения стержней выразим по закону Гука через действующие в них усилия:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \quad (5.45)$$

Синтез. Подставляя значения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  из выражений (5.45) в выражение (5.44), получим:

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cos \alpha. \quad (5.46)$$

Выразим  $N_2$  через  $N_1$ :

$$N_2 = \frac{EF_2}{\frac{l_2}{EF_1}} N_1 \cos \alpha,$$

или

$$N_2 = \frac{c_2}{c_1} N_1 \cos \alpha, \quad (5.47)$$

где  $c_1 = \frac{EF_1}{l_1}$ ,  $c_2 = \frac{EF_2}{l_2}$  — жесткости соответственно среднего и боковых стержней.

Внося выражение (5.47) в уравнение (5.43), будем иметь:

$$N_1 + 2 \frac{c_2}{c_1} N_1 \cos^2 \alpha = P,$$

откуда

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}. \quad (5.48)$$

Учитывая выражение (5.47), получим  $N_2$ :

$$N_2 = \frac{P \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}. \quad (5.49)$$

Усилия  $N_1$  и  $N_2$  оказались зависящими от соотношения жесткостей стержней. Поэтому в проектировочном расчете вычислить их можно, только задавшись отношением жесткостей. В этом заключается одна из особенностей расчета статически неопределимых стержневых систем.

В случае одинаковых материалов стержней задаются не отношением жесткостей, а отношением площадей поперечных сечений, которое, разумеется, устанавливает и определенное отношение жесткостей стержней.

Примем  $\frac{F_1}{F_2} = k$ . Тогда, учитывая, что  $l_1 = l_2 \cos \alpha$ , получим:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{EF_2 l_1}{l_2 EF_1} = \frac{EF_2 l_2 \cos \alpha}{l_2 EF_2 k} = \frac{\cos \alpha}{k}.$$

Теперь усилия в стержнях  $N_1$  (5.48) и  $N_2$  (5.49) определяются такими выражениями:

$$N_1 = \frac{P}{1 + \frac{2}{k} \cos^2 \alpha}; \quad (5.50)$$

$$N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{k + 2 \cos^2 \alpha}. \quad (5.51)$$

Вычислим эти усилия, приняв, например,  $k = 2$ :

$$N_1 = \frac{8000}{1 + 0,866^2} = 4850 \text{ кг};$$

$$N_2 = \frac{8000 \cdot 0,866^2}{2(1 + 0,866^2)} = 1820 \text{ кг}.$$

Подберем площади поперечных сечений стержней, исходя из предположения, что напряжения в них достигают величины допускаемых напряжений  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$  в среднем стержне. Тогда

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{4850}{1400} = 3,46 \text{ см}^2.$$

Площади поперечных сечений боковых стержней, согласно принятому отношению, получим такими:

$$F_2 = \frac{F_1}{k} = \frac{F_1}{2} = 1,73 \text{ см}^2.$$

Напряжения, с которыми будут работать эти стержни,

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1820}{1,73} = 1050 \text{ кг/см}^2.$$

Эти напряжения меньше допускаемого, т. е. стержни будут иметь избыточный запас прочности.

Если из условия прочности определить площади поперечных сечений боковых стержней  $F_2$ , а затем, согласно принятому отношению, взять  $F_1 = 2F_2$ , то напряжение в среднем стержне окажется больше допускаемого. Таким образом, этот второй вариант подбора площади поперечных сечений следует отбросить.

Отметим, что в рассматриваемой статически неопределимой конструкции нельзя получить равнопрочность всех ее элементов.

**Начальные и температурные напряжения.** Свободная сборка статически неопределимых систем возможна лишь при весьма точном изготовлении их элементов. В противном случае сборку вынуждены осуществлять с приложением усилий, вызывающих деформации элементов, поэтому в них после монтажа системы будут напряжения, называемые *начальными*, или *монтажными*. В статически определимых конструкциях неточность размеров элементов не требует приложения усилий при монтаже и в элементах не возникают начальные напряжения.

В элементах статически неопределимых систем усилия и напряжения возникают также при изменении температуры.

1. Предположим, что стержни конструкции, рассмотренной в предыдущем примере, изготовлены с заданными площадями поперечных сечений  $F_1 = F_2 = F_3$  и средний стержень оказался короче на величину  $\Delta$  (рис. 143, а). Если величина  $\Delta$  незначительна по сравнению с длинами стержней, то, приложив определенные усилия, можно все три стержня соединить в узле, который займет после сборки какое-то положение А (рис. 143, б). Очевидно, при этом средний стержень будет растянут, а боковые сжаты. Определим монтажные усилия в стержнях.

Статическая сторона задачи. Уравнения равновесия узла А (рис. 143, в) следующие:

$$\begin{aligned} \sum X &= N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 - N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим, что  $N_2 = N_3$ . Остается одно уравнение с двумя неизвестными:

$$N_1 - 2N_2 \cos \alpha = 0. \quad (5.52)$$

Геометрическая сторона задачи. Из приведенного на рис. 143, б построения следует, что

$$\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1) \cos \alpha. \quad (5.53)$$

Физическая сторона задачи. По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \quad (5.54)$$

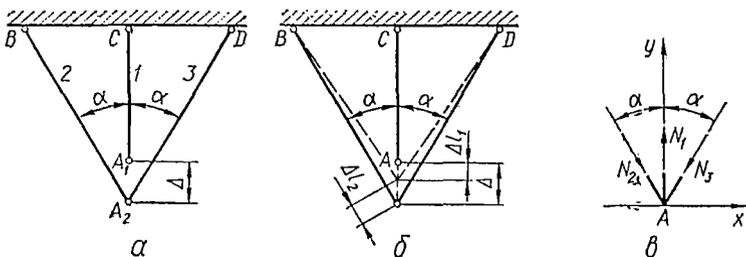


Рис. 143.

Синтез. Подставляя значения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  из выражений (5.54) в выражение (5.53), будем иметь:

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \left( \Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1} \right) \cos \alpha.$$

Выразим  $N_2$  через  $N_1$  и  $\Delta$ :

$$N_2 = \frac{EF_2}{l_2} \left( \Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1} \right) \cos \alpha,$$

или

$$N_2 = c_2 \left( \Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cos \alpha.$$

Внося  $N_2$  в уравнение (5.52), получим:

$$N_1 - 2c_2 \left( \Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cos^2 \alpha = 0.$$

Отсюда находим растягивающее усилие в среднем стержне:

$$N_1 = \frac{2c_2 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha} \Delta. \quad (5.55)$$

Сжимающие усилия в боковых стержнях определим на основании уравнения (5.52):

$$N_2 = \frac{N_1}{2 \cos \alpha}. \quad (5.56)$$

Усилия в стержнях зависят как от отношения жесткостей, так и от величины погрешности  $\Delta$  в размерах.

Пусть в рассматриваемой конструкции (рис. 143) все стержни изготовлены из стали ( $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ). Площади поперечных сечений стержней  $F_1 = 3 \text{ см}^2$ ,  $F_2 = F_3 = 2 \text{ см}^2$ ; проектная длина стержня  $l_1 = 2 \text{ м}$ , углы наклона крайних стержней  $\alpha = 30^\circ$ . После соединения крайних стержней оказалось, что средний стержень короче, чем это необходимо для свободной сборки, на величину  $\Delta = 0,15 \text{ см}$ . Найдем усилия и напряжения, возникшие после сборки конструкции.

По формуле (5.55) находим растягивающее усилие в среднем стержне:

$$N_1 = \frac{2 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,866}{200} \cdot 0,866^2}{1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,866 \cdot 200}{200 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3} \cdot 0,866^2} \cdot 0,15 = 2090 \text{ кг}.$$

Сжимающие усилия в боковых стержнях согласно выражению (5.56)

$$N_2 = N_3 = \frac{2090}{2 \cdot 0,866} = 1206 \text{ кг}.$$

Соответственно напряжения в стержнях

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2090}{3} = 697 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{N_2}{F_2} = -\frac{1206}{2} = -603 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, сравнительно небольшая неточность, допущенная в длине стержня при изготовлении, вызывает большие начальные (монтажные) напряжения.

2. Определим температурные напряжения в стержне  $AB$  (рис. 144) длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $F$ . Модуль упругости материала  $E$ , коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha$ . Стержень закреплен плотно между двумя стенками и нагрет так, что на конце  $A$  температура его повысилась на  $T_A$ , на конце  $B$  — на  $T_B$ , а по длине стержня она изменяется по закону

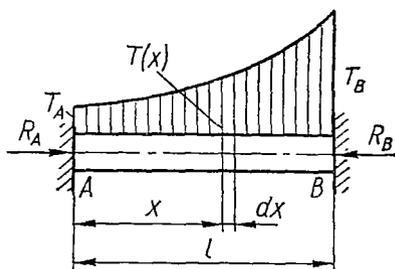


Рис. 144.

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n. \quad (5.57)$$

При  $n = 0$  изменение температуры по длине стержня постоянно и равно  $T_B$ , при  $n = 1$  температура изменяется линейно, при  $n = 2$  — по закону параболы второго порядка и т. д.

Определим реакции закреплений и напряжения в стержне.

Статическая сторона задачи. При повышении температуры стержень стремится удлиниться. Этому препятствуют жесткие опоры,

в результате чего возникают реакции, направленные вдоль оси стержня (рис. 144).

Для системы сил, направленных по одной прямой, можно составить одно уравнение равновесия:

$$\sum x = R_A - R_B = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = R. \quad (5.58)$$

Осевая сила в стержне  $N = -R$ .

Геометрическая сторона задачи. Вследствие закрепления концов стержня его длина не изменяется:

$$\Delta l = 0. \quad (5.59)$$

Физическая сторона задачи. Укорочение свободного стержня, вызванное нормальными силами, равными реакциям закреплений,

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF}. \quad (5.60)$$

Удлинение свободного стержня вследствие нагрева определим следующим образом. На расстоянии  $x$  от конца  $A$  стержня выделим элемент длиной  $dx$ , для которого повышение температуры  $T(x)$  может считаться постоянным. Температурное удлинение этого элемента

$$\Delta dx_T = \alpha T(x) dx = \alpha \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n \right) dx. \quad (5.61)$$

Температурное удлинение всего стержня найдем, проинтегрировав выражение (5.61) по длине стержня:

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n \right) dx = \alpha l \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (5.62)$$

Полное изменение длины стержня выразится так:

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_T = -\frac{Rl}{EF} + \alpha l \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (5.63)$$

Синтез. Подставив выражение (5.63) в формулу (5.59), получим:

$$-\frac{Rl}{EF} + \alpha l \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) = 0, \quad (5.64)$$

откуда находим реакции опор:

$$R = \alpha \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) EF \quad (5.65)$$

и напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{R}{F} = -\alpha \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) E. \quad (5.66)$$

При  $n = 0$  последние две формулы переходят в формулы для случая равномерного нагрева стержня по длине на  $\Delta T = T_B$ :

$$R = \alpha \Delta T E F \text{ и } \sigma = -\alpha E \Delta T.$$

Рассмотрим числовой пример. Определим осевую силу и напряжение в стальном стержне, если  $l = 80 \text{ см}$ ;  $F = 20 \text{ см}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ ;  $T_A = 10^\circ$ ;  $T_B = 55^\circ$ . Температура по длине стержня изменяется по закону параболы второго порядка ( $n = 2$ ).

Подставляя числовые значения в формулы (5.65) и (5.66), найдем величину сжимающей нормальной силы и сжимающие напряжения в стержне:

$$N = 125 \cdot 10^{-7} \left( 10 + \frac{55-10}{3} \right) 2 \cdot 10^6 \cdot 20 = -12\,500 \text{ кг};$$

$$\sigma = 125 \cdot 10^{-7} \left( 10 + \frac{55-10}{3} \right) 2 \cdot 10^6 = -625 \text{ кг/см}^2.$$

Заметим, что при понижении температуры в системе, подсобной изображенной на рис. 144, возникают растягивающие напряжения.

На основании рассмотренных в параграфе примеров можно отметить следующие особенности статически неопределимых конструкций, которыми они отличаются от статически определимых:

1. Распределение усилий между элементами статически неопределимых конструкций зависит от жесткостей этих элементов. Если увеличить жесткость какого-либо из них, то он примет на себя большее усилие. Изменяя соотношение жесткостей элементов конструкций, можно любым образом менять распределение усилий в них.

2. В статически неопределимых конструкциях при изменении температуры ее элементов по сравнению с температурой, при которой осуществлялась сборка конструкций, возникают усилия и напряжения.

3. В элементах статически неопределимых конструкций могут существовать усилия и напряжения при отсутствии внешней нагрузки. Эти усилия и напряжения, называемые начальными (монтажными), появляются при сборке конструкции. Начальные напряжения или создаются с определенной целью (например, затяжка болтов, прессовая посадка), или возникают вследствие неточного изготовления отдельных элементов конструкций.

В статически неопределимых конструкциях в общем случае во всех элементах одновременно нельзя получить напряжения, равные допускаемым. При проектировании таких конструкций это следует иметь в виду.

### § 38. РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ

*Совершенно гибкой* называется нить, которая способна сопротивляться только растяжению. Из шести компонентов внутренних сил в поперечных сечениях такой нити только осевая растягивающая сила не равна нулю. В инженерной практике широко распространены системы, которые с известным приближением могут рассматриваться как

гибкие нити. Таковы воздушные линии электрических проводов, провода телеграфной сети, контактные провода электрифицированных железных дорог и трамваев, цепи висячих мостов, тросы канатных дорог и кабелькранов и т. п.

Точки подвеса нити могут находиться на одном или на разных уровнях (рис. 145).

При расчете на прочность длинных гибких нитей, кроме других нагрузок, существенное значение имеет их собственный вес. Пусть весомая гибкая нить постоянного поперечного сечения подвешена в двух точках, расположенных на разных уровнях (рис. 145, б) или на одном уровне (рис. 145, а). Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой.

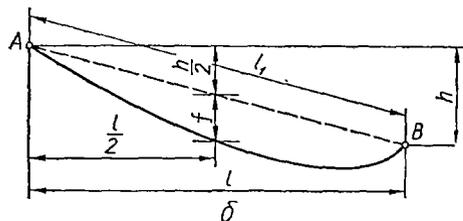
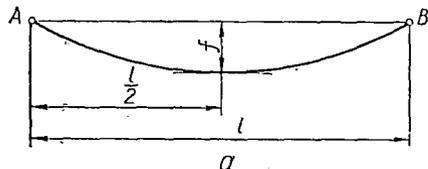


Рис. 145.

Введем следующие обозначения:

$l_1$  — расстояние между точками A и B подвеса нити;

$l$  — пролет, равный горизонтальной проекции расстояния  $l_1$ ;

$h$  — разность уровней точек подвеса нити;

$f$  — удаление нити от прямой AB, соединяющей точки подвеса нити, измеренное по середине пролета;

$L$  — длина неподвешенной нити;

$q$  — интенсивность нагрузки на единицу длины нити.

В случае одинакового уровня точек подвеса величина  $f$  является удалением нижней точки нити от горизонтальной линии AB и называется *стрелой провисания*. Нагрузка  $q$  может быть не только собственным весом, но и включать в себя другие нагрузки, например, вес льда при обледенении проводов, давление ветра. Эти нагрузки предполагаются также равномерно распределенными по длине нити.

В случае, когда нагрузка состоит из собственного веса нити, ее интенсивность

$$q = q_n = \gamma F, \quad (5.67)$$

где  $q_n$  — вес единицы длины провода;

$\gamma$  — вес единицы объема материала;

$F$  — площадь поперечного сечения нити.

При обледенении проводов (5.68)

$$q = q_n + q_l,$$

где  $q_l$  — вес льда на единице длины провода.

Толщину корки льда принимают величиной 0,5 — 2,5 см в зависимости от климатического района.

Перечисленные нагрузки действуют в вертикальной плоскости, давление же ветра на провод — в горизонтальной плоскости. Интенсив-

пость его  $q_B$  определяют, умножая давление ветра  $p$  на площадь диаметрального сечения единицы длины провода:

$$q_B = pd,$$

или

$$q_B = k\alpha q_{ск} d, \quad (5.69)$$

где  $k = 1,2$  — аэродинамический коэффициент;

$\alpha = 0,85$  — коэффициент неравномерности ветра;

$q_{ск}$  — скоростной напор;

$d$  — диаметр провода с учетом его увеличения за счет обледенения.

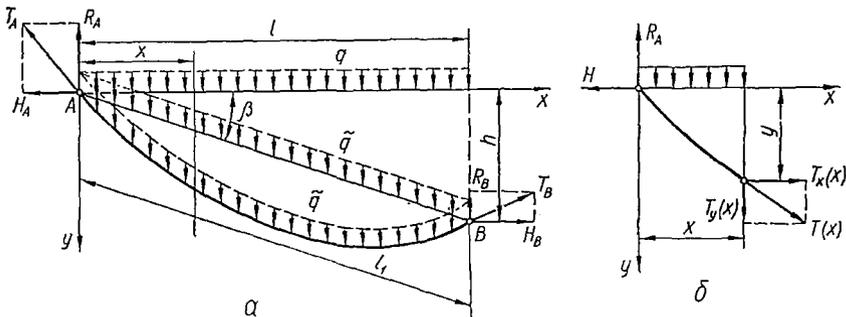


Рис. 146.

Выражая  $q_{ск}$  через скорость ветра  $v$ , получим:

$$q_B = 636 \cdot 10^{-4} v^2 d \text{ кг/м}. \quad (5.70)$$

Здесь  $v$  измеряют в м/сек, а  $d$  — в м.

Суммарную интенсивность нагрузки на провод найдем в результате геометрического сложения суммарных вертикальной и горизонтальной нагрузок:

$$q = \sqrt{(q_n + q_n)^2 + q_B^2}. \quad (5.71)$$

При этом, естественно, плоскость действия суммарной нагрузки, совпадающая с плоскостью провисания нити, не будет вертикальной.

На практике провисание нити чаще всего бывает небольшим — таким, при котором длина нити по кривой провисания мало отличается от длины пролета (обычно не более, чем на 10%). Ограничимся рассмотрением только таких пологих нитей. В этом случае для упрощения расчетов с достаточной степенью точности можно считать, что нагрузка, действующая на подвешенную нить, равномерно распределена не по длине нити, а по длине ее отрезка  $AB$ , соединяющего точки подвеса (рис. 146, а).

Для удобства вычислений эту нагрузку  $\tilde{q}$  заменяем статически эквивалентной нагрузкой  $q$ , распределенной вдоль пролета  $l$ . Очевидно,

$$ql = \tilde{q}l_1,$$

отсюда

$$q = \tilde{q} \frac{l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos \beta}. \quad (5.72)$$

Статическая сторона задачи. Рассмотрим равновесие нити. Так как нить предполагается совершенно гибкой, то растягивающие усилия в каждом поперечном сечении должны быть направлены по касательной к кривой провисания нити. В точках прикрепления эти усилия равны реакциям опор. Обозначим последние соответственно через  $T_A$  и  $T_B$ . Выберем начало координат в левой точке подвеса нити и направим оси координат так, как показано на рис. 146, а.

Заменяя реакции опор их горизонтальными и вертикальными составляющими, запишем уравнения равновесия нити:

$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A + H_B = 0; \\ \sum Y &= -R_A - R_B + ql = 0; \\ \sum M_B &= -H_A h + R_A l - \frac{ql^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Из уравнений (5.73) следует, что

$$H_A = H_B = H; \quad (5.74)$$

$$R_A = \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l}; \quad (5.75)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}. \quad (5.76)$$

Так как из трех уравнений равновесия нельзя определить четыре неизвестных ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $H_B$  и  $R_B$ ), то задача является один раз статически неопределимой.

Рассмотрим равновесие части нити, отсеченной любым сечением (рис. 146, б):

$$\begin{aligned} \sum X &= -H + T_x(x) = 0; \\ \sum Y &= -R_A + qx + T_y(x) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом формулы (5.75) получаем:

$$T_x(x) = H; \quad (5.77)$$

$$T_y(x) = H \frac{h}{l} + q \left( \frac{l}{2} - x \right). \quad (5.78)$$

Как видно из выражения (5.77), горизонтальная составляющая растягивающего усилия в любом поперечном сечении нити постоянна и равна величине  $H$ . Усилие  $H$  называется *горизонтальным натяжением нити*.

Таким образом, растягивающее усилие в произвольном сечении нити

$$T(x) = \sqrt{T_x^2(x) + T_y^2(x)} = \sqrt{H^2 + \left[ H \frac{h}{l} + q \left( \frac{l}{2} - x \right) \right]^2}. \quad (5.79)$$

Как видно, наибольшее растягивающее усилие  $T_{\text{макс}}$  действует в высшей точке подвеса нити (при  $x = 0$ ):

$$T_{\text{макс}} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\right)^2}.$$

Для пологих нитей различие между наибольшим растягивающим усилием, действующим у более высокой точки подвеса, и натяжением  $H$  невелико. Поэтому с достаточной для практики точностью можно считать, что растягивающее усилие в нити постоянно и равно величине натяжения  $H$ . По этой величине обычно и ведут расчет нити на прочность.

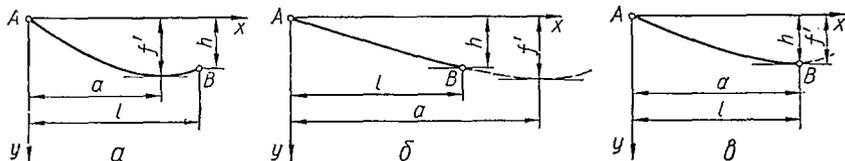


Рис. 147.

Выясним форму кривой провисания нити. С этой целью запишем уравнение для изгибающего момента в каком-либо сечении (рис. 146, б). Поскольку нить совершенно гибкая, то во всех ее сечениях изгибающий момент равен нулю:

$$M(x) = R_A x - Hy - \frac{qx^2}{2} = 0. \quad (5.80)$$

С учетом формулы (5.75) получим:

$$\left(\frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\right)x - Hy - \frac{qx^2}{2} = 0, \quad (5.81)$$

откуда

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2H}, \quad (5.82)$$

т. е. кривая провисания нити выражается квадратичной параболой.

Заметим, что если задачу решать точно, считая нагрузку распределенной равномерно по длине нити, а не по пролету, то кривая провисания будет цепной линией. Формула (5.82), являясь первым членом разложения уравнения цепной линии в ряд Маклорена по степеням  $x$ , дает для пологих нитей хорошее приближение при решении практических задач.

Определим возможные положения нижней точки кривой провисания нити. Координаты этой точки обозначим через  $x = a$ ,  $y = f'$  (рис. 147, а). В ней  $y$  имеет экстремальное значение. Для определения его возьмем производную от выражения (5.82):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} \quad (5.83)$$

и приравняем ее нулю:

$$\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} = 0. \quad (5.84)$$

Отсюда найдем значение абсциссы, определяющее положение низшей точки:

$$x = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (5.85)$$

Низшая точка кривой провисания нити всегда находится ближе к более низкой точке подвеса.

Подставляя выражение (5.85) в формулу (5.82), найдем экстремальное значение ординаты, т. е. величину наибольшего провисания нити:

$$y_{\text{макс}} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \quad (5.86)$$

Будем различать три характерных случая расположения низшей точки кривой провисания нити:

1. Низшая точка кривой провисания находится в пределах пролета, т. е.  $a < l$  (рис. 147, а). Согласно выражению (5.85) это будет иметь место, когда

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.87)$$

2. Низшая точка кривой провисания лежит вне пролета, т. е.  $a > l$  (рис. 147, б). Это будет при условии

$$H > \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.88)$$

3. Низшая точка кривой совпадает с более низкой точкой подвеса, т. е.  $a = l$  (рис. 147, в). Необходимое условие для этого случая

$$H = \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.89)$$

Во всех трех случаях координаты  $a$  и  $f'$  низшей точки определяются по формулам (5.85) и (5.86).

Установим зависимость между натяжением  $H$  и величиной  $f$ . Посредине пролета  $x = \frac{l}{2}$ , а  $y = \frac{h}{2} + f$  (рис. 145, б). Подставляя эти значения координат в формулу (5.82), получим:

$$f = \frac{ql^2}{8H}, \quad (5.90)$$

или

$$\boxed{H = \frac{ql^2}{8f}}. \quad (5.91)$$

Выразим натяжение нити  $H$  через наибольшее провисание  $f'$ . Из формулы (5.86), решая квадратное уравнение относительно натяжения  $H$ , получим:

$$H = \frac{ql^2}{h^2} \left[ f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f' - h)} \right]. \quad (5.92)$$

Если низшая точка кривой провисания лежит в пределах пролета, то перед корнем следует брать знак минус, если вне пролета — знак плюс, так как в первом случае натяжение  $H$  меньше, чем во втором, что видно из сравнения выражений (5.87) и (5.88).

Геометрическая сторона задачи. Установим связь между длиной подвешенной нити, пролетом и величиной  $f$ , характеризующей провисание нити. Длина элемента кривой, как известно,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Если нить пологая, то величина  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2$  мала по сравнению с единицей. Раскладывая выражение  $\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  в ряд по формуле бинома Ньютона и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим:

$$dS = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (5.93)$$

Подставляя сюда  $\frac{dy}{dx}$  из выражения (5.83) и интегрируя по всей длине пролета, будем иметь:

$$S = \int_0^l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} \right)^2 \right] dx = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l}. \quad (5.94)$$

Подставляя на основании формулы (5.91)  $H = \frac{ql^2}{8f}$ , получим, что

$$S = l + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l} + \frac{h^2}{2l}. \quad (5.95)$$

Из геометрических соображений удлинение  $\Delta S$  нити длиной  $L$  после подвески

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - L. \quad (5.96)$$

Физическая сторона задачи. Установим также физические зависимости, выражающие изменение длины нити от растягивающего усилия и от изменения температуры. Как указывалось, для пологих нитей растягивающее усилие можно принять равным натяжению  $H$ .

При определении удлинений длину нити заменим длиной  $l_1$ , что достаточно точно при малом провисании. Тогда упругое удлинение от растяжения

$$\Delta S_H = \frac{Hl_1}{EF} = \frac{Hl}{EF \cos \beta}. \quad (5.97)$$

Температурное удлинение нити определяется по формуле

$$\Delta S_{T^{\circ}} = \alpha l_1 (T^{\circ} - T_0^{\circ}) = \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^{\circ} - T_0^{\circ}), \quad (5.98)$$

где  $T_0^{\circ}$  — температура в момент подвешивания нити;  
 $T^{\circ}$  — температура, для которой производится расчет нити.

Суммарное изменение исходной длины нити

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_{T^{\circ}} = \frac{Hl}{EF \cos \beta} + \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^{\circ} - T_0^{\circ}). \quad (5.99)$$

Формулы (5.96) и (5.99) выражают одну и ту же величину — удлинение подвешенной нити. Приравняв правые части этих равенств, находим:

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{Hl}{EF \cos \beta} - \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^{\circ} - T_0^{\circ}). \quad (5.100)$$

Уравнение (5.100) совместно со статическим уравнением (5.90) позволяют определить натяжение нити  $H$  и стрелу провисания  $f$ .

Определив из уравнения (5.100) натяжение нити  $H$ , можем по формуле (5.79) вычислить растягивающее усилие в произвольном сечении нити, а значит, и  $T_{\max}$ . Зная последнее, проверяем прочность нити:

$$\sigma = \frac{T_{\max}}{F} \approx \frac{H}{F} \leq [\sigma];$$

с учетом формулы (5.91) получим:

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} \leq [\sigma]. \quad (5.101)$$

При расчете нитей удобно ввести понятие удельной нагрузки  $\tilde{\gamma}$ , которая представляет собой интенсивность погонной нагрузки  $q$ , отнесенную к площади поперечного сечения нити:

$$\tilde{\gamma} = \frac{q}{F}.$$

Если действует только собственный вес, удельная нагрузка совпадает с объемным весом материала нити.

С учетом сказанного условие прочности можно записать так:

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma} l^2}{8f} \leq [\sigma]. \quad (5.102)$$

Заметим, что при расчете электрических проводов сечение нити определяется из электротехнических соображений, а затем выполняется проверочный расчет.

Приведем расчетные формулы для часто встречающегося случая нити с точками подвеса, расположенными на одном уровне (рис. 148, а), т. е. при  $\cos \beta = 1$ .

В этом случае  $h = 0$ , реакции в точках подвеса одинаковы:  $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ , наибольшее провисание  $f$  будет посередине пролета. Как и ранее, оно связано с натяжением формулами (5.90) и (5.91):

$$\begin{aligned} f &= \frac{ql^2}{8H}; \\ H &= \frac{ql^2}{8f}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Уравнение совместности деформаций (5.100) принимает вид

$$\begin{aligned} L &= l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} - \frac{Hl}{EF} - \\ &- \alpha l (T^2 - T_0^0). \end{aligned} \quad (5.104)$$

**Влияние изменения температуры и нагрузки на напряжение и стрелу провисания нити.** В процессе эксплуатации нить может подвергаться воздействию различных нагрузок и температур. Выясним, как изменяются напряжения и стрела провисания нити при изменении этих факторов. С этой целью рассмотрим два состояния нити:  $m$  и  $n$ -е (рис. 149).

Пусть в  $m$ -м состоянии температура равна  $T_m^0$ , погонная нагрузка —  $q_m$ , а стрела провисания —  $f_m$ ; при этом натяжение  $H_m = \frac{q_m l^2}{8f_m}$ , а напряже-

ние в нити  $\sigma_m = \frac{H_m}{F}$ .

При изменении температуры и нагрузки в  $n$ -м состоянии до величин  $T_n^0$  и  $q_n$  стрела провисания станет  $f_n$ , натяжение  $H_n = \frac{q_n l^2}{8f_n}$ , а напряжение  $\sigma_n = \frac{H_n}{F}$ .

Установим зависимость между напряжениями и стрелами провисания нити для указанных двух состояний.

Задача легко решается, если записать выражение для длины нити  $L$  к моменту подвеса через параметры обоих состояний. Если точки подвеса нити находятся на одном уровне, то на основании уравнения

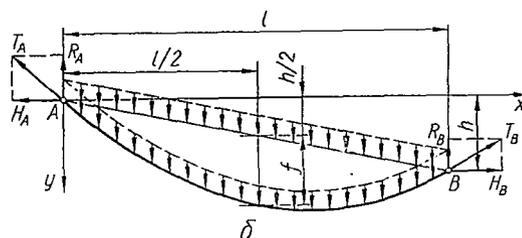
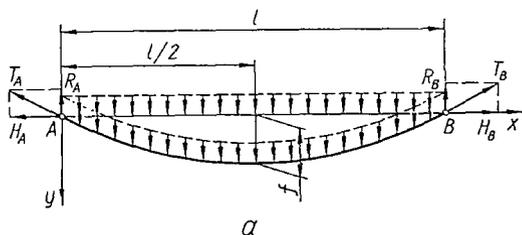


Рис. 148.

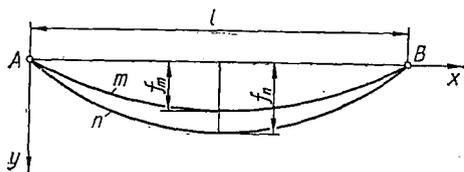


Рис. 149.

(5.104), исходя из параметров  $m$  и  $n$ -го состояний, соответственно получим:

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l (T_m^0 - T_0^0); \quad (5.105)$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l (T_n^0 - T_0^0). \quad (5.106)$$

Правые части этих двух выражений, представляющие одну и ту же величину — длину нити к моменту подвеса, равны между собой. Следовательно,

$$l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l (T_m^0 - T_0^0) = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l (T_n^0 - T_0^0).$$

Отсюда, обозначая  $\frac{q_m}{F} = \tilde{\gamma}_m$ ;  $\frac{q_n}{F} = \tilde{\gamma}_n$  и учитывая, что  $\frac{H_m}{F} = \sigma_m$ ;  $\frac{H_n}{F} = \sigma_n$ , находим:

$$\boxed{\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E (T_m^0 - T_n^0).} \quad (5.107)$$

Эту зависимость иногда называют *уравнением состояния нити*. Его можно переписать также в виде

$$\sigma_n^3 - \left[ \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} - \alpha E (T_n^0 - T_m^0) \right] \sigma_n^2 - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24} = 0. \quad (5.108)$$

Если выразить напряжения через стрелы провисания:

$$\sigma_m = \frac{\tilde{\gamma}_m l^2}{8f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n l^2}{8f_n},$$

то уравнение (5.108) можно записать так:

$$f_n^3 - \left[ f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 (T_n^0 - T_m^0) - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E} = 0. \quad (5.109)$$

Чтобы получить уравнения состояний для нитей, подвешенных на разных уровнях (рис. 148, б), в качестве исходной формулы длины  $L$  следует взять формулу (5.100). Тогда уравнение состояния (5.107) примет вид

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E \cos \beta}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E \cos \beta}{24\sigma_m^2} + \alpha E (T_m^0 - T_n^0). \quad (5.110)$$

Выразив, как и выше, напряжения через стрелы провисания, получим:

$$f_n^3 - \left[ f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 \frac{(T_n^0 - T_m^0)}{\cos \beta} - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m \cos \beta} \right] f_n - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E \cos \beta} = 0. \quad (5.111)$$

Выведенные выше кубические уравнения могут быть решены любым известным методом, в том числе и графическим.

При графическом решении, например, уравнения (5.109)

$$f_n^3 - af_n - b = 0,$$

где  $a$  и  $b$  — известные числа, запишем последнее уравнение в виде

$$f_n^3 = af_n + b. \quad (5.112)$$

В прямоугольных координатах строим графики  $y = f_n^3$  и  $y = af_n + b$  (рис. 150). Очевидно, что абсцисса точки пересечения кубической параболы с прямой дает действительный корень уравнения, а значит и искомую стрелу. Два других корня кубического уравнения мнимые.

В случае необходимости уточнить полученное графическим способом решение можно применить способ Ньютона:

$$f_n^{k+1} = f_n^k + \frac{F(f_n)}{F'(f_n)},$$

где

$$F(f_n) = f_n^3 - af_n - b;$$

$$F'(f_n) = 3f_n^2 - a.$$

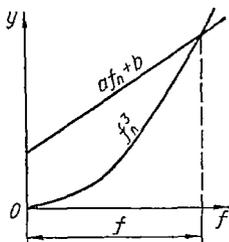


Рис. 150.

**Понятие о критическом пролете.** Расчет на прочность нужно также установить, при каком состоянии нити в ней будет максимальное напряжение. Оно может быть:

а) при наибольшей нагрузке (гололед и умеренный ветер или отсутствие гололеда, но сильный ветер);

б) при самой низкой температуре без гололеда.

Так как наибольшая нагрузка не совпадает во времени с наиболее низкой температурой, то для расчета важно установить, какое из этих состояний будет опасным. Выясним влияние нагрузки и температуры на напряжения в зависимости от длины пролета нити.

Исходим из уравнения состояния (5.107). В случае весьма малых пролетов, положив в этом уравнении  $l = 0$ , найдем, что

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E (T_m^0 - T_n^0),$$

т. е. при малых пролетах изменение напряжения зависит главным образом от температуры. С уменьшением температуры  $T_n^0$  напряжения  $\sigma_n$  растут и наибольшие напряжения в нити имеют место при низшей температуре.

Рассмотрим теперь случай весьма больших пролетов. Разделив уравнение (5.107) на  $l^2$  и положив  $l \rightarrow \infty$ , получим:

$$\sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\gamma}_m} \cdot \sigma_m.$$

Следовательно, если пролеты велики, то изменение напряжения в основном зависит от нагрузки на нить. Наибольшие напряжения будут действовать при максимальных нагрузках.

Найдем такую длину пролета, при которой напряжения в нити будут одинаковыми в обоих опасных состояниях, т. е. как при наибольшей нагрузке, так и при наиболее низкой температуре. Такой пролет называется *критическим* ( $l_{кр}$ ).

Пусть  $T_n^\circ$  соответствует температуре гололеда, т. е.  $T_n^\circ = T_{гол}^\circ$  (обычно  $T_{гол}^\circ = -5^\circ \text{C}$ ), при этом  $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{\max}$ ;  $T_m^\circ$  — соответствует низшей температуре, т. е.  $T_m^\circ = T_{\min}^\circ$ ; на нить в этом случае действует только собственный вес, так что  $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_1$ .

При  $l = l_{кр}$  согласно определению

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma].$$

Внося эти данные в выражение (5.107), находим:

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha (T_{гол}^\circ - T_{\min}^\circ)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}}. \quad (5.113)$$

Сопоставляя расчетный пролет с критическим, можно установить, при каких условиях в нити действует наибольшее напряжение. Так, если  $l < l_{кр}$ , то наибольшее напряжение будет при низшей температуре. В случае  $l > l_{кр}$  опасное состояние будет при наибольшей нагрузке.

*Пример 14.* Многожильный медный провод сечением  $F = 120 \text{ мм}^2$  подвешивают при температуре  $T_0^\circ = 15^\circ \text{C}$  к опорам, расположенным на одном уровне на расстоянии  $l = 100 \text{ м}$ .

Определить: а) какую стрелу провисания  $f_0$  необходимо дать проводу, чтобы напряжение в наиболее опасном состоянии равнялось допускаемому; б) высоту точек подвеса провода, чтобы расстояние его нижней точки от земли было не менее 6 м.

Расчет провода произвести для следующих случаев:

1) температура  $T_{гол}^\circ = -5^\circ \text{C}$ ; при этом провод, кроме собственного веса, нагружен слоем льда толщиной 1 см (гололед), а также горизонтальным давлением ветра  $p = 24 \text{ кг/м}^2$ ;

2) температура  $T_{\min}^\circ = -40^\circ \text{C}$ ; действует только собственный вес провода;

3) температура  $T_{\max}^\circ = +40^\circ \text{C}$ ; действует только собственный вес провода.

Первый и второй случаи могут оказаться опасными с точки зрения прочности провода. В третьем случае может образоваться наибольшая стрела провисания, по которой следует определить минимальную высоту точек подвешивания провода.

В соответствии с сортаментом проводов многожильный медный провод сечением  $F = 120 \text{ мм}^2$  имеет диаметр  $d = 14,2 \text{ мм}$  и вес погонного метра его  $q_n = 1,09 \text{ кг/м}$ . Модуль упругости материала провода  $E = 1,3 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$ . Допускаемое напряжение для провода  $[\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2$ .

Найдем нагрузку  $q_{\max}$  в первом случае. Для определения веса льда необходимо знать внутренний и наружный диаметры ледяного покрова.

Внутренний диаметр его равен диаметру провода, т. е.  $d = 1,42 \text{ см}$ ; наружный диаметр  $D$  при толщине ледяной оболочки 1 см будет  $D = 3,42 \text{ см}$ . Площадь поперечного сечения ледяного покрытия провода

$$F_{л} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 (3,42^2 - 1,42^2)}{4} = 7,60 \text{ см}^2.$$

При объемном весе льда  $\gamma_{\text{л}} = 0,9 \text{ Г/см}^3$  нагрузка от льда на погонный метр провода

$$q_{\text{л}} = \gamma_{\text{л}} F_{\text{л}} = \frac{0,9 \cdot 7,6 \cdot 100}{1000} = 0,684 \text{ кг/м.}$$

Давление ветра на погонный метр обледеневшего провода

$$q_{\text{в}} = \rho D = \frac{24 \cdot 3,42}{100} = 0,821 \text{ кг/м.}$$

Полную нагрузку на погонный метр обледеневшего провода найдем геометрическим сложением суммарной вертикальной и горизонтальной нагрузок:

$$q_{\text{макс}} = \sqrt{(q_{\text{л}} + q_{\text{в}})^2 + q_{\text{в}}^2} = \sqrt{(1,090 + 0,684)^2 + 0,821^2} = 1,96 \text{ кг/м.}$$

Выясним, в каком из первых двух состояний провода напряжения в нем будут большими. Для этого находим:

$$\tilde{\gamma}_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}}}{F} = \frac{0,0196}{1,2} = 0,0163 \text{ кг/см}^3; \quad \tilde{\gamma}_{\text{л}} = \frac{0,0109}{1,2} = 0,00908 \text{ кг/см}^3.$$

По формуле (5.113) определяем длину критического пролета:

$$l_{\text{кр}} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha (T_{\text{гол}}^{\circ} - T_{\text{мнн}}^{\circ})}{\tilde{\gamma}_{\text{макс}}^2 - \tilde{\gamma}_{\text{л}}^2}} = 800 \sqrt{\frac{24 \cdot 17 \cdot 10^{-6} [-5 - (-40)]}{(163^2 - 90,8^2) 10^{-8}}} = 7060 \text{ см} \approx 71 \text{ м.}$$

Так как действительная длина пролета  $l = 100 \text{ м}$  больше длины критического пролета, то большее напряжение в проводе  $\sigma_{\text{макс}}$  будет при максимальной нагрузке ( $q_{\text{макс}} = 1,96 \text{ кг/м}$  и  $T_{\text{гол}}^{\circ} = -5^{\circ} \text{ С}$ ), т. е. в первом состоянии. Приняв  $\sigma_{\text{макс}} = [\sigma]$ , найдем стрелу провисания провода в этом состоянии:

$$f_1 = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{8F [\sigma]} = \frac{1,96 \cdot 100^2}{8 \cdot 1,2 \cdot 800} = 2,54 \text{ м.}$$

Определим, какую стрелу провисания  $f_0$  нужно дать проводу при подвешивании. Для этого воспользуемся зависимостью (5.109), приняв  $q_m = q_{\text{макс}} = 1,96 \text{ кг/м}$ ;  $f_m = f_1 = 2,54 \text{ м}$ ;  $T_m^{\circ} = T_{\text{гол}}^{\circ} = -5^{\circ} \text{ С}$ ;  $q_n = q_{\text{л}} = 1,09 \text{ кг/м}$ ;  $T_n^{\circ} = T_0^{\circ} = 15^{\circ} \text{ С}$ ;  $f_n = f_0$ .

Подставляя числовые величины в уравнение (5.109), получим уравнение для определения  $f_0$ :

$$f_0^3 - \left[ 2,54^2 + \frac{3}{8} \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (15 + 5) - \frac{3 \cdot 1,96 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,54 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} \right] f_0 - \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} = 0.$$

Произведя вычисления, будем иметь:

$$f_0^3 - 5,41 f_0 - 3,28 = 0.$$

Решая уравнение, выясняем, что

$$f_0 = 2,58.$$

Найдем теперь, какую стрелу провисания будет иметь провод при  $T_{\text{макс}}^{\circ} = 40^{\circ} \text{ С}$ . Для этого вновь воспользуемся зависимостью (5.109), приняв  $q_m = q_{\text{л}} = 1,09 \text{ кг/м}$ ;  $f_m = f_0 = 2,58 \text{ м}$ ;  $T_m^{\circ} = T_0^{\circ} = 15^{\circ} \text{ С}$ ;  $q_n = q_{\text{л}} = 1,09 \text{ кг/м}$ ;  $T_n^{\circ} = T_{\text{макс}}^{\circ} = 40^{\circ} \text{ С}$ ;  $f_n = f_3$ .

Подставляя числовые значения, получим:

$$f_3^3 - \left[ 2,58^2 + \frac{3}{8} \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (40 - 15) - \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,58 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} \right] / \pi - \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} = 0,$$

или

$$f_3^3 - 7f_3 - 3,28 = 0.$$

Решая уравнение, найдем, что

$$f_3 = 2,85 \text{ м.}$$

Стрела провисания в третьем случае больше, чем после подвешивания (при  $T_0^0 = 15^\circ \text{ С}$ ), а также больше, чем в первом случае. Очевидно, она больше стрелы провисания, которую будет иметь провод и во втором случае (при  $T_{\text{мин}}^0 = -40^\circ \text{ С}$ ).

Для того чтобы низшая точка провода находилась на расстоянии не менее 6 м от земли, нужно точки подвеса расположить не ниже  $6 \text{ м} + 2,85 \text{ м} = 8,85 \text{ м}$ .

## Глава VI

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

#### § 39. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЧКЕ. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют смещению частиц, ограничивая его в большинстве случаев некоторой малой величиной.

В соответствии с гипотезой о сплошности материала следует считать, что каждая частица тела в сколь угодно малой окрестности имеет бесконечное множество других частиц, окружающих ее по всем направлениям. Расположенная в данной точке частица по-разному взаимодействует с каждой из этих соседних частиц. Поэтому в одной и той же точке по разным направлениям напряжения будут различными и только в очень редких случаях они одинаковы во всех направлениях.

Для того чтобы установить, действуют ли в данной точке  $A$  тела напряжения в каком-либо направлении (а затем и вычислить их), нужно провести через эту точку соответствующее плоское сечение и рассмотреть малые площадки (рис. 151), включающие точку  $A$  и принадлежащие двум разным сторонам этого сечения.

Если под действием внешних нагрузок площадки стремятся отойти одна от другой или же придавиться друг к другу, то между ними

возникают нормальные напряжения  $\sigma$ , соответственно растягивающие или сжимающие. Если площадки стремятся сдвинуться одна относительно другой, то между ними возникают касательные напряжения  $\tau$ . Если, наконец, одна площадка стремится отойти от другой в каком-нибудь произвольном направлении, оставаясь при этом ей параллельной, то возникает полное напряжение  $\rho$ , вектор которого совпадает с этим направлением. Перемещение площадки в этом случае может быть геометрически разложено на два перемещения: взаимное удаление площадок и сдвиг. В соответствии с этим вектор полного напряжения можно разложить на векторы нормального и касательного напряжений.

Справедливо и обратное утверждение: если по площадкам имеются напряжения  $\sigma$ , то у этих площадок есть тенденция отойти друг от друга (или сблизиться); если же по площадкам действуют  $\tau$ , — тенденция сдвинуться относительно друг друга.

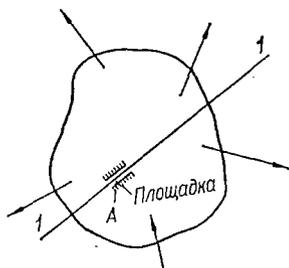


Рис. 151.

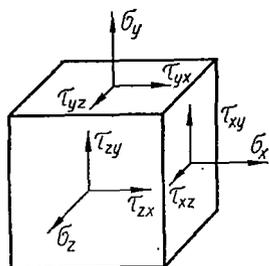


Рис. 152.

Как и усилия в сечении, напряжения, приложенные к одной стороне сечения, равны по величине и противоположны по направлению напряжениям, приложенным к другой стороне сечения. Отсюда, в частности, вытекает, что на площадке, выделенной на незагруженной части поверхности тела, нет никаких напряжений. Говорят, что такие поверхности или площадки свободны от напряжений.

В одной и той же точке напряжения будут различными в зависимости от того, к какому сечению (к какой площадке) отнести эту точку. Совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через одну точку, характеризует напряженное состояние тела в этой точке.

Исследуя напряженное состояние тела в данной точке, в окрестности ее обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 152). На его гранях действуют внутренние силы, заменяющие воздействие удаленной части тела. Полные напряжения на гранях элемента представляем нормальными и касательными составляющими. Если ориентацию граней выделяемого элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения, как указывалось, будут изменяться. При этом можно провести такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на них —

главными напряжениями. Можно доказать, что, как бы ни было загружено тело, в каждой точке его имеются, по крайней мере, три главные площадки, причем они взаимно перпендикулярны. Следовательно, в каждой точке будут и три главных напряжения и они тоже взаимно перпендикулярны. Направления, параллельные главным напряжениям, называются *главными направлениями напряженного состояния* в данной точке.

Главные напряжения условимся всегда обозначать  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ; при этом индексы следует расставлять так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (6.1)$$

Понимаем это неравенство в алгебраическом смысле, поэтому, если, например, одно из главных напряжений равно нулю, другое (растягивающее) составляет  $600 \text{ кг/см}^2$ , третье (сжимающее) равно  $-1400 \text{ кг/см}^2$ , то их следует обозначить так:

$$\sigma_1 = +600 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -1400 \text{ кг/см}^2.$$

Такое напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, называется *одноосным*, или *линейным* (рис. 153, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то это будет *двухосное*, или *плоское*, напряженное состояние (рис. 153, б). Когда все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется *трехосным*, или *объемным* (рис. 153, в).

Кроме того, различают однородные и неоднородные напряженные состояния. В однородном напряженном состоянии напряжения одинаковы в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечений. В случае однородного напряженного состояния размеры выде-

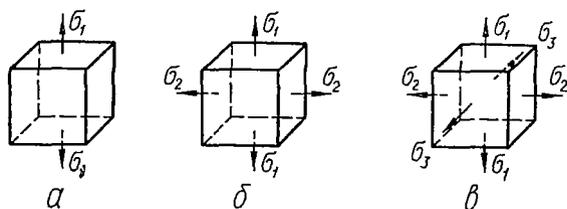


Рис. 153.

ляемых элементов не играют никакой роли, так как напряжения одинаковы во всех точках одной (любой) грани и, следовательно, равномерно распределены по каждой грани.

В неоднородном напряженном состоянии элемент следует полагать бесконечно малым. Тогда предположение о равномерном распределении напряжений по граням будет выполняться с точностью до малых второго порядка. Следовательно, независимо от того, будет ли во всем теле однородное или неоднородное напряженное состояние, выделенные элементы будут всегда находиться в однородном напряженном состоянии.

## § 40. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Элементы, находящиеся в линейном напряженном состоянии, встречаются и в некоторых точках стержня, работающего на изгиб или сложное сопротивление, но, главным образом, в стержнях, испытывающих растяжение или сжатие.

Рассмотрим стержень, испытывающий простое растяжение (рис. 154, а). Как указывалось, в сечениях, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил, напряжения распределяются равномерно. В поперечных сечениях стержня нормальные напряжения (см. § 28)

$$\sigma_0 = \frac{N}{F_0} = \frac{P}{F_0}. \quad (6.2)$$

Касательные напряжения здесь равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками.

Перейдем теперь к определению напряжений в неглавных, наклонных площадках. Элемент, находящийся в линейном напряженном состоянии (а также и в двухосном), будем изображать в виде плоской фигуры (рис. 154, б), помня, однако, что в действительности он имеет вид, изображенный на рис. 154, а.

Наклон площадки определяется острым углом  $\alpha$  между направлением оси стержня и нормалью  $n_\alpha$  к площадке. Условимся считать угол  $\alpha$  положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки. Введенную таким образом наклонную площадку будем обозначать  $(\alpha)$ , а действующие в ней напряжения —  $p_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ .

Для вычисления этих напряжений применим метод сечений. Считая, что наклонная площадка рассекла элемент на две части, отбросим одну из них, например верхнюю, и рассмотрим равновесие оставшейся, нижней части<sup>1</sup>.

По наклонной площадке, площадь которой равна  $F_\alpha$ , равномерно распределены полные напряжения  $p_\alpha$ , параллельные осевой силе  $N = P$  в сечении. Следовательно, результирующая этих напряжений

$$p_\alpha F_\alpha = N.$$

Отсюда

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha.$$

Проектируя  $p_\alpha$  на нормаль  $n_\alpha$  и на плоскость сечения, получим выражения для нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_\alpha \cos \alpha; \\ \tau_\alpha &= p_\alpha \sin \alpha, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Здесь и всюду дальше будем считать, что стрелка нормали указывает на ту часть, которую отбрасываем, иначе говоря,  $n_\alpha$  — это внешняя нормаль к оставшейся части элемента.

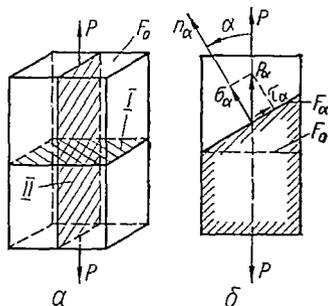


Рис. 154.

ИЛИ

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (6.3)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.4)$$

Для напряжений принимаем следующее правило знаков: нормальное напряжение  $\sigma_{\alpha}$  положительно, если оно растягивающее; касательное напряжение  $\tau_{\alpha}$  положительно, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть элемента относительно любой точки, взятой внутри ее, по часовой стрелке. На рис. 154, б напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  положительны.

Как видно из формул (6.4) и (6.3), при  $\alpha = 0$  (рис. 154, а, площадка I)  $\tau_{\alpha} = 0$ , а  $\sigma_{\alpha} = \sigma_0$ . При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (рис. 154, а, площадка II) и  $\tau_{\alpha}$ , и  $\sigma_{\alpha}$  равны нулю. Аналогично можно доказать, что во всех сечениях, параллельных оси стержня, нормальные и касательные напряжения также равны нулю. Таким образом, при простом растяжении (сжатии) в каждой точке тела главные площадки перпендикулярны и параллельны его оси, а главные напряжения на них соответственно равны:

при растяжении

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{N}{F_0}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

при сжатии

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sigma_0.$$

Из выражения (6.4) видим, что касательные напряжения достигают своей наибольшей величины при  $\alpha = \pm 45^\circ$ , причем

$$\tau_{\alpha_{\max}} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (6.5)$$

*Пример 15.* Определить нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках для элементов, показанных на рис. 155, а - в.

Для элемента на рис. 155, а

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -500 \text{ кг/см}^2; \quad \alpha = 30^\circ,$$

откуда

$$\sigma_{\alpha} = -500 \cos^2 30^\circ = -375 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{500}{2} \sin 60^\circ = -217 \text{ кг/см}^2.$$

Для элемента, показанного на рис. 155, б,  $\sigma_1 = 500 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\alpha = -30^\circ$  и, значит,

$$\sigma_{\alpha} = 500 \cos^2 (-30^\circ) = 375 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{500}{2} \sin (-60^\circ) = -217 \text{ кг/см}^2.$$

Для элемента, показанного на рис. 155, в,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -500 \text{ кг/см}^2$ ;  $\alpha = -30^\circ$ , следовательно,

$$\sigma_{\alpha} = -500 \cos^2 (-30^\circ) = -375 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{500}{2} \sin (-60^\circ) = 217 \text{ кг/см}^2.$$

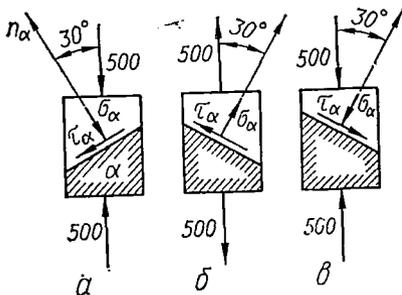


Рис. 155.

## § 41. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При исследовании напряженного состояния элементов конструкций наиболее часто приходится иметь дело с плоским (двухосным) напряженным состоянием. Оно встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении. Поэтому на нем мы остановимся несколько подробнее.

Все определения и правила, которые были введены в предыдущем параграфе, остаются в силе и для плоского напряженного состояния. Поскольку, однако, здесь имеются два отличных от нуля главных напряжения, необходимо уточнить условие для отсчета углов, характеризующих наклон площадок. Будем считать, что этот угол всегда отсчитывается от направления алгебраически большего из двух отличных от нуля главных напряжений до нормали к наклонной площадке, причем всегда берется острый угол, но с учетом его знака.

Определим напряжения на наклонных площадках. Рассмотрим элемент (рис. 156), грани которого являются главными площадками и по ним действуют положительные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а третье главное напряжение  $\sigma_3 = 0$  (главное направление, соответствующее  $\sigma_3$ , перпендикулярно к плоскости чертежа).

Проведем сечение  $I-I$ , которое определит площадку ( $\alpha$ ), характеризующую положительным углом  $\alpha$ . Напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  по этой площадке будут вызываться как действием  $\sigma_1$ , так и действием  $\sigma_2$ . Применяя принцип суперпозиции, т. е. рассматривая данное плоское напряженное состояние как наложение двух ортогональных одноосных напряженных состояний, можем записать:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha; \\ \tau_\alpha &= \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,\end{aligned}$$

где  $\sigma'_\alpha$  и  $\tau'_\alpha$  — напряжения, вызванные действием  $\sigma_1$ ;  
 $\sigma''_\alpha$  и  $\tau''_\alpha$  — напряжения, вызванные действием  $\sigma_2$ .

Чтобы вычислить  $\sigma'_\alpha$  и  $\tau'_\alpha$ , воспользуемся непосредственно формулами (6.3) и (6.4):

$$\begin{aligned}\sigma'_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha; \\ \tau'_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Для определения  $\sigma''_\alpha$  и  $\tau''_\alpha$  следует учесть, что  $n_\alpha$  образует с направлением  $\sigma_2$  угол  $90^\circ - \alpha$ . Тогда, имея в виду, что

$$\sin 2[-(90^\circ - \alpha)] = -\sin 2\alpha; \quad \cos^2[-(90^\circ - \alpha)] = \sin^2 \alpha,$$

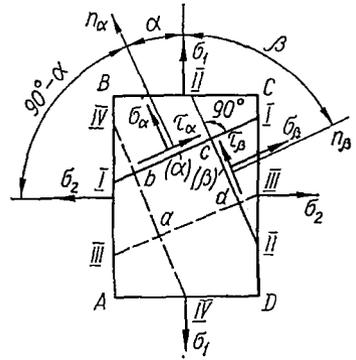


Рис. 156.

получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}'' &= \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha}'' &= -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Складывая, найдем, что

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; & (6.6) \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. & (6.7)\end{aligned}$$

Напомним, что сжимающие главные напряжения подставляются в эти формулы со знаком минус, а угол  $\alpha$  отсчитывается от алгебраически большего главного напряжения.

Воспользуемся формулами (6.6) и (6.7) для нахождения напряжений на площадке, перпендикулярной к площадке ( $\alpha$ ). Условимся такую площадку обозначать ( $\beta$ ). Нормаль  $n_{\beta}$  к ней (рис. 156, сечение II—II) образует с направлением  $\sigma_1$  угол

$$\beta = -(90^{\circ} - \alpha).$$

Формулы (6.6) и (6.7) верны для любых  $\alpha$ . Подставив в них вместо  $\alpha$  указанное значение  $\beta$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; & (6.8) \\ \tau_{\beta} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. & (6.9)\end{aligned}$$

Совокупность формул (6.6)—(6.9) дает возможность находить напряжения по любым взаимно перпендикулярным наклонным площадкам, если известны главные напряжения. Проведем анализ этих формул.

Складывая левые и правые части равенств (6.6) и (6.8), обнаруживаем, что

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (6.10)$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам не зависит от наклона этих площадок и равна сумме главных напряжений. Иначе это свойство может быть сформулировано так: *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам инвариантна по отношению к наклону этих площадок.*

Из формулы (6.7) или (6.9) видим, что, как и в одноосном напряженном состоянии, касательные напряжения достигают наибольшей величины при  $\alpha = \pm 45^{\circ}$ , т. е. по площадкам, наклоненным к главным площадкам под углом  $45^{\circ}$ , причем

$$\tau_{\alpha_{\max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (6.11)$$

Сравнивая формулы (6.7) и (6.9) находим, что

$$\boxed{\tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}} \quad (6.12)$$

Это равенство выражает закон парности касательных напряжений. Его можно сформулировать так: *если по какой-либо площадке имеется некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке непременно будет действовать касательное напряжение, равное ему по величине и противоположное по знаку.*

Наконец, выясним, при каком наклоне площадок действующие по ним нормальные напряжения будут иметь экстремальную (наибольшую или наименьшую) величину. Для этого продифференцируем выражение (6.6) по  $\alpha$  и приравняем производную нулю:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0.$$

Отсюда или

$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

или

$$\sin 2\alpha = 0.$$

В первом (частном) случае (равномерное всестороннее растяжение в плоскости) из формул (6.6)—(6.9) получаем:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = \sigma_1; \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\beta} = 0.$$

Это значит, что любая площадка будет главной. На всех этих площадках действуют одинаковые напряжения.

Во втором (общем) случае имеем:

$$\alpha = 0^{\circ}; \quad \alpha = 90^{\circ}.$$

Но площадки, характеризуемые этими углами, являются главными площадками.

Таким образом, приходим к заключению, что экстремальными значениями для нормальных напряжений  $\sigma_{\alpha}$  будут величины главных напряжений, причем

$$\sigma_{\alpha_{\text{макс}}} = \sigma_1,$$

поскольку при  $\alpha = 0$  вторая производная

$$\frac{d^2\sigma_{\alpha}}{d\alpha^2} = -2(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$

отрицательна, и

$$\sigma_{\alpha_{\text{мин}}} = \sigma_2,$$

поскольку при  $\alpha = 90^{\circ}$

$$\frac{d^2\sigma_{\alpha}}{d\alpha^2} > 0.$$

На всех наклонных площадках нормальные напряжения имеют значения, промежуточные по величине между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Проведем теперь еще два сечения (рис. 156): сечение III—III, параллельное I—I, и сечение IV—IV, параллельное II—II. Поскольку напряженное состояние элемента однородное, напряжения по площадкам, образованным сечениями III—III и IV—IV, будут такими же, как соответственно в площадках ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ). Поэтому элемент  $abcd$ , выделенный четырьмя сечениями из элемента  $ABCD$  (рис. 157, а), будет иметь вид, показанный на рис. 157, б. Оба элемента определяют одно и то же напряженное состояние, но элемент  $ABCD$  представляет его главными напряжениями, а элемент  $abcd$  — напряжениями в наклонных площадках.

В теории напряженного состояния можно разграничить две основные задачи.

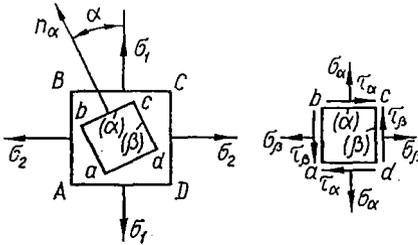


Рис. 157.

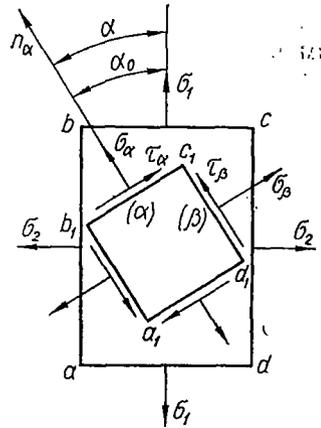


Рис. 158.

**Прямая задача.** В точке известны положения главных площадок и соответствующие им главные напряжения; требуется найти нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом к главным. Иначе говоря, дан элемент  $abcd$  (рис. 158) с действующими по его граням главными напряжениями; требуется найти напряжения в гранях элемента  $a_1b_1c_1d_1$ .

**Обратная задача.** В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие в двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку; требуется найти главные направления и главные напряжения. Иначе говоря, дан элемент  $a_1b_1c_1d_1$  (рис. 158) с действующими по его граням нормальными и касательными напряжениями; нужно определить положение элемента  $abcd$ , т. е. угол  $\alpha_0$ , и найти главные напряжения.

Обе задачи можно решать как аналитическим, так и графическим путем.

## § 42. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. КРУГ НАПРЯЖЕНИЙ

Аналитическое решение прямой задачи дается формулами (6.6)—(6.9).

Проанализируем напряженное состояние, воспользовавшись простым графическим построением. Для этого введем в рассмотрение

геометрическую плоскость и отнесем ее к прямоугольным координатным осям  $\sigma$  и  $\tau$ , т. е. по оси абсцисс будем откладывать значения главных напряжений, а также напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$ , а по оси ординат — значения  $\tau_\alpha$  и  $\tau_\beta$ . Порядок решения опишем на примере напряженного состояния, изображенного на рис. 159.

Выбрав для напряжений некоторый масштаб, откладываем на оси абсцисс (рис. 160) отрезки

$$\overline{OA} = \sigma_1, \quad \overline{OB} = \sigma_2.$$

На  $AB$  как на диаметре строим окружность с центром в точке  $C$ . Построенный круг носит название *круга напряжений*, или *круга Мора*.

Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках. Так, для определения напряжений на площадке, проведенной под углом  $\alpha$  (рис. 159),

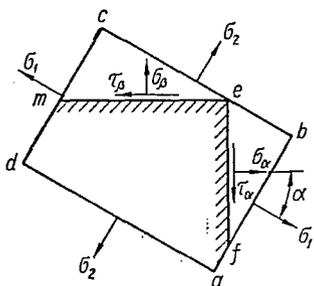


Рис. 159.

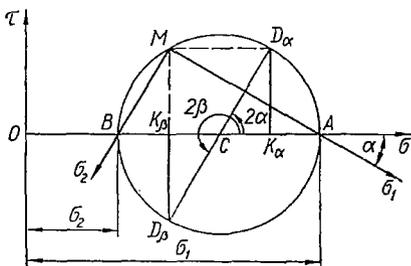


Рис. 160.

из центра круга  $C$  проводим луч под углом  $2\alpha$  до пересечения с окружностью в точке  $D_\alpha$  (положительные углы откладываем против часовой стрелки). Докажем, что абсцисса точки (отрезок  $\overline{OK}_\alpha$ ) равна нормальному напряжению  $\sigma_\alpha$ , а ордината ее (отрезок  $\overline{K}_\alpha D_\alpha$ ) — касательному напряжению  $\tau_\alpha$ .

Радиус круга

$$R = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Поскольку центр круга  $C$  лежит посередине между точками  $A$  и  $B$ , то

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Далее,

$$\overline{CK}_\alpha = R \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Тогда абсцисса точки  $D_\alpha$

$$\begin{aligned} \overline{OK}_\alpha &= \overline{OC} + \overline{CK}_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из треугольника  $CD_\alpha K_\alpha$  ордината точки  $D_\alpha$

$$\overline{K_\alpha D_\alpha} = R \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.14)$$

Напряжение на площадке, перпендикулярной к рассмотренной, найдем, проведя луч под углом  $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2\alpha + \pi$  и получив в пересечении с окружностью точку  $D_\beta$ . Очевидно, ордината точки  $D_\beta$

$$\overline{K_\beta D_\beta} = -K_\alpha D_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\beta \quad (6.15)$$

и, наконец, абсцисса точки  $D_\beta$

$$\begin{aligned} \overline{OK_\beta} &= \overline{OC} - \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_\beta. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Сравнивая формулы (6.13), (6.14) с формулами (6.6), (6.7), видим что, действительно,

$$\overline{OK_\alpha} = \sigma_\alpha; \quad \overline{K_\alpha D_\alpha} = \tau_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Следует подчеркнуть, что две точки круга —  $D_\alpha$  и  $D_\beta$ , характеризующие напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ), всегда лежат на концах одного диаметра  $D_\alpha D_\beta$ .

Построенный круг Мора полностью описывает напряженное состояние элемента, изображенного на рис. 159. Если менять угол  $\alpha$  в пределах от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ , то наклонные площадки ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ) займут последовательно все возможные положения, а точки  $D_\alpha$  и  $D_\beta$  опишут полный круг. В частности, при  $\alpha = 0$ , когда грани  $ef$  и  $em$  станут главными площадками и по ним будут действовать те же напряжения, что и в гранях элемента  $abcd$ , точка  $D_\alpha$  совпадет с  $A$  (рис. 160), а  $D_\beta$  — с  $B$ .

Как и в случае круга инерции, найдем на круге напряжений положение полюса. Для этого из какой-либо точки круга проведем прямую, параллельную нормальному напряжению на площадке, которой эта точка соответствует. Так, проведя из точки  $D_\alpha$  линию, параллельную  $\sigma_\alpha$  (в нашем примере (рис. 160) — горизонталь), до пересечения с кругом, найдем искомый полюс — точку  $M$ . Если бы при этом мы исходили из точки  $D_\beta$ , то следовало провести линию, параллельную напряжению  $\sigma_\beta$ , т. е. вертикаль.

Как и при рассмотрении кругов инерции, можно доказать, что линия, соединяющая полюс  $M$  с любой точкой круга, параллельна направлению нормального напряжения на площадке, которой эта точка соответствует. Так, например, линия  $MA$  параллельна главному напряжению  $\sigma_1$ . Действительно,  $\angle D_\alpha MA = \frac{1}{2} \angle D_\alpha CA = \alpha$ , т. е. он соответствует углу между нормалью к площадке  $fe$  и направлением  $\sigma_1$ . Очевидно, что линия  $MB$  параллельна направлению главного напряжения  $\sigma_2$ .

**Пример 16.** На главных площадках действуют растягивающие напряжения  $900 \text{ кг/см}^2$  и  $600 \text{ кг/см}^2$ . Требуется найти нормальные и касательные напряжения по граням элемента, одна из которых наклонена к горизонтالي под углом  $20^\circ$  (рис. 161, а).

Произвольным образом обозначаем площадки (а) и (б) (например, так, как показано на рисунке) и проводим нормаль  $n_\alpha$ . Тогда будем иметь  $\sigma_1 = 900 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_2 = 600 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_3 = 0$ ;  $\alpha = -70^\circ$ . Угол  $\alpha$  отрицательный, так как здесь он отсчитывается по часовой стрелке.

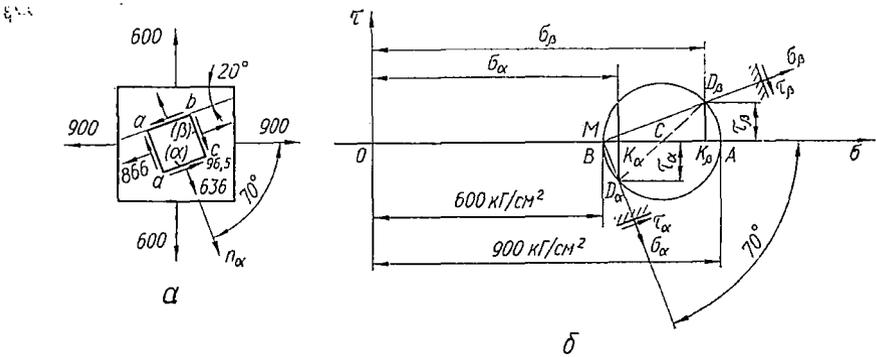


Рис. 161.

Решая данную прямую задачу аналитически, по формулам (6.6) — (6.9) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = 900 \cdot 0,117 + 600 \cdot 0,884 = 636 \text{ кг/см}^2; \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = 900 \cdot 0,884 + 600 \cdot 0,117 = 866 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_\alpha &= -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{900 - 600}{2} (-0,643) = -96,5 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Учитывая знаки вычисленных напряжений, показываем напряжения в гранях элемента  $abcd$  (рис. 161, а).

Графическое решение приведено на рис. 161, б. Произведя измерения, получаем координаты точек  $D_\alpha$  (3,18 см;  $-0,485$  см) и  $D_\beta$  (4,33 см; 0,485 см). Имея в виду принятый масштаб (1 см —  $200 \text{ кг/см}^2$ ), приходим к тем же значениям напряжений, которые были вычислены выше.

Заметим, что одноосное напряженное состояние может рассматриваться как частный случай плоского. При этом круг напряжений будет проходить через начало координат (рис. 162).

Наконец, в случае равномерного всестороннего растяжения ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) или сжатия ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) в плоскости круг Мора превращается в точку. Тогда, как уже указывалось ранее, все площадки будут главными.

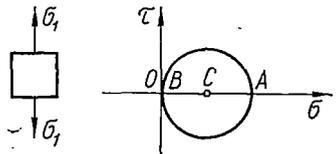


Рис. 162.

### § 43. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

При практических расчетах наиболее часто удается определить (теоретически или экспериментально) нормальные и касательные напряжения на некоторых двух взаимно перпендикулярных площадках. Пусть, например, известны напряжения  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  на взаимно

перпендикулярных площадках выделенного элемента (рис. 163, а). По этим данным требуется определить величины главных напряжений и положение главных площадок.

Сначала решим эту задачу графически. Для определенности примем, что  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ , а  $\tau_\alpha > 0$ . В геометрической плоскости в системе прямоугольных координат  $\sigma - \tau$  нанесем точку  $D_\alpha$  с координатами  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  и точку  $D_\beta$  с координатами  $\sigma_\beta, \tau_\beta$  (рис. 163, б). Как указывалось при рассмотрении прямой задачи, точки  $D_\alpha$  и  $D_\beta$  лежат на концах одного диаметра. Следовательно, соединив их, находим центр круга — точку  $C$  — и радиусом  $\overline{CD}_\alpha = \overline{CD}_\beta$  проводим окружность. Абсциссы точек ее пересечения с осью  $\sigma$  — отрезки  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  — дадут соответственно величины главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

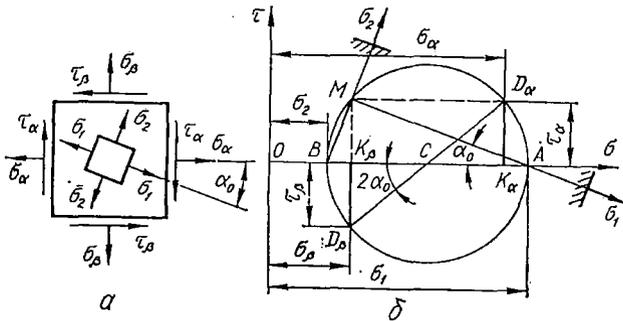


Рис. 163.

Для определения положения главных площадок найдем полюс и воспользуемся его свойством. С этой целью из точки  $D_\alpha$  проведем линию параллельно линии действия напряжения  $\sigma_\alpha$ , т. е. горизонталь. Точка  $M$  пересечения этой линии с окружностью и является полюсом. Соединяя полюс  $M$  с точками  $A$  и  $B$ , получим направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Главные площадки перпендикулярны найденным направлениям главных напряжений. На рис. 163, а внутри исходного элемента выделен элемент, ограниченный главными площадками. На гранях элемента показаны главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Используем построенный круг напряжений для получения аналитических выражений главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , соответствующих отрезкам  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ . Имеем:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}; \quad (6.17)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB}. \quad (6.18)$$

Очевидно,

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad (6.19)$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}_\alpha = \sqrt{\overline{CK}_\alpha^2 + \overline{D_\alpha K_\alpha^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (6.20)$$

Подставляя выражения (6.19) и (6.20) в выражения (6.17) и (6.18), получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

или

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]. \end{aligned}} \quad (6.21)$$

Учитывая принятое правило знаков, найдем выражение для тангенса угла наклона главного напряжения  $\sigma_1$  к оси  $\sigma$ . Из чертежа следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{MK_\beta}{AK_\beta} = -\frac{MK_\beta}{OA - OK_\beta} = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}} \quad (6.22)$$

Эта формула и определяет единственное значение угла  $\alpha_0$ , на который нужно повернуть нормаль  $n_\alpha$ , чтобы получить направление алгебраически большего главного напряжения. Напомним, что отрицательному значению  $\alpha$  соответствует поворот по часовой стрелке. Следует обратить внимание и на то, что если одно из главных напряжений, вычисленных по формулам (6.21), окажется отрицательным, а другое положительным, то их следует обозначать не  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Если же оба главных напряжения окажутся отрицательными, то  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

*Пример 17.* По граням элемента (рис. 164, а) действуют показанные напряжения. Нужно найти главные напряжения и соответствующие им главные направления.

Если обозначим площадки так, как показано на рисунке, то

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= 1000 \text{ кг/см}^2; & \sigma_\beta &= -800 \text{ кг/см}^2; \\ \tau_\alpha &= -500 \text{ кг/см}^2; & \tau_\beta &= 500 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

По формуле (6.21) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1000 - 800 + \sqrt{(1000 + 800)^2 + 4 \cdot 500^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [200 + 2060] = 1130 \text{ кг/см}^2; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} [200 - 2060] = -930 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

По формуле (6.22)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-(-500)}{1130 - (-800)} = \frac{500}{1930} = 0,259;$$

$$\alpha_0 = 14^\circ 32'.$$

Этот угол откладываем от [горизонтали (направление  $n_\alpha$ ) против часовой стрелки и получаем направление  $\sigma_1$ ; направление  $\sigma_3$  перпендикулярно ему.

На рис. 164 выполнено также графическое решение задачи в соответствии с изложенным выше планом.

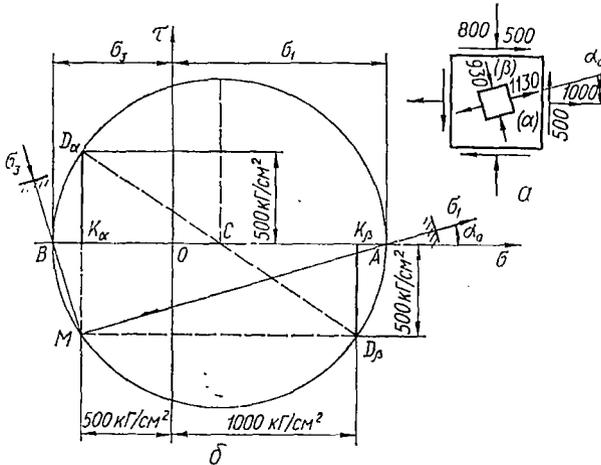


Рис. 164.

#### § 44. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В задачах сопротивления материалов трехосное, или объемное, напряженное состояние встречается редко. Поэтому отметим здесь лишь некоторые моменты теории объемного напряженного состояния.

На рис. 165 изображен элемент, который находится в объемном напряженном состоянии и грани которого представляют собой главные площадки. Вычислим для него напряжения на других, неглавных площадках.

Вначале рассмотрим площадки, параллельные одному из главных напряжений, например, произвольную площадку  $I$ , параллельную главному напряжению  $\sigma_1$ . Как указывалось выше, нормальные и касательные напряжения на такой площадке не зависят от  $\sigma_1$  и целиком определяются величинами  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и наклоном площадки. Напряженное состояние на таких площадках может быть изображено графически при помощи круга Мора  $L_1$  (рис. 166), построенного на главных напряжениях  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Совокупность всех точек этой окружности описывает напряженное состояние всех сечений, проведенных в элементе параллельно  $\sigma_1$ .

Точно так же напряженное состояние площадок II, параллельных  $\sigma_2$ , будет описываться точками окружности  $L_{II}$ , построенной на  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , а напряженное состояние площадок III, параллельных  $\sigma_3$  — точками окружности  $L_{III}$ . Точки  $C_I, C_{II}$  и  $C_{III}$  — соответственно центры этих окружностей.

Можно показать, что напряженное состояние на площадках, не параллельных ни одному из главных напряжений, изображается точками  $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ , лежащими в заштрихованной области (рис. 166). Аналитически нормальное и касательное напряжения на таких площадках могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке с направлениями  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  соответственно.

Легко установить, на каких площадках будет действовать наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$  при трехосном напряженном состоянии, и найти его величину.

Очевидно, что точкой, характеризующей напряженное состояние площадки, в которой действует  $\tau_{\max}$ , будет точка  $D$  (рис. 166), так как она имеет наибольшую ординату. Точка  $D$  лежит на окружности  $L_{II}$ , определяется углом  $\alpha = 45^\circ$  и имеет ординату, равную

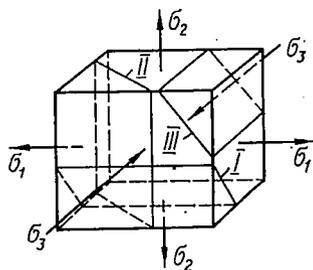


Рис. 165.

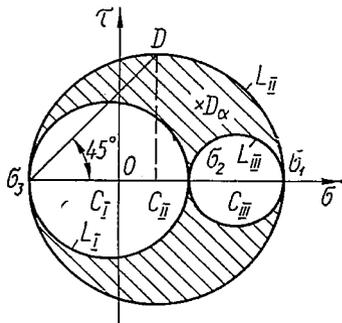


Рис. 166.

радиусу большого круга, т. е.  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ . Следовательно, при любом объемном напряженном состоянии наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (6.24)$$

действует по площадке, параллельной главному напряжению  $\sigma_2$  и наклоненной под углом  $45^\circ$  к главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Известный интерес, особенно, при изучении пластических деформаций, представляет касательное напряжение, действующее по площадке, равнонаклоненной ко всем главным направлениям. Такая площадка называется *октаэдрической*, поскольку она параллельна

грани октаэдра, который может быть образован из куба. Нормаль к этой площадке образует равные углы с главными направлениями:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Учитывая, что всегда

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

получаем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}.$$

Тогда из формул (6.23) находим:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (6.25)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (6.26)$$

Это касательное напряжение называется *октаэдрическим*. Напряжение  $\sigma_{\text{окт}}$  представляет собой как бы среднее напряжение для данного трехосного напряженного состояния.

В заключение отметим, что все зависимости и способы решения задач, описанные в этом и предыдущих параграфах гл. VI, верны для напряженных состояний, соответствующих как упругим, так и пластическим деформациям.

#### § 45. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Исследуя деформации и рассматривая вопросы прочности при объемном и плоском напряженных состояниях, будем в соответствии с основными гипотезами и допущениями предполагать, что материал следует закону Гука, а деформации малы.

Изучая простое растяжение—сжатие, мы выяснили, что относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (6.27)$$

а относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \mu \frac{\sigma}{E}. \quad (6.28)$$

Эти два равенства выражали закон Гука (зависимость между деформациями и напряжениями) при простом растяжении или сжатии, т. е. при линейном напряженном состоянии. Здесь установим зависимости между деформациями и напряжениями в общем случае объемного напряженного состояния.

**Обобщенный закон Гука.** Рассмотрим деформацию элемента тела, выбрав этот элемент в виде прямоугольного параллелепипеда размерами  $a \times b \times c$  (рис. 167). По граням параллелепипеда действуют главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (для вывода предполагаем, что все они положительны). Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными  $a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c$ .

Величины

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}, \quad \epsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}, \quad \epsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

называются *главными удлинениями* и представляют собой относительные удлинения в главных направлениях.

Применяя принцип суперпозиции, можно записать:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''',$$

где  $\epsilon_1'$  — относительное удлинение в направлении  $\sigma_1$ , вызванное только действием только напряжений  $\sigma_1$  (при  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ );

$\epsilon_1''$  — удлинение в том же направлении, вызванное действием только  $\sigma_2$ ;

$\epsilon_1'''$  — удлинение, вызванное действием  $\sigma_3$ .

Поскольку направление  $\sigma_1$  для самого напряжения  $\sigma_1$  является продольным, а для напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  — поперечным, то, применяя формулы (6.27) и (6.28), находим, что

$$\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Сложив эти величины, будем иметь:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогично получим выражения и для двух других главных удлинений. В результате

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Формулы (6.29) носят название *обобщенного закона Гука для изотропного тела*. Он выражает зависимость между линейными дефор-

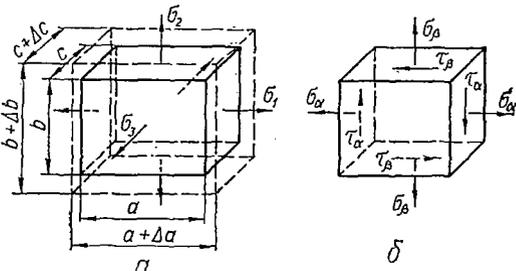


Рис. 167.

мациями и главными напряжениями в общем случае трехосного напряженного состояния. Заметим, что сжимающие напряжения подставляют в эти формулы со знаком минус. Из формул (6.29) легко можно получить закон Гука для плоского напряженного состояния. Например, для случая  $\sigma_2 = 0$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3); \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu\sigma_1).\end{aligned}\tag{6.30}$$

Выражения (6.29) справедливы не только для главных деформаций но и для относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям, поскольку при малых деформациях влияние сдвига на линейную деформацию представляет собой величину второго порядка малости. Так, относительные удлинения в направлении действия напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  (рис. 167, б)

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta); \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha).\end{aligned}\tag{6.31}$$

**Объемная деформация.** Установим связь между относительным изменением объема  $\varepsilon_V$  и главными напряжениями.

До деформации элемент занимал объем  $V_0 = abc$ . В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned}V &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = \\ &= abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = V_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Учитывая незначительную величину деформаций, последними четырьмя членами можем пренебречь. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Выразив главные удлинения через главные напряжения при помощи формул (6.29), получим:

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}.\tag{6.32}$$

В частности, при равномерном всестороннем сжатии, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ,

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K},$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (6.33)$$

Величина  $K$  называется *модулем объемной деформации*. Из формулы (6.32) видно, что при деформации тела, материал которого имеет коэффициент Пуассона  $\mu = 0,5$  (например резина), объем тела не меняется.

*Пример 18.* Брус плотно, но без напряжения вставлен между двумя неподвижными стенками и подвергается сжатию равномерно распределенными по горизонтальным граням силами  $P$  (рис. 168). Пренебрегая трением между бруском и стенками, найти силы давления его на стенки и изменение его размеров, если  $E$  и  $\mu$  материала бруса известны.

Напряжения сжатия, которые возникают в продольном направлении, являются следствием эффекта Пуассона и стесненности деформации, т. е. представляют вторичный эффект, вызванный действием напряжений в вертикальном направлении. Поэтому предполагаем, что они по величине меньше, чем вертикальные. Учитывая это, вводим для напряжений обозначения, указанные на рис. 168 (это будут главные напряжения, так как  $\tau$  в гранях бруса, очевидно, отсутствуют). Тогда имеем:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{bh}; \quad \sigma_3 = -\frac{P}{bl}$$

и, поскольку по условию задачи размер  $l$  не изменяется,  $\epsilon_3 = 0$ . Через  $N$  обозначено давление стенок на брус. Из второй формулы (6.29)

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_3) = 0,$$

т. е.

$$\sigma_2 = \mu\sigma_3 = -\frac{\mu P}{bl}.$$

Значит,

$$N = -bh\sigma_2 = \frac{\mu Ph}{l}.$$

Далее,

$$\Delta b = \epsilon_1 b = -\frac{b\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\mu(1+\mu)P}{El};$$

$$\Delta h = \epsilon_3 h = \frac{h}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_2) = -(1-\mu^2)\frac{Ph}{blE}.$$

Относительное изменение объема по формуле (6.32)

$$\epsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} \left( 0 - \frac{\mu P}{bl} - \frac{P}{bl} \right) = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{blE} P,$$

а изменение объема бруса

$$\Delta V = \epsilon_V V = \epsilon_V bllh = -(1-2\mu)(1+\mu)\frac{Ph}{E}.$$

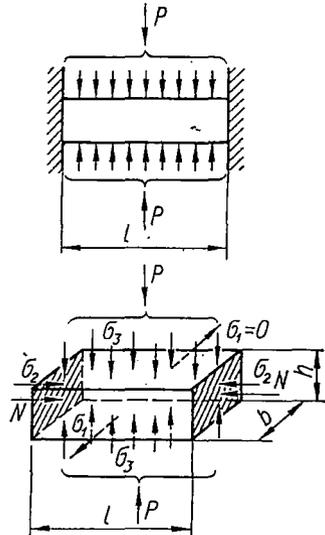


Рис. 168.

## § 46. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

*Потенциальной энергией деформации* называется энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации. Когда под действием внешней статической нагрузки тело деформируется, точки приложения внешних сил перемещаются и потенциальная энергия положения груза убывает на величину, которая численно равна работе, совершенной внешними силами. Энергия, потерянная внешними силами, не исчезает, а превращается, в основном, в потенциальную энергию деформации тела. Остальная, незначительная часть рассеивается, главным образом, в виде тепла за счет различных процессов, происходящих в материале при его деформации.

Потенциальная энергия деформации  $U$  накапливается в обратимой форме — в процессе разгрузки тела она снова превращается в энергию внешних сил или в кинетическую энергию. Величину потенциальной энергии деформации, приходящуюся на единицу объема ( $1 \text{ см}^3$ ) тела, называют *удельной потенциальной энергией деформации* и обозначают  $u$ . В разных точках тела величина  $u$  может быть различной.

Величину потенциальной энергии деформации можно легко вычислить на основе закона сохранения энергии. Поскольку при статической нагрузке кинетическая энергия системы остается неизменной, то приращение потенциальной энергии деформации  $U$  равно уменьшению потенциальной энергии положения внешних сил  $U_{\text{п}}$ :

$$U = U_{\text{п}}.$$

Уменьшение потенциальной энергии внешних грузов численно равно работе  $A_P$ , совершенной ими при деформации:

$$U_{\text{п}} = A_P.$$

Таким образом, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела:

$$U = A_P. \quad (6.34)$$

В случае простого растяжения или сжатия стержня (рис. 169) на основании формулы (4.29)

$$U = \frac{P\Delta l}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия

$$\boxed{u = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma\epsilon}{2}}. \quad (6.35)$$

Имея в виду, что  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ , получим для удельной потенциальной энергии выражение

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (6.36)$$

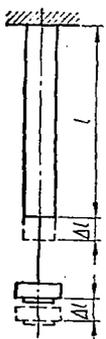


Рис. 169.

Вычислим теперь удельную потенциальную энергию в общем случае объемного напряженного состояния. С этой целью вырежем из тела элемент в виде единичного кубика (рис. 170), грани которого являются главными площадками. На этих площадках действуют главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Поскольку площади граней равны  $1 \text{ см}^2$ , то действующие в них усилия численно равны  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Они производят работу на тех перемещениях, которые получают грани вследствие деформации рассматриваемого элемента. Перемещения в данном случае численно равны главным удлинениям  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ , так как ребра имеют единичную длину.

Таким образом, на основании формулы (6.35)

$$u = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2}. \quad (6.37)$$

Такое суммирование работ главных напряжений возможно, поскольку главное напряжение  $\sigma_1$  производит работу только на перемещении  $\epsilon_1$ ,  $\sigma_2$  — на перемещении  $\epsilon_2$  и  $\sigma_3$  — на перемещении  $\epsilon_3$ .

Подставив выражения  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  из формул (6.29) в формулу (6.37), найдем, что

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (6.38)$$

**Удельная потенциальная энергия формоизменения.** При деформации элемента (рис. 170) изменяется, вообще говоря, как его объем, так и форма (из кубика он превращается в параллелепипед). В соответствии с этим можно считать, что полная удельная потенциальная энергия деформации

$$u = u_V + u_\Phi, \quad (6.39)$$

где  $u_V$  — удельная потенциальная энергия изменения объема, т. е. энергия, накапливаемая за счет изменения объема;

$u_\Phi$  — удельная потенциальная энергия формоизменения, т. е. энергия, накапливаемая вследствие изменения формы элемента.

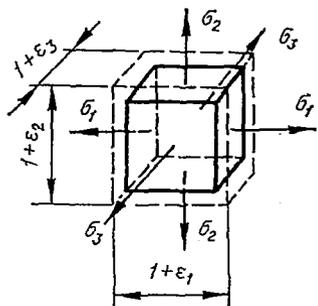


Рис. 170.

Непосредственное вычисление  $u_\Phi$  затруднительно, поэтому найдем сначала  $u_V$ . Это можно сделать, исходя из предположения о том, что в различных элементах при действии разных главных напряжений величина  $u_V$  будет одинаковой, коль скоро у элементов будет одинаковое изменение объема  $\epsilon_V$ .

Кроме рассматриваемого элемента (назовем его  $A$ ), введем еще вспомогательный элемент  $A'$ . Пусть  $A'$  — тоже единичный кубик, но по граням его действуют одинаковые главные напряжения  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'$ . Для этого элемента согласно формулам (6.32), (6.39) и (6.38)

$$\epsilon'_V = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma', \text{ а } u' = u'_V + u'_\Phi = \frac{3(1-2\mu)}{2E} (\sigma')^2.$$

Но, очевидно, элемент  $A'$  при деформировании меняет только свой объем, форма же его не изменяется (остается кубической). Поэтому  $u'_\phi = 0$  и, значит,

$$u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E} (\sigma')^2.$$

Выберем величину  $\sigma'$  такой, чтобы  $\varepsilon'_V = \varepsilon_V$ , т. е., чтобы

$$\frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma' = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Отсюда

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Поскольку у обоих элементов изменения объема одинаковы, на основании принятого предположения можно утверждать, что

$$u_V = u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

т. е.

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (6.40)$$

Теперь, согласно формуле (6.39),

$$u_\phi = u - u_V.$$

Подставив сюда значения  $u$  и  $u_V$  из формул (6.38) и (6.40), после элементарных преобразований получим окончательно, что

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Это и есть искомое выражение для удельной потенциальной энергии формоизменения.

## Глава VII

### КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

#### § 47. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию, т. е. по известным главным напряжениям в точках тела. Наиболее просто эта задача решается для простых видов деформации, в частности для одноосных напряженных состояний, так как в этом случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально. Под опасными

напряжениями, как уже указывалось, понимают напряжения, соответствующие началу разрушения (при хрупком состоянии материала) или появлению остаточных деформаций (в случае пластического состояния материала). Так, испытания образцов из данного материала на простое растяжение или сжатие позволяют без особых трудностей определить значения опасных напряжений:

$$\sigma^0 = \sigma_T \text{ или } \sigma^0 = \sigma_B.$$

По опасным напряжениям устанавливают допускаемые напряжения  $[\sigma_+]$  при растяжении или  $[\sigma_-]$  при сжатии (см. § 34), обеспечивая известный коэффициент запаса против наступления предельного состо-

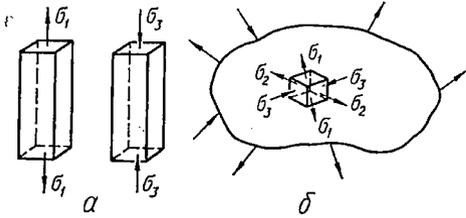


Рис. 171.

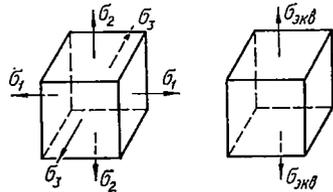


Рис. 172.

яния. Таким образом, условие прочности для одноосного напряженного состояния (рис. 171, а) принимает вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+] \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma_-].$$

Рассмотрим теперь вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии, когда в точках детали два или все три главных напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  не равны нулю (рис. 171, б).

В этих случаях, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений  $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$  в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и из-за большого объема испытаний.

Другой путь решения задачи заключается в установлении критерия прочности (критерия предельного напряженно-деформированного состояния). Для этого вводят гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора: полагают, что нарушение прочности материала при любом напряженном состоянии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение фактора, определяющего прочность, находят на основании простых, легко осуществимых опытов на растяжение. Иногда пользуются также результатами опытов на кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить данное сложное напряженное состояние с простым, например с одноосным растяжением (рис. 172), и установить при этом такое эквивалентное (расчетное) напряжение, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса.

Под коэффициентом запаса в общем случае напряженного состояния понимают число  $n$ , показывающее, во сколько раз нужно одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , чтобы оно стало предельным:

$$\sigma_1^0 = n\sigma_1; \quad \sigma_2^0 = n\sigma_2; \quad \sigma_3^0 = n\sigma_3.$$

Выбранная указанным образом гипотеза часто называется *механической теорией прочности*. Ниже рассмотрены некоторые из таких теорий.

#### § 48. КЛАССИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ (ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ)

**Критерий наибольших нормальных напряжений (первая (I) теория прочности).** Согласно этой теории преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения  $\sigma^0$ . Последнее устанавливается при простом растяжении или сжатии на образцах из данного материала.

Условие нарушения прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_+^0; \\ |\sigma_3| &= \sigma_-^0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Условие прочности с коэффициентом запаса  $n$  следующее:

$$\boxed{\sigma_1 \leq [\sigma_+]}$$

или

$$\boxed{|\sigma_3| \leq [\sigma_-]}, \quad (7.2)$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}.$$

Таким образом, критерий наибольших нормальных напряжений из трех главных напряжений учитывает лишь одно — наибольшее, полагая, что два других не влияют на прочность.

Опытная проверка показывает, что эта теория прочности не отражает условий перехода материала в пластическое состояние и дает при некоторых напряженных состояниях удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например для камня, кирпича, керамики, инструментальной стали и т. п.).

**Критерий наибольших линейных деформаций (вторая (II) теория прочности).** Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшая линейная дефор-

мация  $\epsilon_{\text{макс}}$  достигает своего опасного значения  $\epsilon^0$ . Последнее определяется при простом растяжении или сжатии образцов из данного материала.

Таким образом, условие разрушения следующее:

$$\epsilon_{\text{макс}} = \epsilon^0, \quad (7.3)$$

а условие прочности —

$$|\epsilon_{\text{макс}}| \leq [\epsilon] = \frac{\epsilon^0}{n}. \quad (7.4)$$

Используя обобщенный закон Гука [формулы (6.29)], выразим условие прочности (7.4) в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет  $\epsilon_1$ . Тогда

$$\epsilon_{\text{макс}} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При простом растяжении, приняв в качестве допускаемого напряжение  $[\sigma]$ , мы тем самым для наибольшего относительного удлинения допускаем величину

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Подставим выражения для  $\epsilon_{\text{макс}}$  и  $[\epsilon]$  в условие прочности (7.4). Тогда

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E},$$

или

$$\boxed{\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]}. \quad (7.5)$$

Как видно из условия прочности (7.5), в этой теории с допускаемым напряжением нужно сравнивать не то или другое главное напряжение, а их комбинацию. Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\boxed{\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)}. \quad (7.6)$$

Опытная проверка этой теории указывает на согласующиеся в ряде случаев результаты лишь для хрупкого состояния материала (например для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска). Отметим также, что применение второй теории прочности в виде (7.5) недопустимо для материалов, не следующих закону Гука или находящихся за пределами пропорциональности.

**Критерий наибольших касательных напряжений (третья (III) теория прочности).** Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории предполагается, что предельное состояние в общем случае наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\text{макс}}$  достигает опасного значения  $\tau^0$ . Последнее определяется при достижении предельного состояния в случае простого растяжения.

Условия разрушения и прочности имеют вид

$$\tau_{\text{макс}} = \tau^0; \quad (7.7)$$

$$\tau_{\text{макс}} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{n}. \quad (7.8)$$

Так как согласно выражению (6.24)

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \text{ а } \tau^0 = \frac{1}{2}\sigma^0,$$

то условия разрушения и прочности (7.7), (7.8) можно выразить через главные напряжения так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma^0; \quad (7.9)$$

$$\boxed{\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]}. \quad (7.10)$$

Таким образом, эквивалентным напряжением по третьей теории является разность алгебраически наибольшего и наименьшего главных напряжений:

$$\boxed{\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3}. \quad (7.11)$$

Третья теория прочности в общем хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения  $\sigma_2$ , которое, как показывают опыты, оказывает также некоторое, хотя во многих случаях и незначительное, влияние на прочность материала.

Отметим, что критерий наибольших касательных напряжений обычно рассматривается как условие начала образования массовых пластических (остаточных) деформаций. Последние являются результатом скольжения слоев атомов в кристалле по определенным кристаллографическим плоскостям. Это становится возможным в случае, когда на указанных плоскостях скольжения касательные напряжения достигают некоторой предельной величины.

Таким образом, в качестве критерия, определяющего наступление текучести материала, можно принять величину наибольшего касательного напряжения.

Считая предельным состоянием наступление текучести, из равенства (7.9) имеем:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (7.12)$$

Это условие достаточно удовлетворительно описывает начало пластической деформации для многих металлов и сплавов.

**Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая (IV) теория прочности).** В качестве критерия прочности в этом случае принимается количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории опасное состояние (текучесть) в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизме-

нения достигает своего предельного значения. Последнее можно легко определить при простом растяжении в момент текучести.

Условие наступления текучести —

$$u_{\phi} = (u_{\phi})_{\tau}. \quad (7.13)$$

Условие прочности —

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}]. \quad (7.14)$$

Предполагая, что закон Гука справедлив вплоть до наступления предельного состояния, можно потенциальную энергию формоизменения в общем случае напряженного состояния записать согласно выражению (6.41) в виде

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (7.15)$$

При простом растяжении в момент текучести ( $\sigma_1 = \sigma_{\tau}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) имеем:

$$(u_{\phi})_{\tau} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\tau}^2. \quad (7.16)$$

Следовательно, условие (7.13) после подстановки выражений (7.15) и (7.16) преобразовывается так:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_{\tau}, \quad (7.17)$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_{\tau}. \quad (7.18)$$

Условие прочности будет следующим:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_{\tau}}{n} = [\sigma]. \quad (7.19)$$

Следовательно, эквивалентное напряжение по четвертой теории

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (7.20)$$

Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и на сжатие. Появление в материале малых пластических деформаций четвертой теорией определяется более точно, чем третьей.

Следует отметить, что выражение (7.20) с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением для касательного напряжения  $\tau_{\text{окт}}$  на октаэдрической площадке, равнонаклоненной к трем главным направлениям (см. § 44). Поэтому расчетные уравнения четвертой теории прочности можно получить, исходя из критерия постоянства октаэдрических касательных напряжений:

$$\tau_{\text{окт}} \leq [\tau_{\text{окт}}].$$

Такая трактовка освобождает рассматриваемую теорию прочности от ограничений, связанных с областью применимости закона Гука, и дает возможность установить условия начала не только пластических деформаций, но и разрушения.

Критерий Мора основан на предположении о том, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит, главным образом, от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений. Среднее по величине главное напряжение, как указывалось выше, лишь незначительно влияет на прочность. Опыты с медными, никелевыми и чугунными трубками показывают, что по-

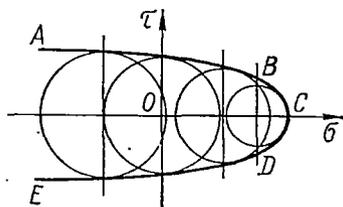


Рис. 173.

грешность, связанная с тем, что не учитывается  $\sigma_2$ , не превышает 12—15%. Исходя из этого предположения, можно любое напряженное состояние изобразить одним кругом Мора, построенным на главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Если при данных  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  прочность материала нарушается, то круг, построенный на этих напряжениях, называется *предельным*. Меняя соотношение между

главными напряжениями, получим для данного материала семейство предельных окружностей (рис. 173). Опыты показывают, что по мере перехода из области растяжения в область сжатия сопротивление разрушению увеличивается. Этому соответствует увеличение диаметров предельных окружностей по мере движения влево.

Огибающая *ABCDE* семейства предельных кругов ограничивает область прочности (рис. 173). Точка *C* соответствует всестороннему равномерному растяжению. Так как при равномерном всестороннем сжатии материал способен, не разрушаясь, выдержать очень большие напряжения, то огибающая слева остается незамкнутой.

При наличии предельной огибающей расчет прочности произвести весьма просто. По найденным в опасной точке детали значениям главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  строят круг. Прочность будет обеспечена, если он целиком лежит внутри огибающей. Будем увеличивать пропорционально величины главных напряжений до тех пор, пока круг, изображающий данное напряженное состояние, коснется предельных огибающих. Отношение радиусов полученного таким образом предельного круга и начального определит коэффициент запаса.

На практике обычно небольшой участок огибающей строят на основании двух опытов — на растяжение и сжатие, причем предельную кривую заменяют прямыми линиями, касательными к окружностям (рис. 174).

Допускаемое напряженное состояние можно получить, уменьшив масштаб чертежа в  $n$  раз ( $n$  — коэффициент запаса). На рис. 175 показано допускаемое напряженное состояние для небольшого участка огибающей.

Легко получить условие прочности для промежуточного напряженного состояния ( $\sigma_1, \sigma_3$ ), центр круга которого  $O_3$  располагается между точками  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 175). Проведем прямые  $O_1M_1, O_2M_2$  и  $O_3M_3$ , соединяющие центры и точки касания окружностей с огибающими

линиями, а также прямую  $\overline{O_1a}$ , параллельную  $\overline{M_1M_2}$ . Из подобия треугольников получим следующие зависимости:

$$\frac{\overline{O_3b}}{O_2a} = \frac{\overline{O_1O_3}}{O_1O_2}, \text{ или } \frac{\overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1}}{O_2M_2 - O_1M_1} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{OO_1 + \overline{OO_2}}.$$

Заменив отрезки линий значениями соответствующих напряжений, будем иметь:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]}.$$

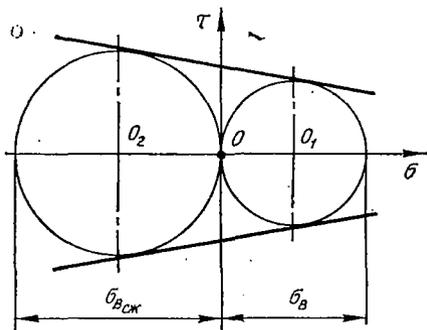


Рис. 174.

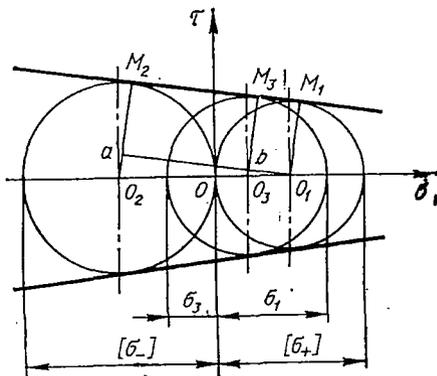


Рис. 175.

После преобразования, вводя знак неравенства, получаем условие прочности

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (7.21)$$

При одинаковом сопротивлении материала растяжению и сжатию ( $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ ) огибающая на указанном участке проходит параллельно оси абсцисс и расчетная формула (7.21) совпадает с формулой (7.10), полученной по третьей теории прочности.

Основанная целиком на опытных данных, теория Мора, в общем, не нуждается в дополнительной экспериментальной проверке. Однако построение предельных огибающих для каждого материала может быть произведено в результате ряда сложных опытов с плоскими и объемными напряженными состояниями, что, собственно, и ограничивает ее применение. Кроме того, эта теория, как уже отмечалось, не учитывает влияния на прочность промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ .

О применимости той или иной теории прочности для практических расчетов можно сказать следующее.

Разрушение материалов происходит путем отрыва за счет растягивающих напряжений или удлинений и путем среза за счет наибольших касательных напряжений. При этом разрушение отрывом может происходить при весьма малых остаточных деформациях или вовсе без

них (хрупкое разрушение). Разрушение путем среза имеет место лишь после некоторой остаточной деформации (вязкое разрушение). Отсюда ясно, что первую и вторую теории прочности, отражающие разрушение отрывом, можно применять лишь для материалов, находящихся в хрупком состоянии. Третью и четвертую теории прочности, хорошо отражающие наступление текучести и разрушение путем среза, надлежит применять для материалов, находящихся в пластическом состоянии.

Теория прочности Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разными сопротивлениями растяжению и сжатию. При этом ветвь  $AB$  (рис. 173) характеризует разрушение от среза, а ветвь  $BC$  — от отрыва.

Так как первая и вторая теории прочности страдают существенными недостатками, то в настоящее время утверждается мнение о нежелательности их применения. Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую (или третью) теорию прочности для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, а теорию Мора — для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, т. е. для хрупких материалов (для них в настоящее время пока еще применяют и вторую теорию прочности).

Следует подчеркнуть, что состояние материала (хрупкое или пластическое) определяется не только его свойствами, но и видом напряженного состояния, температурой и скоростью нагружения. Как показывают опыты, пластичные материалы при определенных условиях нагружения и температуре ведут себя как хрупкие, в то же время хрупкие материалы в определенных напряженных состояниях могут вести себя как пластичные. Так, например, при напряженных состояниях, близких к всестороннему равномерному растяжению, пластичные материалы разрушаются как хрупкие. Такие напряженные состояния принято называть «жесткими». Весьма «мягкими» являются напряженные состояния, близкие к всестороннему сжатию. В этих случаях хрупкие материалы могут вести себя как пластичные. При всестороннем равномерном сжатии материалы могут выдержать, не разрушаясь, очень большие давления.

Следует отметить, что перечисленные теории прочности не применимы для расчета прочности в случае всестороннего сжатия ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ). Влияние типа напряженного состояния может быть учтено приближенно при помощи диаграмм механического состояния, которые рассматриваются ниже.

#### § 49. ПОНЯТИЕ О НОВЫХ ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Условия перехода материала в предельное состояние, а также условия прочности по различным теориям были выражены через главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , которые являются инвариантами напряженного состояния.

Для трехмерного пространства, приняв в качестве декартовых координат главные направления, указанные условия можно представить в виде некоторых предельных поверхностей

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (7.22)$$

Так, предельная поверхность, соответствующая условию появления массовых пластических деформаций по теории удельной потенциальной энергии формоизменения [см. формулу (7.20)], имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0. \quad (7.23)$$

Предельная поверхность (7.23) представляет собой круговой цилиндр с осью, равнонаклоненной к координатным осям (рис. 176, а), и радиусом  $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$ . Для плоского напряженного состояния, когда одно из главных напряжений равно нулю, условие (7.23) дает эллиптическую предельную кривую (рис. 176, б).

Критерию наибольших касательных напряжений соответствует предельная поверхность в виде правильной шестигранной призмы, вписанной в цилиндр (7.23). Критерию наибольших нормальных напряжений соответствует куб с ребром, равным  $\sigma^0$ .

Заметим, что все точки, расположенные внутри области, ограниченной предельной поверхностью, соответствуют напряженным состояниям с коэффициентом запаса, большим единицы. Напряженные состояния, представленные точками, лежащими вне этой области, имеют коэффициент запаса, меньший единицы.

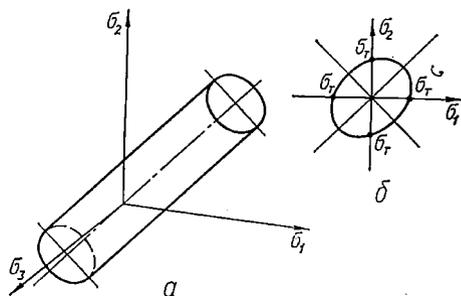


Рис. 176.

Недостатки рассмотренных теорий, а также появление новых материалов, явились стимулом для разработки новых теорий прочности. Большинство из них основано на выборе такой формы предельной поверхности, при которой можно наиболее полно учесть особенности сопротивления данного класса материалов в условиях сложного напряженного состояния.

Рассмотрим некоторые новые теории.

Ю. И. Яги предложил предельную поверхность (7.22) принять в виде полинома второй степени, симметричного по отношению ко всем трем главным напряжениям:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (7.24)$$

где постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  для данного изотропного материала должны определяться из опытов на одноосное растяжение и сжатие и на чистый сдвиг.

Установив допускаемые напряжения  $[\sigma]$ ,  $[\sigma_-]$  и  $[\tau]$  соответственно при растяжении, сжатии и сдвиге, находим выражения для постоянных:

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma][\sigma_-]}{[\sigma][\sigma_-]}; \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma])}{[\sigma][\sigma_-]}; \quad c = 6[\tau]^2.$$

Из приведенного ясно, что теория Ю. И. Ягца позволяет учесть неодинаковое сопротивление материала растяжению и сжатию, а также сопротивление материала сдвигу. При определенных соотношениях между введенными постоянными  $a$ ,  $b$  и  $c$  из выражения (7.24) можно получить ряд энергетических критериев, в том числе и критерий удельной потенциальной энергии формоизменения.

Рассмотренная теория еще недостаточно проверена экспериментами.

Г. С. Писаренко и А. А. Лебедев, считая, что наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям, предложили искать критерии прочности в виде инвариантных по отношению к напряженному состоянию функций касательных напряжений и максимального нормального напряжения. Предложен, например, критерий в следующей линейной форме:

$$\tau_{\text{окт}} + m_1 \sigma_1 \leq m_2. \quad (7.25)$$

Выражение для  $\tau_{\text{окт}}$  дается формулой (6.26). Константы  $m_1$  и  $m_2$  материала можно выразить через предельные напряжения  $\sigma^0$ ,  $\sigma_-^0$  при одноосном растяжении и сжатии. Тогда условие (7.25) примет вид

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma^0, \quad (7.26)$$

где

$$\chi = \frac{\sigma^0}{\sigma_-^0}.$$

Для материалов, находящихся в пластическом состоянии,  $\sigma^0 = \sigma_-^0$ ,  $\chi = 1$  и выражение (7.26) преобразовывается в расчетное уравнение теории формоизменения. Для идеально хрупкого материала  $\chi = 0$  и выражение (7.26) преобразовывается в уравнение для I теории прочности. При  $0 < \chi \leq 1$  (подавляющее большинство реальных материалов) предельная поверхность (7.26) представляет собой равнонаклоненную к главным осям фигуру, в которую вписана шестигранная пирамида, соответствующая упрощенной теории прочности Мора [условие (7.21)].

Экспериментальная проверка рассмотренной теории показала, что критерий (7.26) хорошо согласуется с результатами испытаний широкого класса конструкционных материалов.

Диаграммы механического состояния (критерий Я. Б. Фридмана). Влияние типа напряженного состояния на характер нарушения прочности материалов приближенно можно учесть при помощи диаграмм механического состояния. Последние строят на основании следующих положений:

1. В зависимости от типа напряженного состояния материалы могут разрушаться от растягивающих напряжений или удлинений путем отрыва либо от касательных напряжений путем среза. Соответственно этому различают две характеристики прочности — сопротивление отрыву  $S_{\text{от}}$ , которое представляет собой величину нормальных напряжений на поверхности разрушения в первом случае, и сопротивление срезу  $\tau_k$ , представляющее собой величину касательных напряжений во втором случае.

2. Обе характеристики прочности ( $S_{от}$  и  $\tau_k$ ) не зависят от типа напряженного состояния.

3. Кривая деформации материала в координатах  $\tau_{\max} - \gamma_{\max}$  также не зависит от напряженного состояния.

4. Нарушение прочности путем отрыва описывается теорией наибольших относительных удлинений так:

$$\sigma_{\text{экр II}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = S_{от}, \quad (7.27)$$

а нарушение прочности второго вида — теорией наибольших касательных напряжений следующим образом:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_k. \quad (7.28)$$

Диаграмма механического состояния состоит из двух диаграмм (рис. 177) — собственно диаграммы механического состояния (слева) и кривой деформации в координатах  $\tau_{\max} - \gamma_{\max}$ . При построении диаграммы по оси ординат откладывают наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$ , а по оси абсцисс — наибольшее эквивалентное растягивающее напряжение по второй теории прочности ( $\sigma_{\text{экр II}}$ ). На диаграмму наносят предельные линии, соответствующие пределу текучести  $\tau_T$  при сдвиге, сопротивлению срезу  $\tau_k$  и сопротивлению отрыву  $S_{от}$ . Отклонение линии

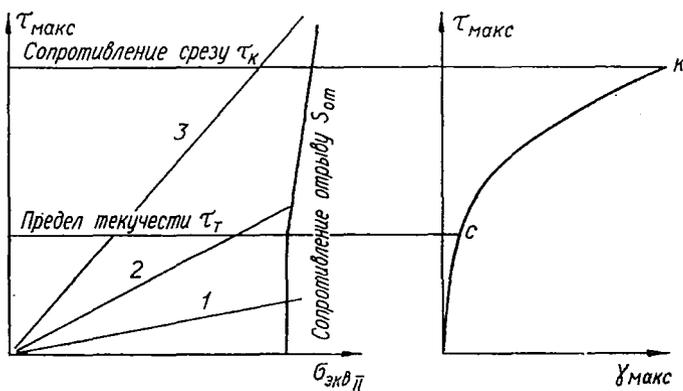


Рис. 177.

сопротивления отрыву вправо выше предела текучести (рис. 177) соответствует возрастанию сопротивления отрыву с появлением остаточных деформаций.

Для характеристики типа напряженного состояния вводят коэффициент «мягкости», представляющий собой отношение наибольшего касательного напряжения в точке к наибольшему эквивалентному растягивающему напряжению:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{экр II}}}. \quad (7.29)$$

Различные напряженные состояния, таким образом, при возрастании нагрузки изображаются на диаграмме лучами, тангенсы углов которых

равны соответствующему значению  $\alpha$ . Например: при всестороннем растяжении ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ )  $\tau_{\max} = 0$ ,  $\alpha = 0$  и луч совпадает с осью абсцисс; при простом растяжении ( $\sigma_1 = \sigma$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \sigma_{\text{экв II}} = \sigma \text{ и } \alpha = \frac{1}{2};$$

при простом сжатии ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma$ )

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \sigma_{\text{экв II}} = \mu\sigma; \alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

Принимая  $\mu = 0,25$ , находим, что  $\alpha = 2$ .

Рассматривая лучи, отвечающие различным типам напряженного состояния материала, можем приблизительно установить вид разрушения и выбрать, следовательно, подходящую теорию прочности. Например, луч 1 на диаграмме пересекает раньше всего линию сопротивления отрыву. Следовательно, материал разрушится путем отрыва без предшествующей пластической деформации. Луч 2 пересекает сначала линию текучести, а затем линию сопротивления отрыву. Следовательно, при данном напряженном состоянии разрушение произойдет путем отрыва, но с предшествующей пластической деформацией. Для напряженного состояния, соответствующего лучу 3, после пластической деформации разрушение произойдет путем среза. В тех случаях, когда лучи, изображающие то или иное сложное напряженное состояние, пересекают прежде всего линию сопротивления отрыву, расчет прочности следует производить по теории Мора, второй или первой теориям прочности. Если же вначале лучи пересекают линию предела текучести, то расчет прочности надлежит производить по третьей или четвертой теориям прочности.

Таким образом, диаграммы механического состояния с известным приближением отражают зависимость формы разрушения от вида напряженного состояния. Приблизительность построения заключается в том, что предел текучести и сопротивление разрушению не являются постоянными. Лучи, изображающие напряженные состояния, прямы лишь до достижения предела текучести.

## § 50. ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ ПРОЧНОСТИ

*Пример 19.* На гранях элемента (рис. 178), вырезанного из цилиндрической стенки резервуара, действуют напряжения  $\sigma_1 = 1500 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_2 = 750 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_3 = 0$ . Резервуар изготовлен из малоуглеродистой стали марки Ст. 3. Допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ . Проверить прочность материала стенки.

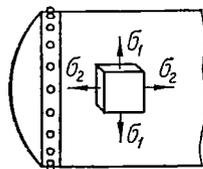


Рис. 178.

Так как материал находится в пластическом состоянии, то для расчета прочности следует применить четвертую или третью теорию.

Условие прочности по четвертой теории при  $\sigma_3 = 0$  имеет вид

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (7.30)$$

Внося в выражение (7.30) значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , находим:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{1500^2 + 750^2 - 1500 \cdot 750} = 1299 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

По третьей теории прочности условие прочности следующее:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{\text{экв III}} = 1500 - 0 < 1600.$$

Как видно из расчета, прочность стенки обеспечена.

*Пример 20.* В опасной точке чугуновой детали на гранях выделенного элемента (рис. 179) напряжения  $\sigma_\alpha = 50 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_\beta = -250 \text{ кг/см}^2$ ,  $\tau_\alpha = -\tau_\beta = 260 \text{ кг/см}^2$ . Проверить прочность, если допускаяемое напряжение на растяжение  $[\sigma_+] = 350 \text{ кг/см}^2$ , а допускаяемое напряжение на сжатие  $[\sigma_-] = 1200 \text{ кг/см}^2$ .

Определяем главные напряжения (см. § 43):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ \text{кгс/см}^2 \cdot &= \frac{1}{2} \left[ -200 + \sqrt{300^2 + 4 \cdot 260^2} \right] = 200 \text{ кг/см}^2; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -200 - \sqrt{300^2 + 4 \cdot 260^2} \right] = -400 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

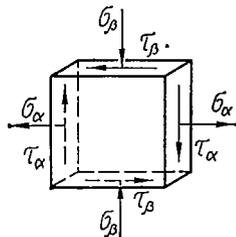


Рис. 179.

Так как материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности произведем по теории Мора. Заданное напряженное состояние располагается на предельной диаграмме (см. рис. 175) между простым растяжением и простым сжатием. Следовательно, для расчета прочности можно применить формулу (7.21)

$$\sigma_{\text{экв М}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Имеем:

$$\sigma_{\text{экв М}} = 200 + \frac{350}{1200} \cdot 400 = 317 \text{ кг/см}^2 < 350 \text{ кг/см}^2.$$

По теории наибольших относительных удлинений, учитывая, что  $\sigma_2 = 0$ , имеем:

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Для  $\mu = 0,25$  уравнение прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв II}} = 200 + 0,25 \cdot 400 = 300 \text{ кг/см}^2 < 350 \text{ кг/см}^2.$$

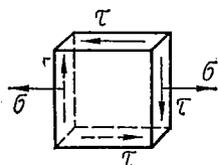


Рис. 180.

*Пример 21.* По граням элемента (рис. 180), выделенного в опасной точке стержня, испытывающего деформацию изгиба, напряжения равны:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma; \quad \sigma_\beta = 0; \\ \tau_\alpha &= \tau; \quad \tau_\beta = -\tau. \end{aligned}$$

Определить эквивалентные (расчетные) напряжения по четырем теориям прочности.

Вычисляем главные напряжения в опасной точке по формуле (6.21):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \end{aligned}$$

Тогда эквивалентные напряжения и условия прочности примут следующий вид:

а) по первой теории

$$\sigma_{\text{экв I}} = \sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq [\sigma]. \quad (7.31)$$

б) по второй теории

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (7.32)$$

или, принимая  $\mu = 0,3$ , находим, что

$$\sigma_{\text{экв II}} = 0,35\sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (7.33)$$

в) по третьей теории

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (7.34)$$

г) по четвертой теории

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.35)$$

## Глава VIII

### СДВИГ

#### § 51. СДВИГ. РАСЧЕТ НА СРЕЗ

С деформацией сдвига мы встречаемся, когда из шести компонентов главного вектора внутренних сил  $R$  и главного вектора внутреннего момента  $M$  отличны от нуля только поперечные силы  $Q_y$  или  $Q_z$ . С достаточной степенью приближения деформация сдвига или среза практически может быть получена в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон на весьма близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные к оси бруса и направленные в противоположные стороны. Примером такого действия сил на брус может быть резка ножницами прутьев, полосы и т. п. (рис. 181). Вообще же на практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций и чаще всего изгибом.

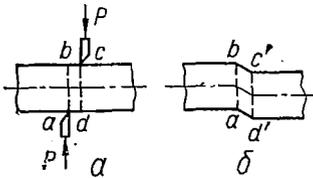


Рис. 181.

Установим формулы для напряжений и деформаций, необходимые при расчете на срез элементов конструкций, имеющих форму бруса. Известна внешняя нагрузка  $P$ , в частности, для случая, представленного на рис. 181. Используя метод сечений, находим, что на участке  $bc$  поперечная сила

$$Q_y = P. \quad (8.1)$$

Опуская в дальнейшем индекс при  $Q$ , установим связь между поперечной силой и напряжениями, действующими в рассматриваемом сечении. Из уравнения (3.30)

$$\int_F \tau dF = Q_x. \quad (8.2)$$

Принимая касательные напряжения  $\tau$  равномерно распределенными по площади поперечного сечения  $F$  (рис. 182), на основании выражений (8.1) и (8.2) будем иметь:  $Q = P = \tau F$ , откуда

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (8.3)$$

Допущение о равномерном распределении касательных напряжений по сечению весьма условно. В действительности же касательные напряжения у верхней и нижней граней стержня равны нулю. Однако это допущение во многих случаях себя оправдывает и поэтому в инженерной практике им широко пользуются при расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей.

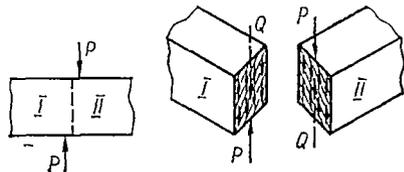


Рис. 182.

## § 52. ЧИСТЫЙ СДВИГ

При расчете ряда элементов конструкций встречается частный случай плоского напряженного состояния, когда на четырех гранях прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения (рис. 183, а). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

Найдем величину и направление главных напряжений при таком напряженном состоянии. Для этого воспользуемся построением круга напряжений (рис. 183, б).

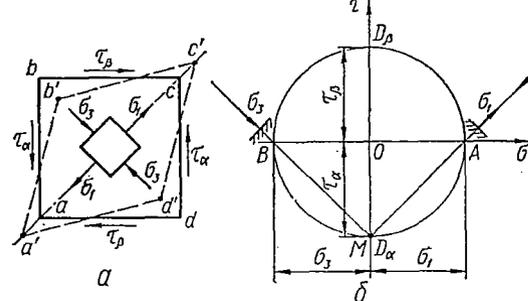


Рис. 183.

Поскольку в данном случае  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ ;  $\tau_\alpha = -\tau$ ;  $\tau_\beta = \tau$ , то, построив круг напряжений, находим, что

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad (8.4)$$

а главные площадки наклонены к граням элемента под углом  $45^\circ$ .

Третья главная площадка совпадает с ненагруженной фасадной гранью элемента, следовательно,

$$\sigma_2 = 0. \quad (8.5)$$

Рассмотрим деформацию элемента  $abcd$  (рис. 183, а). Поскольку по граням элемента нет нормальных напряжений, то вдоль граней нет и удлинений. В то же время диагональ  $ac$ , совпадающая с направлением  $\sigma_1$ , удлиняется, а диагональ  $bd$ , совпадающая с направлением сжимающего напряжения  $\sigma_3$ , укорачивается. В результате квадрат  $abcd$  превращается в ромб  $a'b'c'd'$  (рис. 183, а).

Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов. Более наглядное представление о

деформации элемента можно получить, закрепив одну из граней (рис. 184). Малый угол  $\gamma$ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется *углом сдвига* или *относительным сдвигом*. Из рис. 184 следует, что

$$\gamma = \angle BAB_1.$$

Величину абсолютного смещения грани обозначают  $\Delta s$  и называют *абсолютным сдвигом*.

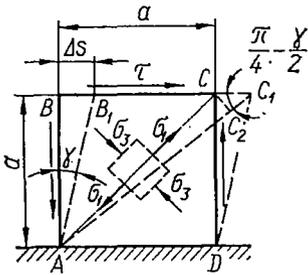


Рис. 184.

Из треугольника  $BAB_1$  следует, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Учитывая малость угла, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma,$$

тогда

$$\boxed{\gamma = \frac{\Delta s}{a}}. \quad (8.6)$$

**Закон Гука при чистом сдвиге.** Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге можно проследить по так называемой *диаграмме сдвига* (рис. 185). Для пластичных материалов она аналогична диаграмме растяжения. На рис. 185 показаны характеристики прочности —  $\tau_{пл}$ ,  $\tau_T$  и  $\tau_B$ .

Экспериментально диаграмму сдвига можно получить при скручивании тонкостенной трубы (рис. 186). Действительно, мысленно выделенный элемент стенки трубы (ячейка ортогональной сетки, предварительно

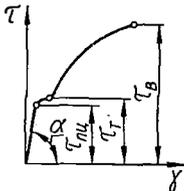


Рис. 185.

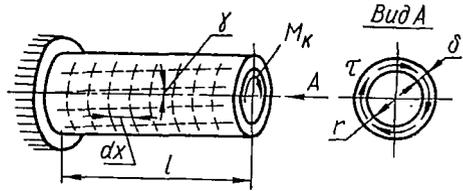


Рис. 186.

нанесенной на поверхности трубы) находится в условиях чистого сдвига, характеризуемого напряженным состоянием, показанным на рис. 184. Рассматривая деформацию этого элемента в пределах упругости, найдем, что между относительным сдвигом и касательными напряжениями, действующими по граням элемента, согласно диаграмме сдвига (рис. 185) существует линейная зависимость, которая может быть выражена формулой

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ или } \tau = G\gamma}, \quad (8.7)$$

где  $G$  — коэффициент пропорциональности, который называется *модулем упругости при сдвиге*, или *модулем упругости второго рода*, и

имеет размерность  $\text{кГ/см}^2$  (или  $\text{кГ/мм}^2$ ). Значения модуля  $G$  для некоторых материалов приведены в приложении 9.

Для изотропных материалов между модулем упругости  $G$  при сдвиге и модулем упругости  $E$  при растяжении существует определенная зависимость. Для получения ее рассмотрим деформацию элемента, претерпевающего чистый сдвиг (рис. 184). Найдем сначала удлинение диагонали  $AC$ , длина которой

$$l = a\sqrt{2}.$$

Рассматривая геометрическую картину деформаций, получим:

$$\Delta l = C_1 C_2 = CC_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}}.$$

Тогда относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s}{a} = \frac{\text{tg}\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}.$$

По закону Гука для чистого сдвига  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , поэтому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \quad (8.8)$$

Теперь воспользуемся обобщенным законом Гука [формулы (6.29)]. Главное напряжение  $\sigma_1$  действует в направлении диагонали  $AC$ . Поэтому относительное удлинение  $\varepsilon$  диагонали есть не что иное, как главное удлинение  $\varepsilon_1$  при плоском напряженном состоянии, представленном чистым сдвигом. Учитывая зависимость (8.7), из первой формулы (6.29) находим, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (8.9)$$

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), получаем искомую зависимость

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \mu)}}. \quad (8.10)$$

При  $\mu = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$  получим  $G = (0,375 \div 0,4) E$ .

Запишем выражение для перемещения одной грани относительно другой (абсолютного сдвига  $\Delta s$ ) при чистом сдвиге. Обозначая площадь грани  $F$ , равнодействующую сдвигающую силу  $Q = F\tau$  и расстояние между сдвигаемыми гранями через  $a$  (рис. 184), получим:

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GF},$$

т. е.

$$\boxed{\Delta s = \frac{Qa}{GF}}. \quad (8.11)$$

Формула (8.11) выражает закон Гука при сдвиге в абсолютных единицах.

Потенциальная энергия деформации рассматриваемого элемента при чистом сдвиге

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF},$$

а удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q^2}{2F^2 G},$$

т. е.

$$\boxed{u = \frac{\tau^2}{2G}} \quad (8.12)$$

**Проверка прочности и допускаемые напряжения при чистом сдвиге.** Произведем проверку прочности элемента, испытывающего деформацию чистого сдвига (рис. 183, а). Касательные напряжения на гранях элемента равны  $\tau$ , допускаемое напряжение для материала при растяжении —  $[\sigma]$ .

Как указывалось выше, главные напряжения при чистом сдвиге

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Условие прочности составим по второй, третьей и четвертой теориям: а) по второй теории

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (8.13)$$

Подставляя значения главных напряжений, находим:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (8.14)$$

Правая часть формулы (8.14) представляет собой допускаемое напряжение при чистом сдвиге:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (8.15)$$

Для металлов  $\mu = 0,25 \div 0,42$ . Следовательно, по второй теории прочности

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8) [\sigma]; \quad (8.16)$$

б) по третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

или

$$\tau - (-\tau) \leq [\sigma],$$

откуда

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \quad (8.17)$$

т. е. допускаемое напряжение при сдвиге

$$[\tau] = 0,5 [\sigma]; \quad (8.18)$$

в) по четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq [\sigma].$$

Внеся значения главных напряжений, получим:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \quad (8.19)$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma]. \quad (8.20)$$

Полученные величины допускаемых напряжений применяют также при расчетах на прочность деталей, испытывающих деформацию среза (болтов, заклепок, шпонок и т. д.). Отметим, что для пластичных материалов наиболее подходит формула (8.20), полученная на основании четвертой теории прочности. При использовании этой формулы для допускаемых напряжений на растяжение следует принимать современные значения. Например, для стали марки Ст. 3 допускаемое напряжение на растяжение и сжатие  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ , тогда

$$[\tau] = 0,6 \cdot 1600 = 960 \text{ кг/см}^2 \approx 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Условие прочности на сдвиг (срез) может быть записано в обычном виде:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{Q_{\text{макс}}}{F} \leq [\tau]. \quad (8.21)$$

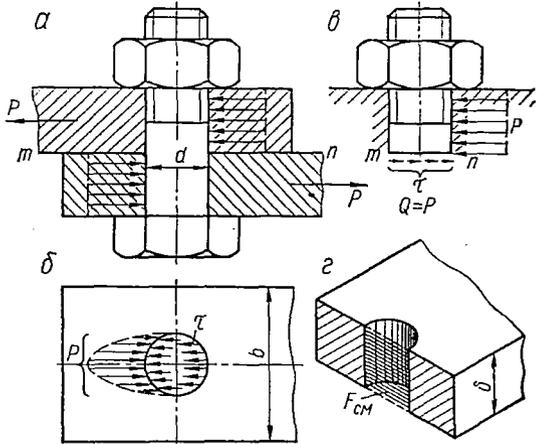


Рис. 187.

Величина допускаемых напряжений на срез  $[\tau]$  зависит от свойств материала, характера нагрузки и типа элементов конструкции.

Основания для выбора допускаемых напряжений  $[\tau]$  даны выше, а значения величин допускаемых напряжений на срез для некоторых материалов применительно к заклепочным и сварным соединениям приведены в приложении 11.

В качестве примера рассмотрим расчет болтового соединения, приведенного на рис. 187.

Силы  $P$  стремятся сдвинуть листы относительно друг друга. Этому препятствует болт, на который со стороны каждого листа передаются распределенные по контактной поверхности силы (рис. 187, а и б).

Равнодействующие последних, равные  $P$ , направлены противоположно (рис. 187, а). Усилия стремятся срезать болт по плоскости раздела листов  $m-n$ , так как в этом сечении действует наибольшая поперечная сила  $Q = P$  (рис. 187, в). Считая, что касательные напряжения распределены равномерно, получим:

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

Таким образом, условие прочности болта на срез принимает вид

$$\frac{4P}{\pi D^2} \leq [\tau]. \quad (8.22)$$

Отсюда можно найти диаметр болта:

$$D = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}$$

Следует отметить, что силы  $P$ , приложенные к болту, стремятся также изогнуть его. Однако изгибающий момент мал и вызванный им нормальными напряжениями можно пренебречь, тем более, что при увеличении внешних сил разрушение произойдет путем среза.

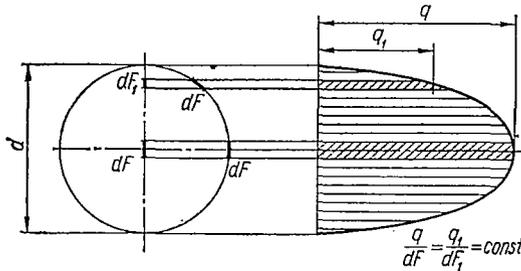


Рис. 188.

При расчете болтовых, заклепочных и других подобных соединений следует учитывать, что нагрузки, приложенные к элементам соединений, помимо среза, вызывают смятие контактирующих поверхностей. Под *смятием* понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхностях контакта.

Расчет на смятие также проводят приближенно, поскольку закон распределения давления по поверхности контакта точно не известен. Обычно принимают криволинейный закон распределения (рис. 188), считая, что давление  $q$  по диаметру  $d$  изменяется пропорционально изменению проекции площадки  $dF$  цилиндрической поверхности на диаметрально плоскость:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}$$

Тогда максимальное напряжение смятия на цилиндрических поверхностях

$$\sigma_{см} = \frac{P}{F_{см}},$$

где  $F_{см}$  представляет собой площадь проекции поверхности контакта на диаметрально плоскость (рис. 187, в):

$$F_{см} = d\delta. \quad (8.23)$$

Условие прочности на смятие имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{\delta d} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (8.24)$$

Допускаемые напряжения на смятие устанавливают опытным путем и принимают равными  $[\sigma_{\text{см}}] = (2 \div 2,5) [\sigma_{-}]$ .

На основании зависимости (8.24) получим:

$$d \geq \frac{P}{\delta [\sigma_{\text{см}}]}.$$

Чтобы были удовлетворены условия прочности на срез и на смятие, из двух найденных диаметров следует взять больший, округлив его до стандартного значения.

Учитывая, что болты и заклепки ослабляют листы, последние проверяют на разрыв в наиболее ослабленных сечениях. В случае одного болта (рис. 187) условие прочности будет иметь вид

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{мин}}} = \frac{P}{\delta(b-d)} \leq [\sigma_{+}]. \quad (8.25)$$

*Пример 22.* Определить необходимое число заклепок диаметром  $d = 23$  мм для прикрепления раскоса фермы, состоящего из двух уголков  $90 \times 60 \times 8$ , к фасонному листу (козынке), имеющему толщину  $\delta = 1,2$  см (рис. 189). Растягивающее усилие в раскосе  $N = 30$  Т, материал — Ст. 3, отверстия для заклепок продавлены.

Полагая, что усилия между заклепками распределяются равномерно, и имея в виду, что они испытывают двойной срез (одновременно по двум сечениям), число заклепок  $i$  определим из условия прочности на срез:

$$\tau = \frac{N}{2i \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]$$

или из условия прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{N}{i \delta d} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

Учитывая при этом, что для стали можно принять  $[\tau] = 1000$  кг/см<sup>2</sup> и  $[\sigma_{\text{см}}] = 2800$  кг/см<sup>2</sup>, найдем:

а) из расчета на срез

$$i \geq \frac{N}{2 \frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{30\,000}{2 \frac{3,14 \cdot 2,3^2}{4} \cdot 1000} = 3,6;$$

б) из расчета на смятие

$$i \geq \frac{N}{\delta d [\sigma_{\text{см}}]} = \frac{30\,000}{1,2 \cdot 2,3 \cdot 2800} = 3,9.$$

Принимаем, что число заклепок  $i = 4$ .

В расчете на смятие фигурировала толщина фасонного листа  $\delta = 1,2$  см, так как суммарная толщина полок двух уголков  $2\delta = 1,6$  см, а следовательно, напряжение смятия в заклепках в местах контакта с уголками будет меньше,

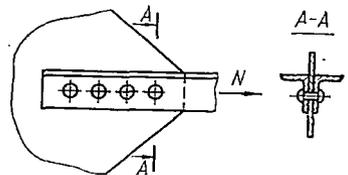
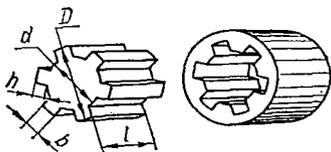


Рис. 189.

чем в месте контакта с косынкой (предполагается, что материал заклепок мягче, чем материал соединяемых элементов).

*Пример 23.* Вал передает крутящий момент  $M_{кр} = 2700 \text{ кг} \cdot \text{м}$  при помощи шлицевого соединения (рис. 190). Диаметр вала  $D = 80 \text{ мм}$ , внутренний диаметр  $d = 68 \text{ мм}$ , высота шлица  $h = 6 \text{ мм}$ , ширина шлица  $b = 12 \text{ мм}$ , длина соединения  $l = 100 \text{ мм}$ . Число шлиц  $i = 6$ . Определить напряжение среза и смятия шлица.

Полагая, что все шлицы нагружены одинаково, найдем усилие, приходящееся на один шлиц:



$$P_i = \frac{M_{кр}}{\frac{d}{2} i} = \frac{2700 \cdot 1000 \cdot 2}{68 \cdot 6} = 13,235 \text{ кг}.$$

Рис. 190.

Напряжение среза

$$\tau = \frac{P_i}{bl} = \frac{13\,235}{1,2 \cdot 10} = 1102,5 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{P_i}{lh} = \frac{13\,235}{10 \cdot 0,6} = 2205 \text{ кг/см}^2.$$

На срез принято (также условно) рассчитывать и некоторые сварные соединения. Изготавливая металлические конструкции, как известно, часто применяют сварку электрической дугой. Если выбор конструкции соединения, материалов и технологии сварки сделан правильно, то сварное соединение по надежности не уступает заклепчному при действии как статических, так и динамических нагрузок. В то же время, соединение элементов конструкций с помощью сварки имеет целый ряд преимуществ, основной из которых — экономичность.

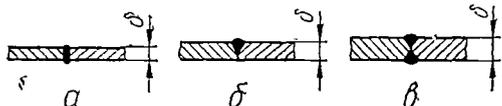


Рис. 191.



Рис. 192.

Наиболее распространены соединения в стык и с помощью угловых, или валиковых, швов. Соединения в стык применяются, когда листы находятся в одной плоскости. При толщине листов  $\delta \leq 8 \text{ мм}$  кромки их не обрабатывают (рис. 191, а); при  $\delta = 8 \div 20 \text{ мм}$  кромки скашивают и заваривают листы с одной стороны (V-образный шов, рис. 191, б); при  $\delta \geq 20 \text{ мм}$  кромки скашивают с двух сторон (X-образный шов, рис. 191, в). Расчетную толщину шва принимают равной толщине листа  $\delta$ , наплывы не учитываются.

Соединения с помощью угловых швов делают, когда листы параллельны или перпендикулярны. Сюда относятся соединения внахлестку, с накладками и в тавр. Если направление углового шва перпендикулярно к действующему усилию, то шов называется *лобовым* (*торцевым*). Швы, параллельные усилию, носят название *фланговых* (*боковых*). Применяются также косые швы (рис. 192), направленные под углом к усилию. На рис. 193 показано соединение листов внахлестку

лобовыми швами, на рис. 194 — соединение с накладками, приваренными фланговыми швами, а на рис. 195 — тавровое соединение.

Если не учитывать наплывы, то в разрезе угловой шов имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 196, а). Разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению  $ABCD$  (рис. 196, б), высота которого

$$m = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta.$$

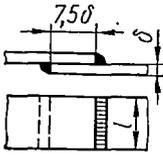


Рис. 193.

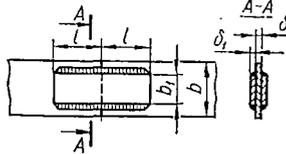


Рис. 194.

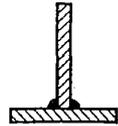


Рис. 195.

Расчетная площадь сечения шва  $F_s = ml = 0,7\delta l$ , где  $l$  — расчетная длина шва.

Сварные соединения, как и заклепочные, условно рассчитывают в предположении равномерного распределения напряжений по сечению шва. В табл. 12 приведены некоторые значения допускаемых напряжений для сварных соединений. Данные этой таблицы могут быть использованы только для конструкций, изготовленных из Ст. 3.

Не останавливаясь на расчетах всех видов швов, рассмотрим на примерах расчет только лобовых и фланговых, т. е. таких швов, которые, главным образом, должны сопротивляться действию касательных напряжений.

Учитывая, что сопротивление стали срезу ниже, чем растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пре-

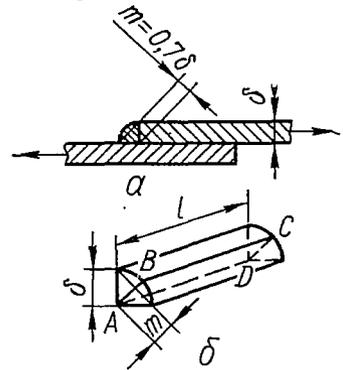


Рис. 196.

Таблица 12

Вид напряжения	Обозначение	Величина допускаемого напряжения, кг/см <sup>2</sup> , для	
		ручной сварки электродами с тонкой обмазкой	автоматической сварки и ручной сварки электродами с толстой обмазкой
Растяжение . . . . .	[σ <sub>с</sub> ]	1000	1300
Сжатие . . . . .		1100	1450
Срез . . . . .		800	1100

Примечание. Индекс «э» означает, что изделия свариваются электро-сваркой.

небрегают и рассчитывают его условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по площади сечения  $AA_1B_1B$  (рис. 197). При этом для соединения внахлестку в расчет вводят оба шва — верхний и нижний. Тогда, предположив, что работают оба шва с общей площадью опасного сечения  $F_s = 2ml_\tau = = 2 \cdot 0,7\delta l_\tau = 1,4\delta l_\tau$ , где  $l_\tau$  — расчетная длина торцевого шва, запишем условие прочности шва:

$$\tau = \frac{P}{F_s} = \frac{P}{1,4\delta l_\tau} \leq [\tau_s]. \quad (8.26)$$

Расчетную длину шва уменьшают на 10 мм в связи с непроварами в начале и в конце его, т. е.

$$l_\tau = l - 10 \text{ мм},$$

где  $l$  — действительная длина шва (на рис. 197  $l = b$ ).

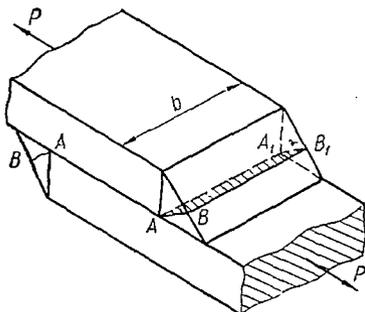


Рис. 197.

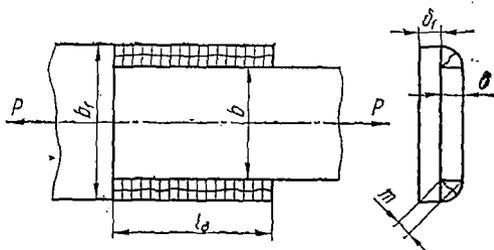


Рис. 198.

Отметим, что вследствие незначительной протяженности материала шва в направлении действия силы лобовые швы являются жесткими, поэтому они разрушаются при весьма малых остаточных деформациях и плохо сопротивляются действию повторно-переменных и ударных нагрузок.

Более распространены на практике фланговые швы. Они относятся к вязким, так как разрушаются лишь после значительных остаточных деформаций.

Фланговые швы всегда ставят парами; эти швы работают на срез в биссекторных сечениях (рис. 198).

Площадь среза каждого шва

$$ml_\phi = 0,7\delta (l - 10).$$

Условие прочности на срез принимает вид

$$\tau = \frac{P}{1,4\delta (l - 10)} \leq [\tau_s]. \quad (8.27)$$

*Пример 24.* Определить необходимые размеры фланговых швов, соединяющих полосы (рис. 198). Растягивающая сила  $P = 14\,000 \text{ кг}$ , а допускаемое напряжение на срез для металла шва  $[\tau_s] = 1100 \text{ кг/см}^2$ ;  $\delta = 1 \text{ см}$ ;  $\delta_1 = 0,8 \text{ см}$ ;  $b = 10 \text{ см}$ ;  $b_1 = 12,5 \text{ см}$ .

Из условия прочности (8.27) определяем необходимую длину шва:

$$l = \frac{P}{1,4\delta [\tau_3]} + 1 \text{ см} = \frac{14\,000}{1,4 \cdot 1 \cdot 1100} + 1 = 10,1 \text{ см.}$$

**Пример 25.** Найти необходимую длину  $l_1$  и  $l_2$  фланговых швов (рис. 199), соединяющих равнобокий уголок № 5 с косынкой, при действии нагрузки  $P = 6000 \text{ кг}$ . Принимаем, что  $[\tau_3] = 900 \text{ кг/см}^2$ .

Условие прочности на срез двух швов имеет вид

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2) \delta \cos 45^\circ} \leq [\tau_3], \quad (8.28)$$

где  $\delta$  — толщина полки уголка.

Общая длина швов при  $\delta = 5 \text{ мм}$

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &\geq \\ &\geq \frac{P}{\delta \cos 45^\circ [\tau_3]} = \frac{6000}{0,5 \cdot 0,7 \cdot 900} = \\ &= 19 \text{ см.} \end{aligned}$$

Чтобы обеспечить одинаковые условия работы обоих швов, следует соотношение длин швов выбрать обратным соотношению расстояний  $h_1$  и  $h_2$ , определяющих положение центра тяжести уголка, через который проходит сила  $P$ , т. е.

$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1}$ . При  $h_1 = 3,6 \text{ см}$  и  $h_2 = 1,4 \text{ см}$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1,4}{3,6} \approx 0,4; \quad l_2 = \frac{19}{1,4} \approx 13,5 \text{ см}; \quad l_1 = 19 - 13,5 = 5,5 \text{ см.}$$

В заключение рассмотрим пример расчета врубки, используемой для соединения деревянных элементов конструкций. Древесина анизотропна, т. е. ее механические характеристики зависят от направления силовых воздействий относительно ориентации продольных волокон<sup>1</sup>. Вследствие этого допускаемые напряжения для различных направлений действия сил приходится принимать разными. Данные о допускаемых напряжениях для сосны и дуба приведены в табл. 13.

Таблица 13

Вид напряжения	Обозначение	Допускаемое напряжение, кг/см <sup>2</sup> , для	
		сосны	дуба
Растяжение . . . . .	$[\sigma]$	100	130
Сжатие вдоль волокон и смятие торца	$[\sigma_{\text{см}}]$	120	150
Смятие во врубках вдоль волокон . . .	$[\sigma_{\text{см}}]$	80	110
Смятие перпендикулярно к волокнам (на длине > 10 см) . . . . .	$[\sigma_{\text{см}}]_{90^\circ}$	24	48
Скалывание во врубках вдоль волокон .	$[\tau]$	5—10	8—14
Скалывание во врубках поперек волокон	$[\tau]_{90^\circ}$	6	8
Изгиб . . . . .	$[\sigma_{\text{н}}]$	120	150
Скалывание при изгибе . . . . .	$[\tau_{\text{н}}]$	20	28

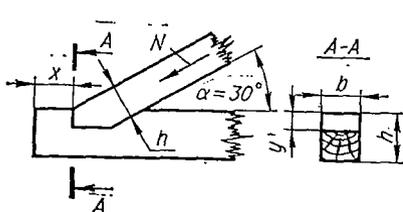
<sup>1</sup> Предел прочности для сосны вдоль волокон 400, поперек — 50 кг/см<sup>2</sup>, для дуба вдоль волокон 500, поперек — 150 кг/см<sup>2</sup>.

**Пример 26.** Рассчитать соединение стропильной ноги со стропильной затяжкой (рис. 200). Угол между осями стропильной ноги и затяжки  $\alpha = 30^\circ$ . Сила, действующая вдоль стропильной ноги,  $N = 5000$  кгГ. Материал — сосна, допустимое напряжение на смятие вдоль волокон —  $80$  кгГ/см<sup>2</sup>. Сечение стропильной ноги  $h \times b = 20 \times 20$  см.

Конец затяжки испытывает скалывание вдоль волокон под действием горизонтальной проекции  $N_1$  силы  $N$ .

$$N_1 = N \cos 30^\circ = 5000 \cdot 0,866 = 4330 \text{ кгГ.}$$

Длину затяжки  $x$ , выступающей за врубку, определим из условия



$$\tau_{\text{макс}} = \frac{N_1}{F_{\text{ск}}} = \frac{N_1}{bx} \leq [\tau].$$

Принимая  $[\tau] = 8$  кгГ/см<sup>2</sup>, находим площадь скалывания:

$$F_{\text{ск}} \geq \frac{N_1}{[\tau]} = \frac{4330}{8} = 541 \text{ см}^2,$$

тогда

$$x = \frac{F_{\text{ск}}}{b} = \frac{541}{20} = 27,1 \text{ см.}$$

Рис. 200.

Необходимая площадь смятия врубки

$$F_{\text{см}} = \frac{N_1}{[\sigma_{\text{см}}]} = \frac{4330}{80} = 54,1 \text{ см}^2.$$

Глубина врубки

$$y = \frac{F_{\text{см}}}{b} = \frac{54,1}{20} = 2,71 \text{ см.}$$

Примем  $y = 3$  см.

## Глава IX

### КРУЧЕНИЕ

#### § 53. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Напряженное состояние кручения характеризуется наличием в стержне единственного внутреннего силового фактора — крутящего момента  $M_{\text{кр}}$  (рис. 201), т. е. момента, действующего в плоскости поперечного сечения стержня.

Стержни, работающие на кручение, называют валами. Экспериментально установлено, что при кручении вала длиной  $l$  двумя скручивающими моментами  $M_{\text{кр}}$ , приложенными в плоскостях концевых сечений, вал закручивается. Это значит, что одни сечения вала поворачиваются относительно других, в то время как длина вала остается неизменной.

Рассматривая кручение вала, например по схеме, приведенной на рис. 202, легко установить, что под действием скручивающего мо-

мента, приложенного к свободному концу, любое сечение вала на расстоянии  $x$  от заделки будет поворачиваться относительно закрепленного сечения на некоторый угол  $\varphi$ . При этом, чем больше скручивающий момент  $M_k$ , тем угол поворота будет больше. Если зависимость  $\varphi = f(M_k)$  представить графически (что можно осуществить с помощью специального записывающего устройства на соответствующей испытательной машине), то получается так называемая *диаграмма кручения*. Примерный вид такой диаграммы (полученной при постепенном увеличении нагрузки вплоть до разрушения) для вала длиной  $l$ , изготовленного из пластичного материала, показан на рис. 203.

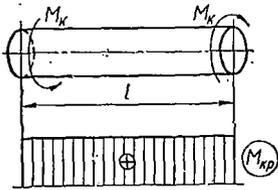


Рис. 201.

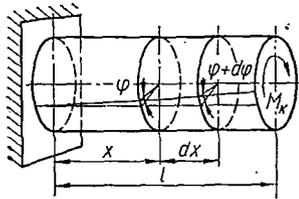


Рис. 202.

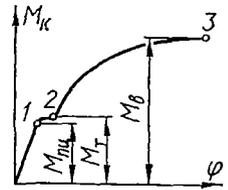


Рис. 203.

Рассматривая эту диаграмму, нетрудно убедиться, что она до некоторой степени аналогична диаграмме растяжения: характерные участки и точки аналогичны тем, которые наблюдаются на диаграмме растяжения ( $M_{пц}$  — величина момента, до которой сохраняется прямолинейная зависимость между нагрузкой и деформацией;  $M_t$  — момент, соответствующий началу текучести;  $M_b$  — величина крутящего момента, вызывающего разрушение).

В дальнейшем в этом параграфе при выводе формул для напряжений и угла закручивания нас будет интересовать участок диаграммы кручения, отвечающий работе материала в пределах пропорциональности, т. е. начальный прямолинейный участок, характеризующий линейную зависимость между крутящим моментом и углом закручивания, что имеет место при нормальной работе валов.

Анализируя напряженное состояние стержней при кручении, как и при любом виде напряженного состояния, необходимо исходить из действующих в нем внутренних усилий. В рассматриваемом случае под действием внешнего крутящего момента  $M_k$  в поперечном сечении вала, как уже отмечалось, возникает единственная составляющая  $M_x$  главного вектора момента, т. е. крутящий момент  $M_x = M_{кр} = M_k$ , в то время как другие составляющие главного вектора внутренней силы и главного вектора момента равны нулю:

$$N = Q_y = Q_z = 0; \quad M_y = M_z = 0.$$

Поэтому  $M_{кр}$  будет единственным усилием в сечении вала, представляющим собой суммарный момент от касательных напряжений, действующих в плоскости поперечного сечения:

$$\int_F \rho \tau dF = M_{кр}, \quad (9.1)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение, действующее в элементарной пло-

щадке  $dF$ , расположенной от центра сечения на расстоянии произвольного радиуса  $\rho$  (рис. 204).

Для выяснения характера распределения напряжений по сечению рассмотрим геометрическую картину деформации вала при кручении.

Результаты опытов с кручением круглых валов показывают, что если вал с предварительно нанесенной на его поверхности сеткой, состоящей из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (рис. 204), закручивать, то первоначально прямые углы сетки будут искажаться, перекашиваться (это особенно наглядно, если в качестве материала вала взять резину). Контуры параллельных кругов не будут искривляться, и расстояния между кругами будут оста-

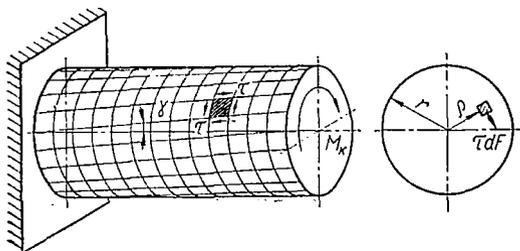


Рис. 204.

ваться неизменными, а продольные линии сетки получают винтовой характер (рис. 204). Радиусы, проведенные в торцевых сечениях стержня, останутся прямыми.

На основании указанных экспериментальных данных строят элементарную теорию кручения круглых стержней, в основу которой положена гипотеза плоских сечений. Суть этой гипотезы можно понять, если предположить, что вал состоит из бесконечно большого числа тонких жестких дисков, насаженных на ось. Поэтому при кручении такого вала сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее, поворачиваясь одно относительно другого на определенный угол  $\varphi$ , в то время как расстояния между рассматриваемыми сечениями не меняются. При этом наблюдаемое искажение прямых углов сетки, нанесенной на поверхности скручиваемого вала, свидетельствует о том, что при кручении мы имеем дело с деформацией чистого сдвига.

Рассмотрим некоторый участок вала длиной  $dx$  (рис. 205), выделенный из исследуемого вала длиной  $l$  (рис. 202); вал подвержен действию некоторого скручивающего момента  $M_k$ , вызывающего внутренний крутящий момент  $M_{кр}$ .

Пусть угол поворота одного из сечений  $m$  —  $m$  выделенного элемента вала будет  $\varphi$ , тогда угол поворота другого концевое сечения  $n$  —  $n$  элементарного участка  $dx$  будет  $\varphi + d\varphi$ , т. е. угол закручивания участка стержня длиной  $dx$  будет  $d\varphi$ . Следовательно, если до деформации радиус  $Oa$  сечения  $m$  —  $m$  и радиус  $O'b'$  сечения  $n$  —  $n$  находились в одной диаметральной плоскости, то после деформации кручения радиус  $O'b'$  займет положение  $O'b$ , составляющее угол  $d\varphi$  с его положением  $O'b'$  до деформации. Образующая  $ab'$  после дефор-

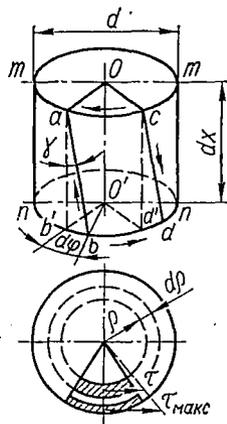


Рис. 205.

мации займет некоторое новое положение  $ab$  под углом  $\gamma$  к ее первоначальному положению  $ab'$ . Если будем наблюдать за поведением не одной, а двух образующих ( $ab'$  и  $cd'$ ), ограничивающих некоторый элементарный объем наружного слоя материала, то увидим, что искажения формы рассматриваемого элементарного объема типичны для случая деформаций, происходящих при сдвиге. На основании этого можно заключить, что по всем четырём граням рассматриваемого элемента действуют касательные напряжения в направлениях, обеспечивающих условия его равновесия (рис 206).

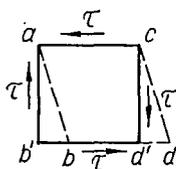


Рис. 206.

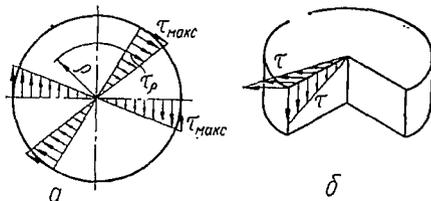


Рис. 207.

В силу сказанного угол  $\gamma$  между образующими  $ab'$  и  $ab$  представляет собой не что иное, как относительный сдвиг, или угол сдвига:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b'b}{ab'} \approx \gamma.$$

Учитывая, что  $ab' = dx$ , а  $bb' = rd\varphi$ , угол сдвига можно представить в виде

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9.2)$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dx}$  является *относительным (погонным) углом закручивания* (имеет размерность  $\text{см}^{-1}$ ) и обычно обозначается через  $\Theta$ . Учитывая это, формулу (9.2) можно записать так:

$$\gamma = \Theta r. \quad (9.3)$$

Теперь рассмотрим физическую сторону задачи, устанавливающую связь между напряжением и деформацией. Поскольку элемент испытывает чистый сдвиг, то, учитывая выражение (9.3), согласно формуле (8.7) получим:

$$\tau = G\Theta r. \quad (9.4)$$

Так как при закручивании поперечные сечения вала остаются плоскими, а радиусы прямыми, то выражения для угла сдвига и касательного напряжения в сечении на расстоянии  $\rho$  от центра его можно представить формулами, аналогичными формулам (9.3) и (9.4):

$$\begin{aligned} \gamma_\rho &= \Theta \rho; \\ \tau_\rho &= G\Theta \rho. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Формулы (9.5) показывают, что касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально

расстоянию  $\rho$  точек от центра сечения (рис. 207, а). Очевидно, максимальные напряжения будут у поверхности стержня, при  $\rho = r$ . Таким образом, выражение (9.4) можно переписать в виде

$$\tau_r = \tau_{\text{макс}} = G\Theta r.$$

Подставляя выражение (9.5) для касательного напряжения в уравнение (9.1), будем иметь:

$$M_{\text{кр}} = G\Theta \int_F \rho^2 dF = G\Theta J_p.$$

Отсюда получим формулу для определения относительного угла закручивания круглого стержня:

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_p}, \quad (9.6)$$

где  $GJ_p$  — жесткость сечения стержня при кручении,  $\text{кгсм}^2$ ;

$J_p$  — полярный момент инерции круглого стержня, который для сплошного стержня диаметром  $d$ , как известно (§ 5), выражается формулой  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , а для трубчатого стержня с внутренним диаметром  $d_{\text{в}}$  и наружным  $d_{\text{н}}$

$$J_p = \frac{\pi (d_{\text{н}}^4 - d_{\text{в}}^4)}{32} = \frac{\pi d_{\text{н}}^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Здесь  $\alpha = \frac{d_{\text{в}}}{d_{\text{н}}}$ .

Зная выражение (9.6) относительного угла закручивания, можно написать формулу для определения взаимного угла закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии  $l$ :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_p} dx.$$

Если в пределах цилиндрического участка стержня длиной  $l$  крутящие моменты в сечениях не изменяются, то

$$\varphi = \Theta l = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_p}. \quad (9.7)$$

Формулу (9.7), устанавливающую связь между силовым фактором при кручении ( $M_{\text{кр}}$ ) и соответствующей деформацией кручения (углом  $\varphi$ ), часто называют законом Гука при кручении.

Для определения касательного напряжения  $\tau$  в любой точке сечения стержня достаточно в формулу (9.5) подставить выражение для  $\Theta$  по формуле (9.6). Тогда

$$\tau = G \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_p} \rho = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{J_p}. \quad (9.8)$$

Максимальное касательное напряжение, действующее на периферии сечения стержня,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} r}{J_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \quad (9.9)$$

где

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r} \text{ см}^3.$$

Эта величина называется *полярным моментом сопротивления*. Для сплошного круглого сечения

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3}. \quad (9.10)$$

Для трубчатого круглого сечения

$$W_{\rho} = \frac{\pi d_{\text{н}}^3 (1 - \alpha^4)}{16},$$

а

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d_{\text{н}}^3 (1 - \alpha^4)}. \quad (9.11)$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в скручиваемом круглом стержне пропорционально крутящему моменту  $M_{\text{кр}}$  и обратно пропорционально кубу наружного диаметра стержня.

Установив формулу для определения максимального касательного напряжения при кручении, можно записать уравнение прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (9.12)$$

где  $[\tau]$  — допускаемое напряжение при кручении (чистом сдвиге). Отсюда полярный момент сопротивления вала

$$W_{\rho} \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}. \quad (9.13)$$

Помимо расчета на прочность, валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая погонные углы закручивания некоторой допускаемой величиной  $[\Theta]$ :

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\rho}} \leq [\Theta], \quad (9.14)$$

откуда необходимый полярный момент инерции вала определится формулой

$$J_p \geq \frac{M_{кр}}{G[\theta]}.$$

#### § 54. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Из анализа общей формулы (9.8) для касательных напряжений  $\tau$  видно, что напряжения в плоскости сечения вала распределены неравномерно и в зависимости от радиуса изменяются по линейному закону от нуля в центре сечения до максимума на периферии его (рис. 207, а). В си-

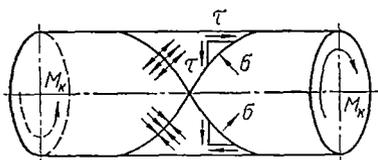


Рис. 208.

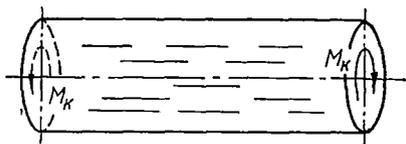


Рис. 209.

лу закона парности касательных напряжений в осевых сечениях стержня возникают такие же по величине, но обратные по знаку касательные напряжения (рис. 207, б). В элементе материала, мысленно выделенном из наружных слоев стержня сечениями, параллельными и перпендикулярными к образующим (рис. 208), по граням будут действовать только касательные напряжения. В сечениях, наклоненных к оси, будут также и нормальные напряжения, как об этом подробно указывалось при рассмотрении напряженного состояния элемента, находящегося в условиях чистого сдвига. Наибольшие нормальные напряжения действуют на главных площадках, которые, как известно, наклонены под углом  $45^\circ$  к площадкам чистого сдвига (при кручении — под углом  $45^\circ$  к оси вала (рис. 208).

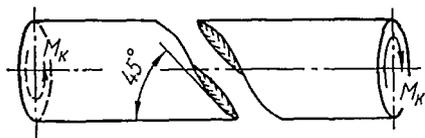


Рис. 210.

Таким образом, при кручении круглых валов опасными могут стать как касательные напряжения, возникающие в поперечных и в продольных сечениях вала, так и нормальные напряжения, возникающие в площадках под углом  $45^\circ$  к первым. В связи с этим характер разрушения вала будет зависеть от способности материала сопротивляться действию касательных и нормальных напряжений.

Так, если материал плохо сопротивляется касательным напряжениям (действию сдвига), то первые трещины разрушения возникнут по образующим в местах действия наибольших касательных напряжений. Например, в случае кручения деревянных валов с продольным расположением волокон трещины разрушения ориентированы вдоль образующей (рис. 209), поскольку древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений вдоль волокон. Если же материал плохо

сопротивляется растягивающим напряжениям, как например чугун, то трещины разрушения при кручении пройдут по линиям, нормальным к действию главных растягивающих напряжений (рис. 210), т. е. по винтовым линиям, касательные к которым образуют угол  $45^\circ$  с осью стержня. Стальные валы на практике часто разрушаются по поперечному сечению, перпендикулярному к оси вала. Этот вид разрушения обусловлен действием в поперечном сечении касательных напряжений.

## § 55. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА КРУЧЕНИЕ

Для проектирования можно рекомендовать следующий порядок расчета валов на кручение.

По схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру крутящих моментов по отдельным участкам (§ 16). Выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение  $[\tau]$ . Записывают условие прочности (9.12) для участка вала с максимальным значением крутящего момента (согласно эпюре моментов).

Если вал достаточно длинный и по отдельным его участкам действуют существенно разные по величине крутящие моменты, то его следует конструировать ступенчатым. Диаметр вала каждой ступени рассчитывают, исходя из той же формулы (9.12), но значения крутящего момента при этом берут разные для разных участков в соответствии с эпюрой крутящих моментов.

Учитывая, что для сплошного круглого вала  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ , можно из выражения (9.13) записать расчетную формулу для диаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi [\tau]}}. \quad (9.15)$$

Определяя диаметр полого вала, из конструктивных соображений задаются соотношением между размерами внутреннего и наружного диаметров, т. е. коэффициентом  $\alpha = \frac{d_{в}}{d_{н}}$ , а затем, учитывая выражение (9.11), из выражения (9.13) находят величину наружного диаметра вала:

$$d_{н} \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}; \quad (9.16)$$

Определив размеры вала из условия прочности, проверяют вал на жесткость по формуле (9.14):

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad (9.17)$$

Допускаемый относительный угол закручивания вала принимают следующим: при статической нагрузке  $[\theta^\circ] = 0,3^\circ$  на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках  $[\theta^\circ] = 0,25^\circ$ ; а при ударных

нагрузках  $[\Theta^\circ] = 0,15^\circ$ . Учитывая, что формулы (9.14), (9.17) выражают углы закручивания в радианах, приведенные допускаемые значения углов нужно перевести в радианы, умножив их на  $\frac{\pi}{180^\circ}$ .

Если при проверке окажется, что условие жесткости (9.17) удовлетворяется, то на этом обычно и заканчивают расчет вала. В противном случае размеры вала должны быть подобраны из условия жесткости (9.14):

$$J_D \geq \frac{M_{кр}}{G [\Theta]}. \quad (9.18)$$

Подставляя выражение полярного момента инерции и решая последнее уравнение относительно диаметра вала, найдем отсюда, что для сплошного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi [\Theta]}}; \quad (9.19)$$

для полого вала

$$d_n \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi [\Theta] (1 - \alpha^4)}}. \quad (9.20)$$

Иногда при расчете вала известна передаваемая им мощность  $N$  в лошадиных силах и число оборотов  $n$  в минуту. В этом случае крутящий момент в расчетных формулах может быть выражен непосредственно через мощность  $N$  и число оборотов  $n$ , исходя из формулы (3.1):

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ кг} \cdot \text{см}. \quad (9.21)$$

Тогда, подставляя это выражение в расчетные формулы (9.15) и (9.16), соответственно получим:

$$d \geq 71,4 \sqrt[3]{\frac{N}{n [\tau]}}; \quad (9.22)$$

$$d_n \geq 71,4 \sqrt[3]{\frac{N}{n [\tau] (1 - \alpha^4)}}. \quad (9.23)$$

В случае, когда мощность  $K$  задана в киловаттах, то, поскольку  $1 \text{ л. с.} \approx 0,736 \text{ квт}$ , крутящий момент может быть выражен формулой

$$M = \frac{71\,620}{0,736} \cdot \frac{K}{n} = 97\,360 \frac{K}{n} \text{ кг} \cdot \text{см}. \quad (9.24)$$

*Пример 27.* Найти мощность в лошадиных силах, передаваемую валом, если диаметр сплошного вала  $d = 150 \text{ мм}$ , число оборотов вала в минуту  $n = 120$ , модуль сдвига  $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$  и угол закручивания участка вала длиной  $7,5 \text{ м}$  равен  $1/15 \text{ рад}$ .

Из уравнения (9.7)

$$M_{кр} = \frac{GJ_{p\varphi}}{l} = \frac{G \frac{\pi d^4}{32} \cdot \varphi}{l} = \frac{840\,000 \cdot \pi \cdot 15^4}{32 \cdot 750 \cdot 15} = 371\,500 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Тогда, применив формулу (9.21), определим передаваемую мощность:

$$N = \frac{M_{кр} n}{71\,620} = \frac{371\,500 \cdot 120}{71\,620} = 622 \text{ л. с.}$$

*Пример 28.* Из условия прочности и жесткости определить диаметр сплошного вала (рис. 211) при следующих значениях передаваемых шкивами моментов:  $M_1 = 60 \text{ кг} \cdot \text{м}$ ,  $M_2 = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}$ ,  $M_3 = 200 \text{ кг} \cdot \text{м}$ ,  $M_4 = 60 \text{ кг} \cdot \text{м}$ . Допускаемое напряжение  $[\tau] = 200 \text{ кг/см}^2$ . Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = \frac{1}{4} \text{ град/м}$ ,

или  $[\theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4 \cdot 100} \text{ см}^{-1}$ . Модуль упругости стали при сдвиге  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

Строим эпюру крутящих моментов. Наибольший момент действует на участке 2—3.

$$M_{кр\text{макс}} = M_1 + M_2 = 60 + 80 = 140 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Подберем диаметр вала сначала из условия прочности, для чего воспользуемся формулой (9.15):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 14\,000}{\pi \cdot 200}} \approx 7 \text{ см}.$$

Теперь подберем диаметр вала из условия жесткости, используя формулу (9.19):

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр}}{G \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 14\,000 \cdot 180 \cdot 400}{8 \cdot 10^5 \pi^2}} \approx 8 \text{ см}.$$

Из двух найденных значений диаметров следует принять больший ( $d = 8 \text{ см}$ ), найденный из условия жесткости.

Теперь определим относительный угол закручивания вала по отдельным участкам, пользуясь формулой (9.6). Подставляя в эту формулу значения  $M_{кр}$  для разных участков, найдем, что

$$\theta_I = \frac{M_{крI}}{G J_p} = \frac{6000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 1,86 \cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{II} = \frac{M_{крII}}{G J_p} = \frac{14\,000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 4,35 \cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{III} = \frac{M_{крIII}}{G J_p} = \frac{6000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 1,86 \cdot 10^{-5}.$$

Зная величину относительного угла закручивания по отдельным участкам, можно построить эпюры  $\theta_i$  и углов поворота  $\varphi_i = \theta_i l_i$  по длине вала (рис. 211). Эпюра углов закручивания  $\varphi$  построена при  $l_I = 50 \text{ см}$ ;  $l_{II} = 50 \text{ см}$  и  $l_{III} = 90 \text{ см}$ .

*Пример 29.* Определить, на сколько процентов увеличится наибольшее напряжение вала при кручении, если в валу сделано аксиальное отверстие  $d_B = 0,4 d_n$  ( $\alpha = 0,4$ ).

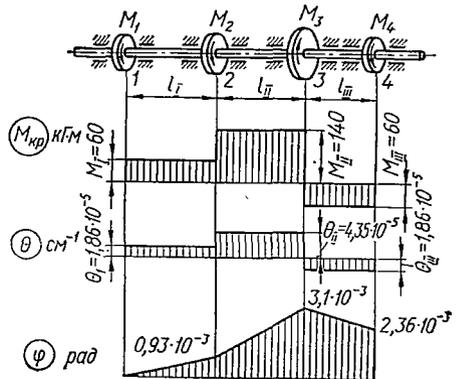


Рис. 211.

На основании формул (9.15) и (9.16), полагая  $d_n = d$ , получим следующие выражения для напряжений сплошного и полого валов:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \tau_c;$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} = \tau_n.$$

Искомая разница в напряжениях

$$\Delta\tau = \frac{\tau_n - \tau_c}{\tau_c} \cdot 100\% = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} \left[ \frac{1}{1 - \alpha^4} - 1 \right] \frac{\pi d^3}{16M_{\text{кр}}} 100 = \frac{(0,4)^4}{1 - (0,4)^4} 100 \approx 2,6\%.$$

*Пример 30.* Заменить сплошной вал диаметра  $d = 300$  мм полым равнопрочным валом с наружным диаметром  $d_n = 350$  мм. Найти внутренний диаметр полого вала  $d_v$  и сравнить веса этих валов.

Наибольшие касательные напряжения в обоих валах должны быть равными между собой:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d_n^3 (1 - \alpha^4)}.$$

Отсюда определим коэффициент  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d}{d_n}\right)^3} = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{300}{350}\right)^3} = 0,78.$$

Внутренний диаметр полого вала

$$d_v = \alpha d_n = 0,78 \cdot 350 = 273 \text{ мм}.$$

Отношение весов равно отношению площадей поперечных сечений:

$$\frac{\pi (d_n^2 - d_v^2) \cdot 4}{4\pi d^2} = \frac{d_n^2 - d_v^2}{d^2} = \frac{350^2 - 273^2}{300^2} = 0,534.$$

Из приведенных последних двух примеров видно, что изготовление пустотелых валов, т. е. валов, у которых малонагруженная внутренняя часть удаляется, является весьма эффективным средством снижения затраты материала, а следовательно, и облегчения веса валов. При этом наибольшие напряжения, возникающие в пустотелом валу, мало отличаются от максимальных напряжений в валу сплошного сечения при том же наружном диаметре.

Так, в примере 29 за счет сверления при  $\alpha = \frac{d_v}{d_n} = 0,4$ , дающем облегчение вала на 16%, максимальные напряжения в наружных волокнах полого вала возросли всего на 2,6%. Во втором случае равнопрочный пустотелый вал, но с несколько бóльшим наружным диаметром (350 мм) по сравнению со сплошным валом (300 мм), оказался легче сплошного на 53,4%. Эти примеры наглядно свидетельствуют о рациональности применения пустотелых валов, что широко используется в некоторых областях современного машиностроения, в частности, в моторостроении.

В качестве примера статически неопределимого стержня, подверженного кручению, рассмотрим круглый стержень, защемленный обоими концами и нагруженный скручивающим моментом  $M_k$  в некотором сечении  $C$  (рис. 212). Построим эпюры крутящих моментов и вычислим диаметр стержня.

При такой нагрузке в защемлениях возникают реактивные моменты  $M_A$  и  $M_B$  в плоскостях, перпендикулярных к оси  $x$  стержня.

Статическая сторона задачи. Из условия равновесия стержня

$$\sum M_x = M_A + M_B - M_k = 0. \quad (9.25)$$

Как видим, задача один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона задачи. Так как оба конца защемлены, то угол поворота сечения  $B$  относительно  $A$  равен нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \quad (9.26)$$

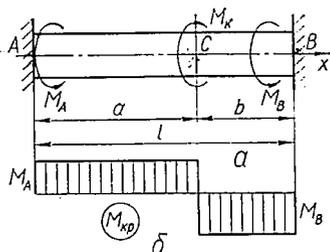


Рис. 212.

Физическая сторона задачи. Используя формулу (9.7), запишем выражение для угла закручивания сечения  $B$  относительно  $A$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{B-C} &= -\frac{M_B b}{GJ_p}; \\ \varphi_{C-A} &= \frac{(M_k - M_B) a}{GJ_p}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Внося формулы (9.27) в выражение (9.26), получим:

$$\varphi_{B-A} = -\frac{M_B b}{GJ_p} + \frac{(M_k - M_B) a}{GJ_p} = 0.$$

Отсюда с учетом уравнения (9.25) найдем, что

$$M_B = \frac{M_k a}{a + b};$$

$$M_A = \frac{M_k b}{a + b}.$$

Эпюры крутящих моментов показаны на рис. 212, б.

Если  $a > b$ , то  $M_{k_{\text{макс}}} = M_B$  и диаметр стержня на основании формулы (9.15)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_k}{(a+b)\pi[\tau]}}.$$

## 56. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В инженерной практике довольно часто кручению подвергаются стержни, имеющие не круглое, а прямоугольное, треугольное, эллиптическое и другие сечения. В этих случаях гипотеза плоских сечений неприменима, т. к. сечения искривляются (депланируют). Точные расчеты стержней некруглого сечения можно получить методами теории упругости. Однако, поскольку в настоящем курсе исключается возможность их изложения, приведем здесь только некоторые окончательные результаты и те физические предпосылки, на основании которых они получены.

Наибольшие касательные напряжения, погонные и полные углы закручивания по аналогии с кручением стержней круглого сечения принято определять по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}; \quad (9.28)$$

$$\Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}}; \quad (9.29)$$

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\text{к}}}. \quad (9.30)$$

Здесь  $J_{\text{к}}$  и  $W_{\text{к}}$  — некоторые геометрические характеристики, которые условно называют *моментом инерции при кручении* и *моментом сопротивления при кручении*. Они имеют размерность  $\text{см}^4$  и  $\text{см}^3$  соответственно.

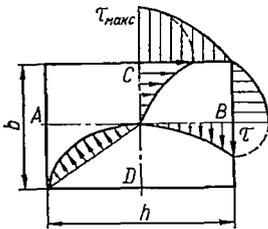


Рис. 213.

Наиболее часто встречаются стержни прямоугольного сечения. В этом случае распределение касательных напряжений имеет вид, показанный на рис. 213. Наибольшие напряжения возникают у поверхности посередине длинных сторон прямоугольного сечения (в точках  $C$  и  $D$ ). Определяются они по формуле (9.28), где

$$W_{\text{к}} = ahb^2. \quad (9.31)$$

Здесь  $h$  — длинная сторона прямоугольного поперечного сечения;  $b$  — короткая его сторона.

Напряжения, возникающие у поверхности сечения посередине коротких сторон (в точках  $A$  и  $B$ ), меньше. Их можно выразить через  $\tau_{\max}$  следующим образом:

$$\tau = \gamma \tau_{\max}. \quad (9.32)$$

Для определения относительного угла закручивания прямоугольного сечения в формуле (9.29) принимают

$$J_{\text{к}} = \beta hb^3. \quad (9.33)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ , зависящие от отношения  $\frac{h}{b}$ , приведены в табл. 14.

Таблица 14

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1	0,859	—	0,795	—	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Запишем условия прочности и жесткости для прямоугольного сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{ahb^2} \leq [\tau]; \quad (9.34)$$

$$\Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{\beta hb^3 G} \leq [\Theta]. \quad (9.35)$$

При кручении стержней, имеющих форму равнобедренной трапеции, приближенное значение наибольших касательных напряжений и угла закручивания можно получить, рассматривая стержень с сечением эквивалентного прямоугольника. Последний строится следующим образом (рис. 214): из центра тяжести  $C$  трапеции опускают перпендикуляры  $CB$  и  $CD$  на боковые стороны и затем проводят вертикали через точки  $B$  и  $D$ . Полученный прямоугольник  $abcd$  и будет тем эквивалентным сечением рассматриваемого трапециевидного стержня, к которому должны быть применены формулы (9.28)—(9.33).

Если имеет место кручение стержня сложного незамкнутого сечения, которое может быть разбито на части из прямоугольных элементов, то для него

$$J_{\text{к}} = J_{\text{к}_1} + J_{\text{к}_2} + J_{\text{к}_3} + \dots + J_{\text{к}_n} = \sum J_{\text{к}_i}, \quad (9.36)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  — номера простейших частей, на которые разбито сечение.

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей один и тот же:

$$\Theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}} = \frac{M_{\text{кр}_1}}{GJ_{\text{к}_1}} = \dots = \frac{M_{\text{кр}_n}}{GJ_{\text{к}_n}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткостям:

$$M_{\text{кр}_1} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_1}}{J_{\text{к}}}; \quad M_{\text{кр}_2} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_2}}{J_{\text{к}}}; \quad \dots; \quad M_{\text{кр}_n} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_n}}{J_{\text{к}}}.$$

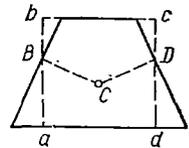


Рис. 214.

Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждой части (i) сечения

$$\tau_{K_i} = \frac{M_{KPi}}{W_{K_i}} = \frac{M_{Kp}}{W_{K_i}} \left( \frac{J_{K_i}}{J_K} \right) = \frac{M_{Kp}}{J_K} \left( \frac{J_{K_i}}{W_{K_i}} \right).$$

Наибольшего значения напряжение  $\tau$  достигает для того элемента, у которого  $\frac{J_{K_i}}{W_{K_i}}$  будет максимальным:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Kp}}{J_K} \left( \frac{J_{K_i}}{W_{K_i}} \right)_{\max} = \frac{M_{Kp}}{W_K}, \quad (9.37)$$

где

$$W_K = \frac{J_K}{\left( \frac{J_{K_i}}{W_{K_i}} \right)_{\max}}. \quad (9.38)$$

При кручении стержней эллиптического поперечного сечения максимальные касательные напряжения возникают в крайних точках, лежащих на малых полуосях (рис. 215). В этом случае

$$W_K = \frac{\pi b^2 h}{16},$$

где  $b$  и  $h$  соответственно размеры малых и больших осей эллипса. Наибольшее напряжение в наружных точках сечения на большой полуоси

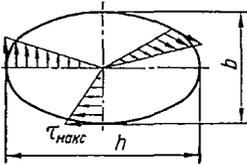


Рис. 215.

$$\tau' = \frac{\tau_{\max}}{m},$$

$$\text{где } m = \frac{h}{b}.$$

Условный момент инерции при кручении для эллипса

$$J_K = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2). \quad (9.39)$$

*Пример 31.* Стальной стержень прямоугольного сечения передает крутящий момент  $M_K = 100 \text{ кг} \cdot \text{м}$ . Найти размеры сечения стержня, если известно, что допускаемое напряжение на кручение  $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$ , а отношение сторон  $\frac{h}{b} = 2,5$ .

Из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Kp}}{W_K} \leq [\tau]$$

находим момент сопротивления кручению стержня:

$$W_K \geq \frac{M_{Kp}}{[\tau]} = \frac{10000}{400} = 25 \text{ см}^3,$$

а, зная соотношение сторон сечения  $\frac{h}{b} = 2,5$  и беря из табл. 14 соответствующее значение  $\alpha = 0,256$ , размеры сечения найдем из формулы (9.31):

$$W_K = \alpha h b^2 = 2,5 \cdot \alpha b^3,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_K}{2,5\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{25}{2,5 \cdot 0,256}} = 3,38 \text{ см}; \quad h = 2,5 \cdot b = 2,5 \cdot 3,38 = 8,45 \text{ см}.$$

**Пример 32.** Найти наибольшее касательное напряжение и угол закручивания для стального стержня длиной 5 м, имеющего поперечное сечение, показанное на рис. 216, а. Стержень скручивается моментами  $M_K = 5000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ , приложенными к обоим концам стержня.

Для вычисления напряжений и деформаций в стержне при кручении профиль его необходимо разбить на отдельные элементы (рис. 216, б). Наибольшее напряжение вычисляют по формуле (9.28):

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K},$$

где

$$W_K = \frac{J_K}{\left(\frac{J_{K_i}}{W_{K_i}}\right)_{\text{макс}}}$$

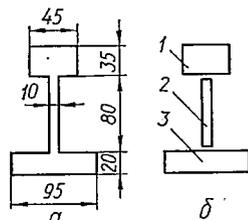


Рис. 216.

Вычислим геометрические характеристики, входящие в последние формулы:

$$J_K = J_{K_1} + J_{K_2} + J_{K_3}.$$

Для части 1 сечения стержня  $h_1 = 45 \text{ мм}$ ;  $b_1 = 35 \text{ мм}$ ;  $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$ ;  $J_{K_1} = \beta h_1 b_1^3$ .

В табл. 14 при  $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$  находим, что  $\alpha_1 = 0,221$ ;  $\beta_1 = 0,172$ , тогда

$$W_{K_1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,221 \cdot 4,5 \cdot 3,5^2 = 12,2 \text{ см}^3;$$

$$J_{K_1} = \beta_1 h_1 b_1^3 = 0,172 \cdot 4,5 \cdot 3,5^3 = 33,2 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{K_1}}{W_{K_1}} = \frac{33,2}{12,2} = 2,72 \text{ см}.$$

Для части 2 сечения стержня  $h_2 = 80 \text{ мм}$ ;  $b_2 = 10 \text{ мм}$ ;  $\frac{h_2}{b_2} = \frac{80}{10} = 8$ . Аналогичным путем найдем, что

$$W_{K_2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^2 = 2,5 \text{ см}^3;$$

$$J_{K_2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^3 = 2,5 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{K_2}}{W_{K_2}} = 1 \text{ см}.$$

Для части 3 сечения стержня  $h_3 = 95 \text{ мм}$ ;  $b_3 = 20 \text{ мм}$ ;  $\frac{h_3}{b_3} = \frac{95}{20} = 4,75$ . Поступая аналогично предыдущему, найдем:

$$W_{K_3} = \alpha_3 h_3 b_3^2 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^2 = 10,9 \text{ см}^3;$$

$$J_{K_2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^3 = 21,9 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{K_2}}{W_{K_2}} = \frac{21,9}{10,9} = 2 \text{ см.}$$

Таким образом,

$$J_K = J_{K_1} + J_{K_2} + J_{K_3} = 33,2 + 2,5 + 21,9 = 57,6 \text{ см}^4.$$

Наибольшее отношение  $\frac{J_{K_1}}{W_{K_1}}$  соответствует части I сечения, поэтому наибольшее касательное напряжение  $\tau$  будет посредине длинных сторон ее. Находим:

$$W_K = \frac{J_K}{\frac{J_{K_1}}{W_{K_1}}} = \frac{57,6}{2,72} = 21,2 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K} = \frac{5000}{21,2} = 236 \text{ кг/см}^2.$$

Угол закручивания стержня

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_K} = \frac{5000 \cdot 500}{8 \cdot 10^9 \cdot 57,6} = 0,0542 \text{ рад.}$$

## § 57. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Переходя к рассмотрению кручения тонкостенных стержней, заметим, что методы их расчета зависят от того, открытый или замкнутый профиль имеет их поперечное сечение.

**Замкнутые профили.** Рассматривая кручение замкнутых тонкостенных профилей (рис. 217), будем считать толщину стенки стержня настолько малой, что касательные напряжения по ней можно принять

одинаковыми, равными напряжениям посредине толщины стенки и направленными по касательной к средней линии стенки.

Из тонкостенного замкнутого стержня вырежем элемент (рис. 218) двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми  $dx$ , и двумя произвольными

меридиональными сечениями. Составляя сумму проекций на ось  $x$  стержня всех сил, приложенных к элементу, находим:

$$\tau \delta = \tau_1 \delta_1 = \text{const.} \quad (9.40)$$

Момент силы  $\tau \delta ds$ , воспринимаемый элементом профиля длиной  $ds$  (рис. 217), относительно произвольной точки  $O$

$$dM_{\text{кр}} = \tau \delta r ds.$$

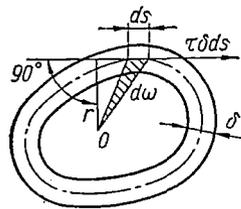


Рис. 217.

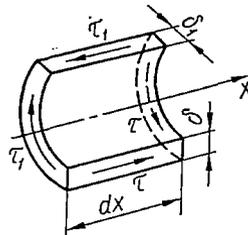


Рис. 218.

Учитывая, что  $rds$  представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника (на рис. 217 заштрихован), т. е.

$$rds = 2d\omega,$$

и поэтому

$$dM_{кр} = 2\tau\delta d\omega, \quad (9.41)$$

интегрируя последнее выражение по всему контуру, получим полную величину крутящего момента, действующего в сечении:

$$M_{кр} = 2\tau\delta\omega, \quad (9.42)$$

где  $\omega$  — площадь, охватываемая средней линией тонкостенного сечения.

Из формулы (9.42) получим, что

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta}. \quad (9.43)$$

Уравнение (9.43) представляет собой формулу, впервые полученную Бредтом.

Если толщина профиля по контуру неодинакова, то максимальное напряжение в тонкостенном профиле определяется формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta_{\min}}, \quad (9.44)$$

где  $\delta_{\min}$  — минимальная толщина стенки профиля.

Чтобы определить относительный угол закручивания тонкостенного стержня, рассмотрим потенциальную энергию деформации, накопленную в элементарном объеме тонкостенного стержня с размерами  $ds$ ,  $dx$ ,  $\delta$ . Учитывая, что при кручении имеет место чистый сдвиг, на основании формулы (8.12) имеем:

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds.$$

Полную энергию деформации однородного стержня длиной  $l$  получим, проинтегрировав последнее выражение по длине  $l$  и по замкнутому контуру:

$$U = \frac{1}{2G} \oint \int \tau^2 \delta ds dx = \frac{l\tau^2\delta^3}{2G} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Подставляя выражение  $\tau\delta$  из формулы (9.42) в правую часть последней формулы, найдем:

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2G (2\omega)^2} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Выражая эту же энергию через работу внешнего скручивающего момента  $M_k = M_{кр}$  на искомом угле перемещения, т. е.

$$U = A = \frac{M_{кр}\varphi}{2} = \frac{M_{кр}\varphi^2}{2},$$

и приравнивая правые части последних формул, найдем, что

$$\varphi = \frac{M_{кр}l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Относительный угол закручивания

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (9.45)$$

Эту формулу можно представить в принятых выше обозначениях для кручения:

$$\Theta = \frac{M_k}{GJ_k},$$

где

$$J_k = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

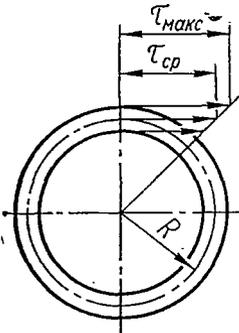


Рис. 219.

При постоянной по длине контура  $s$  толщине

$$\Theta = \frac{M_{кр}S}{4G\omega^2\delta}. \quad (9.46)$$

Рассматривая, например, кручение тонкостенной трубы (рис. 219) при  $\delta = \text{const}$ , будем иметь

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

По формулам (9.43) и (9.46) найдем:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2\delta}; \quad \Theta = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3\delta G}.$$

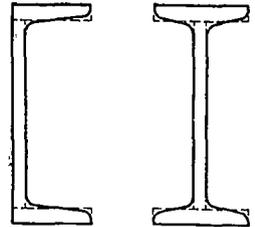


Рис. 220.

**Открытые профили.** Определяя при кручении напряжения и деформации в тонкостенных стержнях открытого профиля типа швеллера, двутавра (рис. 220) или уголка, можно воспользоваться теорией расчета на кручение стержней прямоугольного сечения. В этом случае незамкнутый профиль разбиваем на прямоугольные элементы, толщина которых значительно меньше их длины. Как видно из табл. 14, для таких прямоугольных элементов (при  $\frac{h}{b} > 10$ ) коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  равны  $\frac{1}{3}$ .

Тогда для составного профиля на основании выражений (9.33) и (9.36) будем иметь

$$J_K = \eta \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 h_i \quad (9.47)$$

Здесь введен коэффициент  $\eta$ , учитывающий схематизацию реального профиля:

для уголкового сечения	$\eta = 1,00$ ;
» двутаврового »	$\eta = 1,20$ ;
» таврового »	$\eta = 1,15$ ;
» швеллерного »	$\eta = 1,12$ .

В тонкостенных открытых профилях длину элемента обычно принято обозначать через  $s$ , а толщину стенок — через  $\delta$ . Тогда, заменяя в формуле (9.47)  $h$  на  $s$ , а  $b$  на  $\delta$ , получим:

$$J_K = \eta \frac{1}{3} \sum_i \delta_i^3 s_i \quad (9.48)$$

Угол закручивания определится по формуле (9.30), а наибольшее касательное напряжение, которое возникает на участке, имеющем наибольшую толщину стенки  $\delta_{\max}$ , — по формуле (9.28). При этом для длинных прямоугольников

$$\left( \frac{J_{K_i}}{W_{K_i}} \right)_{\max} = \delta_{\max}$$

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Kp} \delta_{\max}}{J_K} \quad (9.49)$$

Рассмотрим примеры расчета тонкостенных стержней открытого профиля.

*Пример 33.* Определим максимальное напряжение и угол закручивания стержня длиной 900 мм (рис. 221) с поперечным сечением в виде равнобокого уголка  $50 \times 50 \times 5$ , который подвергается действию скручивающего момента  $M_K = 500 \text{ кг} \cdot \text{см}$ . Модуль сдвига материала стержня  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

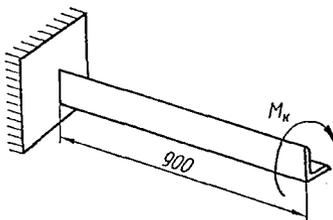


Рис. 221.

Максимальные касательные напряжения возникают посредине полки (концентрация напряжения во входящем угле не учитывается). Эти напряжения определим по формуле (9.49):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Kp} \delta_{\max}}{J_K},$$

где

$$J_K = \eta \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=2} \delta_i^3 s_i = 1 \cdot \frac{1}{3} [(5 \cdot 0,5^3) + (4,5 \cdot 0,5^3)] = 0,4 \text{ см}^4;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Kp} \delta_{\max}}{J_K} = \frac{500 \cdot 0,5}{0,4} = 625 \text{ кг/см}^2.$$

Угол закручивания стержня определится по формуле (9.30):

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_k} = \frac{500 \cdot 90}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,4} = 0,140625 \text{ рад} = 8^\circ 3'.$$

*Пример 34.* Определить напряжение и погонный угол закручивания стальной трубы, разрезанной вдоль образующей (рис. 222). Наружный диаметр трубы  $d_n = 90$  мм, внутренний  $d_v = 85$  мм. Труба находится под действием скручивающего момента  $M_{кр} = 500$  кг/см. Модуль сдвига материала  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

Сравните полученные напряжения и угол закручивания с напряжением и углом закручивания сплошной трубы.

Касательные напряжения в разрезанной трубе определим по формуле (9.49):

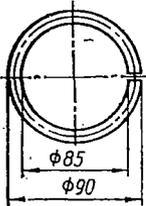


Рис. 222.

$$\tau_p = \frac{M_{кр} \delta}{J_k},$$

$$J_k = \frac{1}{3} s \delta^3.$$

Здесь  $s$  — развернутая длина средней линии сечения трубы.

Тогда

$$J_k = \frac{1}{3} s \delta^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot 8,75 \cdot 0,25^3 = 0,143 \text{ см}^4;$$

$$\tau_p = \frac{M_{кр} \delta}{J_k} = \frac{500 \cdot 0,25}{0,143} = 875 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в сплошной трубе определится по формуле (9.43):

$$\tau_{сп} = \frac{M_{кр}}{2\omega \delta} = \frac{500 \cdot 4}{2\pi \cdot 8,75^2 \cdot 0,25} = 16,63 \text{ кг/см}^2.$$

Погонный угол закручивания разрезанной трубы

$$\theta_p = \frac{M_{кр}}{GJ_k} = \frac{500}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,143} = 0,00437 \text{ рад/см}.$$

Погонный угол закручивания неразрезанной трубы найдем из формулы (9.46):

$$\theta_{сп} = \frac{M_{кр} s}{4G\omega^2 \delta} = \frac{500 \cdot \pi \cdot 8,75}{4 \cdot 8 \cdot 10^5 \left( \frac{\pi}{4} \cdot 8,75^2 \right)^2 \cdot 0,25} = 0,00000475 \text{ рад/см}.$$

Таким образом, в сплошной трубе при кручении напряжения меньше в 52,5 раза, а угол закручивания — в 920 раз, чем в трубе, разрезанной вдоль образующей.

## § 58. РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

Винтовые пружины являются наиболее распространенным в технике типом пружин. Чаще всего их изготавливают из стали круглого поперечного сечения. Они подвергаются действию растягивающих или сжимающих сил.

Точный расчет на прочность винтовых пружин достаточно сложен, так как проволока винтовой пружины может испытывать одновременно

кручение, сдвиг и изгиб. Однако при малых углах наклона витков влиянием изгиба можно пренебречь.

Пусть цилиндрическая винтовая пружина со средним диаметром  $D = 2R$  (рис. 223), имеющая  $n$  витков и диаметр  $d$  поперечного сечения проволоки (стержня) пружины, подвергается растяжению центрально приложенной силой  $P$ . Чтобы установить расчетные формулы для напряжений в пружине, разрежем ее на две части по любому витку плоскостью, проходящей через ось цилиндра, образованного витками. Применяя метод сечений (удаляя мысленно нижнюю часть пружины), рассмотрим условие равновесия оставшейся (верхней) ее части (рис. 224). Очевидно, влияние отброшенной части пружины на рассматриваемую верхнюю может быть учтено приложением к месту разреза витка поперечной силы

$$Q = P$$

и крутящего момента

$$M_{кр} = PR.$$

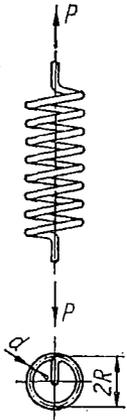


Рис. 223.

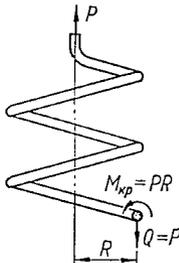


Рис. 224.

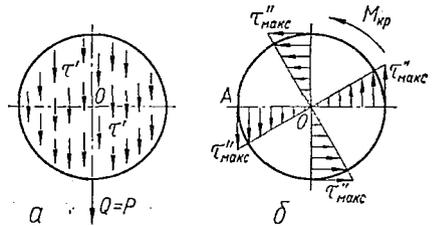


Рис. 225.

Считая, что приближенно угол наклона витка равен нулю, можно остальными силовыми факторами (нормальной силой, изгибающим моментом) пренебречь.

Таким образом, в рассматриваемом сечении пружины имеется две группы касательных напряжений:

1) напряжения от сдвига, равномерно распределенные по сечению:

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}; \quad (9.50)$$

2) напряжения от кручения, максимальное значение которых

$$\tau''_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.51)$$

Распределение напряжений  $\tau'$  от сдвига показано на рис. 225, а, а напряжений  $\tau''$  от кручения — на рис. 225, б.

Как видно из картины распределения напряжений, в точке сечения витка на внутреннем радиусе пружины касательные напряжения  $\tau'$  от действия поперечной силы и максимальные напряжения  $\tau''$  от крутящего

момента по направлению совпадают. Поэтому максимальные напряжения в пружине

$$\tau_{\text{макс}} = \tau' + \tau''_{\text{макс}} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3},$$

или

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (9.52)$$

Во многих случаях при расчете пружин большого среднего радиуса  $R$ , изготовленных из тонкой проволоки, при  $\frac{d}{4R} \ll 1$  напряжения от кручения  $\tau''_{\text{макс}}$  будут значительно большими, чем напряжения среза  $\tau'$ , и последние можно не учитывать. Тогда максимальные напряжения в винтовой пружине с достаточной степенью точности определяются по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.53)$$

Заметим, однако, что при расчете мощных винтовых рессор, таких, например, как применяемые в железнодорожном подвижном составе, следует пользоваться формулой (9.52), поскольку напряжения от среза здесь существенны из-за относительно большого значения  $d/R$ . Опыт эксплуатации пружин показывает, что первые трещины при разрушении, как правило, появляются с внутренней стороны витка, где действуют наибольшие суммарные касательные напряжения.

Выводя формулу (9.52), мы не учитывали, что на внутренней и наружной поверхностях витков радиусы кривизны различны. В некоторых случаях, учитывая это, вместо формулы (9.52) для определения наибольших касательных напряжений используют следующую, более точную формулу:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right),$$

где

$$m = \frac{2R}{d}.$$

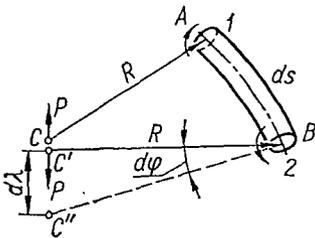


Рис. 226.

Нетрудно убедиться, что поправочный коэффициент в скобках увеличивается с уменьшением  $m$ : например, при  $m = 10$  он равен 1,14; а при  $m = 4$  этот коэффициент составляет  $\sim 1,4$ .

При определении деформации  $\lambda$  (растяжения или осадки) пружины обычно принимают во внимание только кручение. Рассмотрим деформацию кручения мысленно выделенного из пружины элементарного отрезка  $ds$  ее витка (рис. 226) под действием растягивающих пружину сил  $P$ , приложенных как бы к концам  $C$  и  $C'$  абсолютно жестких стержней  $AC$  и  $BC'$ . Последние заменяют отброшенные части пружины и направлены по радиусу ее.

В описанных условиях элемент пружины будет испытывать деформацию кручения, вследствие чего сечение  $B$  повернется относительно сечения  $A$  на некоторый угол  $d\varphi$ , который определяется по формуле

$$d\varphi = \frac{M_{\text{кр}} ds}{GJ_p},$$

где

$$M_{\text{кр}} = PR; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Вследствие поворота сечения «жесткий» радиус  $BC'$ , повернутый на тот же угол  $d\varphi$ , «перенесет» точку приложения силы  $P$  в новое положение  $C''$ . Отрезок  $C'C''$  будет характеризовать часть деформации растяжения витой пружины, определяемую закручиванием рассматриваемого участка  $ds$  витка, т. е.

$$C'C'' = d\lambda \approx R d\varphi.$$

Полная деформация всей пружины, очевидно, определится формулой

$$\lambda = \int_{(s)} R d\varphi = R \int_{(s)} \frac{M_{\text{кр}} ds}{GJ_p} = \frac{RM_{\text{кр}}}{GJ_p} \int_{(s)} ds.$$

Учитывая, что приближенно длина стержня пологой цилиндрической пружины с числом витков  $n$  составляет величину

$$\int_{(s)} ds = 2\pi Rn,$$

деформацию пружины определим по формуле

$$\lambda = \frac{M_{\text{кр}} R}{GJ_p} \cdot 2\pi Rn,$$

или, подставляя  $M_{\text{кр}} = PR$  и  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , получим:

$$\boxed{\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{8PD^3n}{Gd^4}} \quad (9.54)$$

Формулы (9.53) и (9.54) позволяют проверить прочность и определить удлинение (или осадку) цилиндрической винтовой пружины.

Допускаемые напряжения на срез при расчете стальных пружин выбирают в зависимости от диаметра проволоки пружины; обычно для закаленной пружинной стали

$$[\tau] = 50 \text{ кг/мм}^2 \text{ при } d = 6 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 40 \text{ кг/мм}^2 \text{ при } d = 10 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 35 \text{ кг/мм}^2 \text{ при } d = 12 \text{ мм}.$$

Для хромоникелевых сталей при растяжении пружин с диаметром проволоки 12—16 мм принимают  $[\tau] = 70 \text{ кг/мм}^2$ . Для фосфористой

бронзы с модулем упругости при сдвиге  $G = 4,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$  при  $d < 16 \text{ мм}$  берут  $[\tau] = 13 \text{ кг/мм}^2$ .

Указанные допускаемые напряжения могут быть приняты при постоянных нагрузках.

Часто, рассчитывая амортизационные пружины (пружины для смягчения резких толчков), за основу берут величину энергии  $T$ , которую должна поглощать пружина (рессора) во время эксплуатации. При этом исходят из того, что между деформацией  $\lambda$  пружины и силой  $P$ , действующей на нее, существует прямолинейная зависимость. Поэтому потенциальная энергия деформации пружины может быть выражена формулой

$$U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4}.$$

С другой стороны, из формулы (9.53) через напряжения можно выразить крутящий момент:

$$M_{кр} = P R = \frac{\tau_{\max} \pi d^3}{16}.$$

Тогда потенциальную энергию, накапливаемую в пружине, также можно выразить через напряжения:

$$U = \frac{2\pi R n}{4G} \cdot \frac{\pi d^3}{4} \tau_{\max}^2.$$

Но так как  $2\pi R n$  — длина стержня (проволоки) пружины, а  $\frac{\pi d^2}{4}$  — площадь его сечения, то

$$2\pi R n \frac{\pi d^2}{4} = V$$

представляет собой объем материала пружины. Учитывая это, потенциальную энергию пружины можем представить формулой

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V. \quad (9.55)$$

Таким образом, задаваясь предельной величиной напряжения  $\tau_{\max} = [\tau]$ , можно вычислить объем пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии  $T$ , с тем чтобы не было превышения допускаемого напряжения:

$$T = U = \frac{[\tau]^2}{4G} V,$$

откуда

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (9.56)$$

Конструируя пружину по найденному объему, следует выбрать ее размеры ( $R$ ,  $d$  и  $n$ ) с таким расчетом, чтобы при проверке осадки пружины зазоры между витками не закрывались.

В заключение отметим, что, кроме рассмотренных цилиндрических пружин постоянного сечения с пологим наклоном витка, существует целый ряд других конструкций витых пружин: конические, призматические и различные фасонные (параболические, двойные конические, бочкообразные и др.) При этом шаг пружины может быть как постоянным, так и переменным, а сечение витка не только круглой, но и прямоугольной формы. Методы расчета таких пружин достаточно сложны, и рассматривать их здесь не будем.

*Пример 35.* Предохранительный клапан диаметром  $d_k = 75$  мм должен открываться при давлении пара  $p = 6$  ат и иметь возможность подниматься на высоту  $\lambda_0 = 20$  мм. Диаметр проволоки стальной пружины  $d = 12$  мм, средний диаметр витка пружины  $2R = 60$  мм. При отсутствии нагрузки шаг витков пружины  $t = 17$  мм;  $G = 8 \cdot 10^5$  кгГ/см<sup>2</sup>.

Определить необходимое число витков пружины  $n$  с тем, чтобы при максимальном поднятии клапана еще оставался запас на дальнейшее сжатие не менее  $\lambda_2 = 15$  мм. Найти также начальное сжатие пружины  $\lambda_1$  и напряжение  $\tau$  при полном открытии клапана.

Сила, поднимающая клапан,

$$P = p \frac{\pi d_k^2}{4} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 7,5^2}{4} = 265 \text{ кг.}$$

Чтобы при этой силе пружина сжималась, согласно формуле (9.54) надо дать ей следующую первоначальную осадку:

$$\lambda_1 = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 265 \cdot 3^3n}{8 \cdot 10^5 \cdot 1,2^4} = 0,276n \text{ см.}$$

Полная осадка пружины в нагруженном состоянии будет складываться из  $\lambda_1$ , требуемого подъема  $\lambda_0$  и запаса  $\lambda_2$ . Эта сумма должна равняться разности шага пружины и диаметра проволоки пружины, умноженной на число витков, т. е.

$$\lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_2 = n(t - d),$$

или

$$0,276n + 2 + 1,5 = n(1,7 - 1,2),$$

откуда

$$n = \frac{3,5}{0,224} \approx 16 \text{ витков.}$$

Предварительная осадка пружины

$$\lambda_1 = 0,276n = 0,276 \cdot 16 = 4,4 \text{ см.}$$

Наибольшее напряжение в пружине при полном открытии клапана найдем, связав выражения для  $\lambda$  и  $\tau_{\text{макс}}$ . Из формулы (9.54)

$$P = \frac{\lambda d^4 G}{64R^3 n}.$$

Подставляя это значение  $P$  в формулу (9.53) для  $\tau_{\text{макс}}$ , найдем напряжение при полном открытии клапана:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\lambda d G}{4R^2 n \pi} = \frac{6,4 \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 10^5}{4 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot \pi} \approx 3390 \text{ кгГ/см}^2.$$

*Пример 36.* Винтовая пружина изготовлена из проволоки диаметра  $d = 4$  мм. Внутренний диаметр пружины  $D_1 = 46$  мм. В нагруженном состоянии зазор в свету между витками  $t_1 = 1$  мм;  $G = 8 \cdot 10^5$  кгГ/см<sup>2</sup>. Определить, какая требуется сила для сжатия пружины, чтобы зазор исчез.

Средний диаметр пружины

$$D = 2R = D_1 + d = 46 + 4 = 50 \text{ мм.}$$

Зазор закрывается, если осадка одного витка будет равна ему, т. е.

$$\lambda = t_1 = \frac{64PR^3}{Gd^4},$$

откуда

$$P = \frac{Gd^4 t_1}{64R^3} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0,4^4 \cdot 0,1}{64 \cdot 2,5^3} = 2,05 \text{ кг.}$$

**Пример 37.** Две пружины 1 и 2 (рис. 227), свитые из проволоки одинакового диаметра  $d = 10 \text{ мм}$  и имеющие одинаковое число витков  $n = 10$ , сжимаются штоком клапана. Высота наружной пружины 1 в свободном состоянии на  $a = 60 \text{ мм}$  больше, чем внутренней пружины 2. Найти усилие, осадку и напряжение каждой пружины, если радиус осевой линии витка наружной пружины  $R_1 = 50 \text{ мм}$ , внутренней  $R_2 = 30 \text{ мм}$ , усилие  $P = 400 \text{ кг}$  и модуль упругости при сдвиге  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

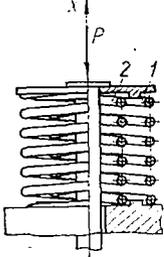


Рис. 227.

Обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  усилия, приходящиеся на каждую из пружин. Из уравнения равновесия клапана следует, что

$$\sum X = P_1 + P_2 - P = 0. \quad (9.57)$$

Таким образом, задача один раз статически неопределима.

Второе уравнение, необходимое для определения искомого неизвестных  $P_1$  и  $P_2$ , получим из условия совместности деформаций:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + a, \quad (9.58)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — величины осадки соответственно наружной и внутренней пружин под действием сил  $P_1$  и  $P_2$  соответственно:

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3n}{Gd^4}; \quad (9.59)$$

$$\lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3n}{Gd^4}. \quad (9.60)$$

Подставив выражения для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в формулу (9.58), будем иметь:

$$\frac{64P_1R_1^3n}{Gd^4} = \frac{64P_2R_2^3n}{Gd^4} + a,$$

или в числовом выражении:

$$\frac{64P_1 \cdot 5^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} = \frac{64P_2 \cdot 3^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} + 6,$$

откуда

$$125P_1 - 27P_2 = 7500.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (9.57), которое следует переписать в виде

$$P_1 + P_2 = 400,$$

найдем:

$$P_1 = 120 \text{ кг}; \quad P_2 = 280 \text{ кг.}$$

Определим осадку пружин. Для наружной пружины согласно равенству (9.59)

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 120 \cdot 125 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} = 12 \text{ см.}$$

Для внутренней пружины

$$\lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 280 \cdot 27 \cdot 10}{8 \cdot 10^6 \cdot 1^4} = 6 \text{ см.}$$

Касательные напряжения, возникающие в витках наружной и внутренней пружин, согласно формуле (9.52) соответственно будут:

$$\tau_1 = \frac{16P_1R_1}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R_1}\right) = \frac{16 \cdot 120 \cdot 5}{3,14 \cdot 1^3} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 5}\right) = 3210 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_2 = \frac{16P_2R_2}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R_2}\right) = \frac{16 \cdot 280 \cdot 3}{3,14 \cdot 1^3} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 3}\right) = 4630 \text{ кг/см}^2.$$

## § 59. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Концентрация напряжений, или местное увеличение напряжений, вызывается резким изменением очертания детали (наличием надреза, отверстия, резьбы и т. п.).

Величина наибольшего напряжения при кручении в зоне концентрации (пик напряжения) выражается как произведение номинального напряжения  $\tau_n$  на коэффициент концентрации  $\alpha_\tau$ :

$$\tau_{\text{макс}} = \alpha_\tau \tau_n. \quad (9.61)$$

Здесь:  $\tau_n$  вычисляется по формулам сопротивления материалов, в частности, для вала круглого сечения

$$\tau_n = \frac{M_{\text{кр}}}{J_\rho} \cdot \rho; \quad (9.62)$$

$\alpha_\tau$  представляет отношение максимального напряжения в зоне концентрации, вычисленного в предположении совершенной упругости материала, к номинальному напряжению, т. е.

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{\text{макс}}}{\tau_n}.$$

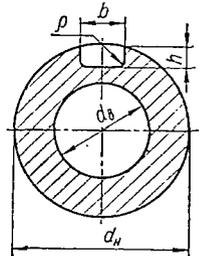


Рис. 228.

Он называется *теоретическим коэффициентом концентрации* и определяется методами теории упругости или экспериментально (поляризационно-оптическим методом, тензометрированием, по методу аналогий).

Заметим, что коэффициент концентрации напряжений для выточки (или надреза) при данной глубине ее и размерах детали зависит, главным образом, от кривизны поверхности по дну выточки.

Для иллюстрации влияния формы выточки на концентрацию напряжений рассмотрим случай паза (шпоночной канавки) с резко очерченными углами (рис. 228). Опыты, проведенные с полым валом наружного диаметра  $d_n = 254$  мм и внутреннего  $d_n = 147$  мм, с глубиной паза  $h = 25,4$  мм и шириной  $b = 63,5$  мм при различных радиусах  $\rho$  выкружки в углах, показали, что наибольшие напряжения в закругленных углах равны наибольшим напряжениям в таком же валу без паза, умноженным на коэффициент концентрации  $\alpha_\tau$ , значения которого приведены в табл. 15.

$\rho$ , мм	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24	17,78
$\alpha_\tau$	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

Как видно из таблицы, концентрация напряжений может быть значительно снижена увеличением радиуса закругления в углах.

Рассмотрим второй типичный пример концентрации напряжений при кручении валов переменного сечения, с которыми часто приходится

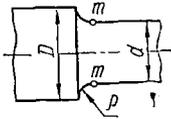


Рис. 229.

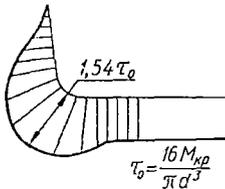


Рис. 230.

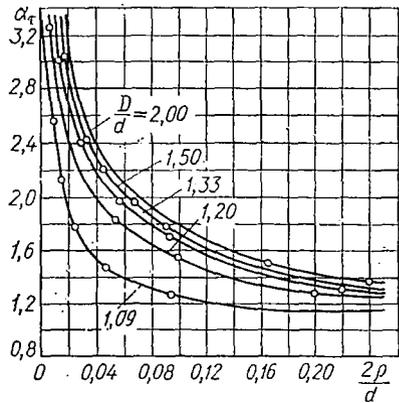


Рис. 231.

встречаться в машиностроительной практике. Если диаметр вала по его длине меняется постепенно, то формулы, полученные для определения напряжений в цилиндрических валах, позволяют оценить максимальные напряжения с достаточной степенью точности. Если же изменение диаметра происходит резко — так, как показано на рис. 229, то в точках  $m$  в начале закругления имеет место высокая концентрация напряжений. При этом величина наибольшего напряжения зависит от отношений  $\rho:d$  и  $D:d$ , где  $\rho$  — радиус закругления, а  $D$  и  $d$  — диаметры сопрягаемых цилиндрических частей вала. Как показывают опыты, основанные на применении электроаналогии, картина распределения касательных напряжений при кручении в зоне концентрации, т. е. в месте сопряжения двух диаметров, имеет примерно такой вид, как показано на рис. 230. Зависимости  $\alpha_\tau = f\left(\frac{2\rho}{d}\right)$  при разных значениях отношения  $D:d$  приведены на рис. 231.

Из анализа графиков рис. 231 видно, что в некоторых случаях при определенном соотношении диаметров  $D:d$  и малых радиусах закругления  $\rho$  коэффициенты концентрации напряжений могут быть больше трех. Для пластичных материалов при статических нагрузках концентрация напряжений не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит перераспределение

(выравнивание) напряжений. В валах же, изготовленных из хрупких однородных материалов, например из закаленной стали, за счет концентрации напряжений в местах закругления двух смежных диаметров даже в случае статических нагрузок возможно появление трещин, которые могут привести к разрушению вала. Поэтому, конструируя детали из хрупких материалов, необходимо производить учет концентрации напряжений даже при статическом приложении нагрузки. Что же касается влияния концентрации напряжений при повторно-переменных нагрузках, то оно, как будет показано в гл. XXI, имеет существенное значение даже для пластичных материалов.

В заключение рассмотрим случай концентрации напряжений вокруг малого радиального отверстия в полем тонкостенном валу при кручении (рис. 232).

Двумя парами взаимно перпендикулярных площадок, наклоненных под уг-

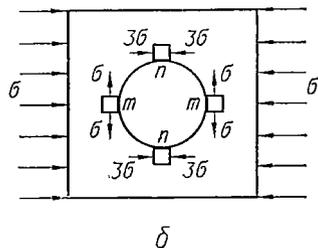
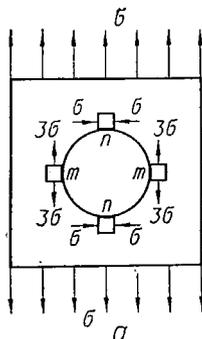
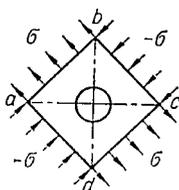


Рис. 232.

Рис. 233.

Рис. 234.

лом  $45^\circ$  к образующим вала, выделим вокруг отверстия некоторый элемент (рис. 233). Эти площадки для рассматриваемой задачи кручения, как было установлено выше, являются главными площадками, а поэтому по граням рассматриваемого элемента  $abcd$  будут действовать только нормальные напряжения, равные по величине, но разные по знаку. Абсолютные значения их, как известно, равны касательным напряжениям, определяемым в соответствующих точках поперечного сечения по формулам теории кручения. Анализируя напряженное состояние рассматриваемого элемента и полагая, что отверстие мало, а стенки вала тонкие, легко убедиться, что это напряженное состояние аналогично тому, какое имеет место для тонкой пластинки с малым отверстием, растянутой в одном направлении некоторым напряжением  $\sigma = \tau$  и сжатой таким же по величине напряжением в направлении под углом  $90^\circ$  к первому.

Таким образом, задача об определении величины концентрации напряжений у радиального отверстия в стенке скручиваемого трубчатого вала сводится к определению концентрации напряжений в пластинке с отверстием, подверженной во взаимно перпендикулярных направлениях действию растяжения и сжатия напряжениями  $\sigma = \tau$ .

Как указывалось выше, в зоне концентрации напряжения у отверстия малого диаметра, сделанного в пластинке, растягиваемой в одном направлении (рис. 234, а), значение максимальных растягивающих напряжений в точках  $m$  в три раза выше напряжений, действующих на

контуре пластинки, т. е.  $\alpha = 3$ . В то же время в точках  $n$ , расположенных под углом  $90^\circ$ , возникают сжимающие напряжения, примерно равные по абсолютной величине действующим на контуре пластинки растягивающим напряжениям. Очевидно, при сжатии пластинки в перпендикулярном направлении с напряжением  $\sigma$  напряжения в точках  $m$  и  $n$  будут равны указанным на рис. 234, б. В случае плоского напряженного состояния, при котором по взаимно перпендикулярным направлениям действуют напряжения  $\sigma$  и  $-\sigma$ , как это имеет место при кручении (рис. 233), в рассматриваемых точках  $m$  и  $n$  напряжения будут суммироваться, т. е. напряжения в точках  $m$

$$\sigma_{\text{макс}} = 3\tau + \sigma = 4\tau,$$

а напряжения в точках  $n$

$$\sigma_{\text{мин}} = -3\tau - \sigma = -4\tau.$$

Таким образом, имея в виду, что в местах концентрации максимальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{макс}} = \alpha_\tau \tau_n,$$

а в нашем случае

$$\sigma_n = \sigma = \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p},$$

получим:

$$\sigma_{\text{макс}} = 4\tau = 4 \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}.$$

Значит, в рассматриваемом случае (рис. 232) коэффициент концентрации напряжений

$$\alpha_\tau = 4.$$

Такое высокое значение коэффициентов концентрации при кручении валов с отверстием (часто такие отверстия делают для смазки) обязывает особенно осторожно подходить к выбору размеров валов, изготавливаемых из хрупких материалов. Для снижения концентрации напряжений в машиностроительной практике приходится прибегать к различным технологическим мерам: сглаживанию резких переходов, закруглению кромок (у отверстий) и т. п.

## Глава X

### ИЗГИБ

#### § 60. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим случай чистого изгиба балки (рис. 235, а). Из шести внутренних силовых факторов, которые могут действовать в ее поперечных сечениях в общем случае изгиба, при чистом изгибе отлич-

ным от нуля будет только изгибающий момент  $M$ . Поскольку изгиб предполагается плоским, будем считать, что ось балки деформируется в плоскости, совпадающей с силовой (на рис. 235 — в плоскости чертежа). В § 17 были указаны условия, необходимые для того, чтобы изгиб был плоским. Настоящий параграф посвятим выводу формулы для вычисления напряжений в любой точке сечения и дадим обоснование условиям плоского изгиба. Имея в виду последнее, не будем пока вводить никаких ограничений в отношении формы и расположения силовой плоскости (за исключением того, что силовая плоскость должна проходить через ось стержня).

Согласно общему плану (§ 26) начнем вывод с рассмотрения статической стороны задачи. Проведем поперечное сечение  $m$ — $m$  на произвольном расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 235, а).

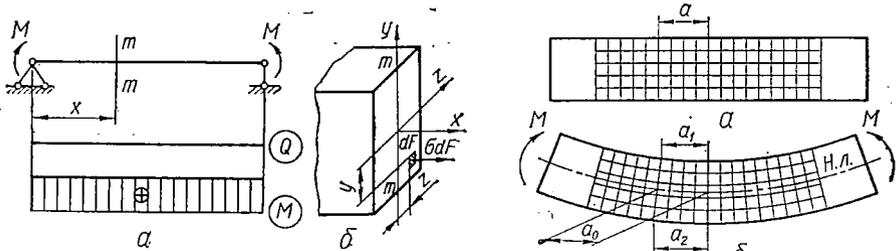


Рис. 235.

Рис. 236.

В плоскости сечения (рис. 235, б) проведем координатные оси  $y$  и  $z$ : ось  $y$  совместим с силовой линией (линией пересечения силовой плоскости с плоскостью сечения), а ось  $z$  проведем на произвольной пока высоте, но перпендикулярно к оси  $y$ . Ось  $x$  направим перпендикулярно к плоскости сечения. Выделим в сечении элемент площади  $dF$ , координаты которого  $y$  и  $z$ . В общем случае на элемент могли бы действовать напряжения  $\sigma$  и  $\tau$ . Однако при чистом изгибе все усилия и моменты, связанные с касательными напряжениями,  $Q_y$ ,  $Q_z$  и  $M_{кр}$  — равны нулю. На основании выражений (3.29) — (3.34) можно принять, что касательных напряжений в сечении нет и на элемент  $dF$  будет действовать только усилие  $\sigma dF = dN$ . Поэтому из всех формул (3.29) — (3.34) останутся только три:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F \sigma z dF; \quad M_z = \int_F \sigma y dF. \quad (10.1)$$

Но в данном случае в сечениях балки действует только один изгибающий момент, так что

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = M. \quad (10.2)$$

Из зависимостей (10.1) и (10.2) получаем:

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma z dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \quad (10.3)$$

Переходя к геометрической стороне задачи, рассмотрим картину деформаций той же балки (рис. 236). Опыты, поставленные

на эластичных (например резиновых) моделях, позволяющих легко получить значительные деформации, показывают, что если на поверхности модели нанести прямоугольную сетку линий (рис. 236, а), то при чистом изгибе она деформируется (рис. 236, б) следующим образом:

- а) продольные линии искривляются по дуге окружности;
- б) контуры поперечных сечений остаются плоскими;
- в) линии контуров сечений всюду пересекаются с продольными волокнами под прямым углом.

На основании этого можно предположить, что при чистом изгибе поперечные сечения балки остаются плоскими и поворачиваются так,

что остаются нормальными к изогнутой оси балки. Следовательно, при чистом изгибе, как и при растяжении (сжатии) и кручении круглых стержней, будет справедлива гипотеза плоских сечений.

Далее, измеряя расстояния между аналогичными точками контура каких-либо двух сечений, можно обнаружить, что при деформации эти расстояния изменяются. Так, оказывается, что  $a_1 < a$  и  $a_2 > a$  (рис. 236, а и б). Значит, верхние продольные волокна балки укорачиваются, а нижние — удлиняются. Но можно найти и такие волокна, длина которых при изгибе

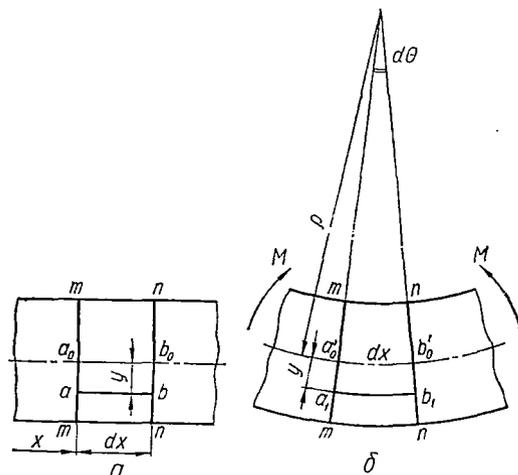


Рис. 237.

остается неизменной ( $a_0 = a$ ). Совокупность волокон, не меняющих своей длины при изгибе балки, называется *нейтральным слоем* (н. с.). Волокна, принадлежащие нейтральному слою, до деформации лежат в одной плоскости, а в деформированном состоянии образуют некоторую цилиндрическую поверхность. В обоих случаях каждое поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем по прямой, которая называется *нейтральной линией* (н. л.) сечения.

При плоском изгибе нейтральный слой оказывается перпендикулярным к силовой плоскости, а значит, нейтральная линия перпендикулярна к силовой линии в сечении. Будем считать, что ось  $z$  (рис. 235) проведена в сечении так, что она совпадает с нейтральной линией (но положение последней по высоте сечения пока неизвестно).

Выделим элемент двумя смежными поперечными сечениями  $m - m$  и  $n - n$ , отстоящими друг от друга на расстоянии  $dx$  (рис. 237, а), и, приняв во внимание гипотезу плоских сечений, рассмотрим его деформированное состояние (рис. 237, б). Сечения  $m - m$  и  $n - n$  остаются плоскими и поворачиваются на угол  $d\theta$ . Элемент  $a_0 b_0$  нейтраль-

ного слоя превращается в дугу  $a'_0b'_0$  с радиусом  $\rho$ , а волокно  $ab$ , находящееся на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, — в криволинейное волокно  $a_1b_1$  с радиусом кривизны  $\rho + y$ .

Относительное удлинение этого волокна

$$\epsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Но  $a_1b_1 = (\rho + y) d\theta$  и  $ab = dx$ , поэтому

$$\epsilon = \frac{(\rho + y) d\theta - dx}{dx}. \quad (10.4)$$

Чтобы упростить это выражение, рассмотрим волокно  $a_0b_0$ , принадлежащее нейтральному слою. Его длина  $a_0b_0 = dx$ . После деформации оно превращается в дугу  $a'_0b'_0 = \rho d\theta$ . Но волокна нейтрального слоя не изменяют своей длины при деформации, поэтому

$$dx = \rho d\theta. \quad (10.5)$$

Подставив выражение (10.5) в выражение (10.4) и сократив на  $d\theta$ , получим:

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.6)$$

Следовательно, рассмотрение геометрической стороны задачи показало, что относительная продольная деформация пропорциональна расстоянию волокна от нейтральной оси.

Чтобы записать закон Гука, выражающий физическую сторону задачи, нужно выяснить, в каком напряженном состоянии находится волокно  $ab$ . На торцевой поверхности волокна (площадка  $dF$  на рис. 235, б), как уже было сказано, касательных напряжений нет. В силу закона парности нет их также и в сечениях, параллельных оси балки. Что же касается нормальных напряжений, выражающих взаимодействие рассматриваемого волокна с соседними волокнами, то предполагается, что волокна не давят друг на друга, и, значит, эти напряжения равны нулю. Таким образом, волокно  $ab$  находится в линейном напряженном состоянии — испытывает простое растяжение или сжатие. Поэтому для него закон Гука следует записать в виде

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (10.7)$$

Переходя к синтезу, исключим  $\epsilon$  из формул (10.6) и (10.7). В результате будем иметь:

$$\boxed{\sigma = \frac{E}{\rho} y.} \quad (10.8)$$

Подставляя зависимость (10.8) в третье уравнение (10.3) и учитывая, что  $E$  и  $\rho$  как величины, не зависящие от положения элемента  $dF$  в сечении, можно вынести за знак интеграла, получим:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M.$$

Вспомнив, что  $\int_E y^2 dF = J_z$  представляет собой момент инерции сечения относительно оси  $z$ , можем последнюю формулу записать в виде

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}} \quad (10.9)$$

Наконец, подставив формулу (10.9) в выражение (10.8), найдем, что

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{J_z}} \quad (10.10)$$

Это и есть искомая формула, дающая возможность вычислять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в любой точке ее сечения. Осталось только установить, где в сечении расположена ось  $z$  — нейтральная линия сечения.

Чтобы ответить на этот вопрос, внесем значение  $\sigma$  из формулы (10.10) в первые два уравнения (10.3):

$$\frac{M}{J_z} \int_F y dF = 0; \quad \frac{M}{J_z} \int_F yz dF = 0.$$

Поскольку  $\frac{M}{J_z} \neq 0$ , а

$$\int_F y dF = S_z; \quad \int_F yz dF = J_{yz},$$

то

$$S_z = 0; \quad (10.11)$$

$$J_{yz} = 0. \quad (10.12)$$

На основании равенства (10.11) заключаем, что ось  $z$  — нейтральная линия сечения — проходит через центр тяжести (ц. т.) поперечного сечения. Силовая плоскость проходит через ось балки, а значит, силовая линия (ось  $y$ ) проходит через центр тяжести сечения.

Равенство (10.12) показывает, что оси  $y$  и  $z$  — главные центральные оси сечения. Этим определяется положение нейтральной линии сечения.

Таким образом, если силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, то изгиб будет плоским и нейтральная линия сечения совпадет с другой главной центральной осью. Иначе говоря, если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей стержня, то нейтральный слой совпадает с другой главной плоскостью.

Заметим, что часто индекс  $z$  в обозначении момента инерции опускают, помня, однако, что  $J$  вычисляется относительно нейтральной линии сечения.

Теперь проанализируем полученные результаты.

Формула (10.9) в проведенном выводе была вспомогательной, однако она имеет и большое самостоятельное значение. Ее можно трактовать как закон Гука при изгибе, поскольку она связывает деформацию (кривизну нейтрального слоя  $\frac{1}{\rho}$ ) с действующим в сечении моментом.

Произведение  $EJ$  носит название *жесткости сечения при изгибе* и имеет размерность  $\text{кГ} \cdot \text{см}^2$ .

Из формулы (10.9) видно, что если балка изготовлена из однородного материала ( $E = \text{const}$ ) и имеет постоянное сечение ( $J = \text{const}$ ), то при чистом изгибе ( $M = \text{const}$ ) ось ее искривляется по дуге окружности ( $\frac{1}{\rho} = \text{const}$ , и, значит,  $\rho = \text{const}$ ).

Формула (10.10) показывает, что, какую бы форму и размеры ни имело сечение, напряжения в точках нейтральной линии равны

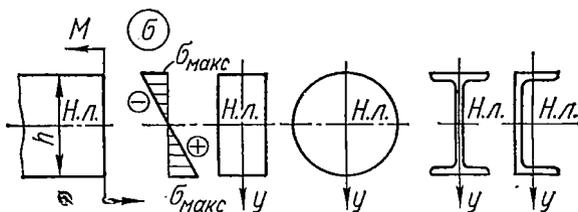


Рис. 238.

нулю. Величина  $\sigma$  линейно возрастает по мере удаления от нейтральной линии. При этом напряжения оказываются постоянными по ширине сечения (вдоль линии  $y = \text{const}$ ). Следовательно, эпюра  $\sigma$  для любых сечений, имеющих горизонтальную ось симметрии, всегда будет иметь вид, представленный на рис. 238. Все волокна, расположенные выше нейтральной линии, окажутся сжатыми, а ниже ее — растянутыми. Если же изгибающий момент будет иметь противоположный знак, то верхние волокна будут растягиваться, а нижние — сжиматься.

Наибольшей величины ( $\sigma_{\text{макс}}$ ) напряжения достигают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной линии, т. е. в случае симметрии сечения относительно горизонтальной оси  $z$  при  $y = \pm \frac{h}{2}$ . Подстав-

для это значение в формулу (10.10), для абсолютной величины напряжения получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \frac{h}{2}}{J}.$$

Обозначим отношение  $\frac{J}{\frac{h}{2}}$  через  $W$  и назовем его *осевым моментом сопротивления* (см<sup>3</sup>). Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}. \quad (10.13)$$

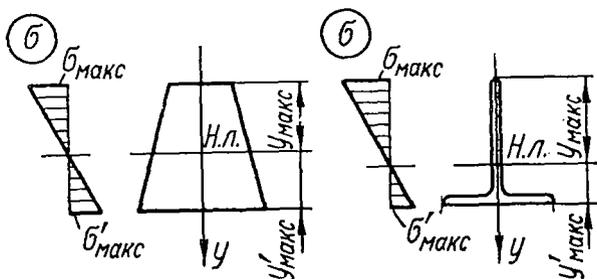


Рис. 239.

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии, то нейтральная линия смещена по отношению к середине высоты сечения (рис. 239) и напряжения  $\sigma_{\max}$  в крайних верхних и  $\sigma'_{\max}$  в крайних нижних волокнах не будут одинаковыми:

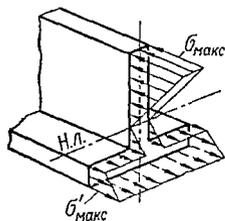


Рис. 240.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}; \quad \sigma'_{\max} = \frac{M}{W'}, \quad (10.14)$$

где

$$W = \frac{J}{y_{\max}}; \quad W' = \frac{J}{y'_{\max}}. \quad (10.15)$$

Характер распределения нормальных напряжений в поперечном сечении наглядно представлен на рис. 240.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы о рациональной форме сечения при чистом изгибе. В отличие от простого растяжения — сжатия при изгибе, как и при кручении, напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен очень мало. Поэтому в целях экономии его и снижения веса конструкции для деталей, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы большая часть материала была удалена от нейтральной линии. Идеальным в этой

точки зрения является сечение, состоящее из двух узких прямоугольников (рис. 241, а). Реально такое сечение невыполнимо, так как эти два прямоугольника должны быть связаны между собой, чтобы представлять одно сечение. Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному двутавровое сечение (рис. 241, б).

Изгибающий момент, который сечение способно выдержать без-опасно, пропорционален  $W$ . Величина наибольшего действующего в сечении напряжения  $\sigma_{\max}$  должна быть ограничена значением  $[\sigma]$ , и тогда из формулы (10.13) допускаемый момент

$$[M] = \sigma_{\max} W = [\sigma] W. \quad (10.16)$$

Расход же материала пропорционален площади сечения  $F$ . Следовательно, чем больше отношение  $\frac{W}{F}$ , тем больший изгибающий момент

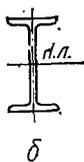
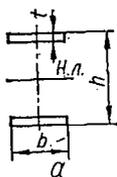


Рис. 241.

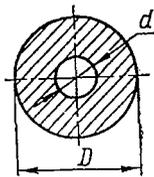


Рис. 242.

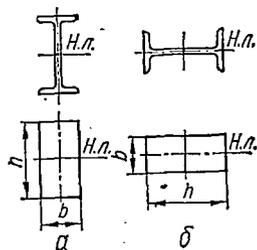


Рис. 243.

выдерживает сечение с заданной площадью (т. е. с заданным весом стержня) и тем меньше материала уйдет на изготовление стержня, выдерживающего заданный изгибающий момент. Поэтому отношение  $\frac{W}{F}$  может быть принято за критерий, оценивающий качество профиля.

Основываясь на этом критерии (или просто обратив внимание на то, какая часть материала расположена вблизи нейтральной линии), легко убедиться, что сечение, показанное на рис. 242, рациональнее сплошного круглого, а расположения двутавра и прямоугольника, показанные на рис. 243, а, при вертикальной силовой плоскости выгоднее, чем показанные на рис. 243, б.

Все формулы настоящего параграфа получены для случая чистого изгиба прямого стержня. Действие же поперечной силы приводит к тому, что гипотезы, положенные в основу выводов, теряют свою силу, так как поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются; продольные волокна взаимодействуют друг с другом, давят друг на друга и находятся, следовательно, не в линейном, а в плоском напряженном состоянии. Однако практика расчетов показывает, что и при поперечном изгибе балок и рам, когда в сечениях, кроме  $M$ , действует еще  $N$  и  $Q$ , можно пользоваться формулами, выведенными для чистого изгиба. Погрешность при этом получается весьма незначительной.

## § 61. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе, когда в сечениях бруса действует  $Q$  и  $M$ , возникают не только нормальные напряжения  $\sigma$ , но и касательные напряжения  $\tau$ .

Получим формулу для определения  $\tau$  в простейшем случае поперечного изгиба балки. Как уже указывалось (§ 26), задача об определении напряжений всегда статически неопределима и требует рассмотрения трех сторон задачи. Однако можно принять такие гипотезы о распределении напряжений, при которых задача станет статически определенной. Тогда необходимость в привлечении геометрических и фи-

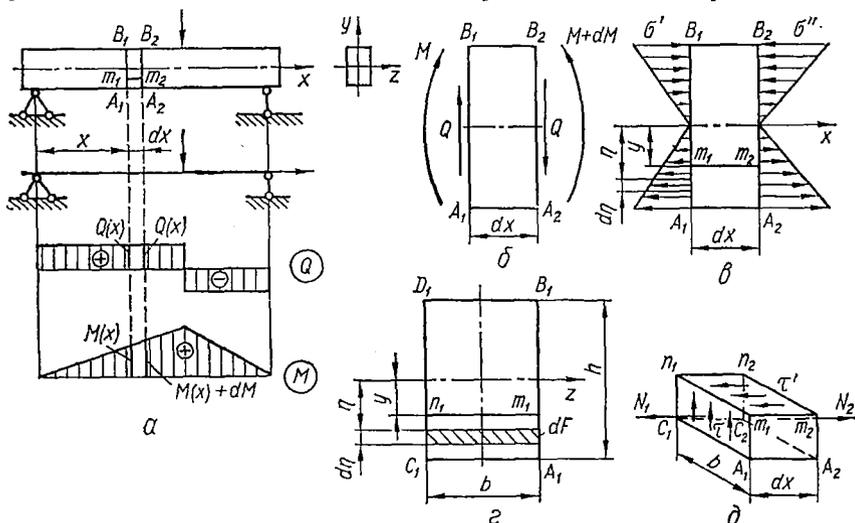


Рис. 244.

зических уравнений отпадет и достаточно рассмотреть одну только статическую сторону задачи. Так именно и будет обстоять дело с выводом формулы для  $\tau$  при изгибе.

Проведем вывод на примере балки прямоугольного поперечного сечения. На рис. 244, а показана балка, ее схема и эпюры  $Q$  и  $M$ .

Двумя близкими поперечными сечениями  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  выделим элемент балки (рис. 244, б) длиной  $dx$ . Как видно по эпюрам, в обоих сечениях  $Q$  и  $M$  положительны, причем в сечении  $A_1B_1$

$$Q = Q(x); \quad M = M(x),$$

а в сечении  $A_2B_2$

$$Q = Q(x); \quad M = M(x) + dM.$$

Таким образом, в проведенных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения на левом и правом торцах выделенного элемента на основании зависимости (10.10) определяются формулами

$$\sigma' = \frac{M}{J_z} y; \quad \sigma'' = \frac{M + dM}{J_z} y. \quad (10.17)$$

Введем два предположения о характере распределения касательных напряжений в балках прямоугольного сечения:

- 1)  $\tau$  всюду параллельны  $Q$ ;
- 2) во всех точках сечения на данном уровне ( $y = \text{const}$ )  $\tau$  одинаковы (т. е.  $\tau$  постоянны по ширине и зависят только от расстояния точки до нейтральной линии).

Эти предположения справедливы, если  $b \ll h$ .

Отсечем часть элемента балки, проведя горизонтальную плоскость  $m_1 - m_2$  на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя. Выделенный таким образом элемент показан на рис. 244, *д*.

Очевидно, в гранях  $A_1 A_2 m_2 m_1$ ,  $C_1 C_2 n_2 n_1$  и  $A_1 A_2 C_2 C_1$  вообще нет никаких напряжений, так как эти грани являются частью наружной поверхности балки. Вычислим равнодействующую нормальных напряжений, распределенных по грани  $A_1 C_1 n_1 m_1$ . На элементарную площадку  $dF = b d\eta$ , проведенную параллельно нейтральной оси  $z$  на расстоянии  $\eta$  от нее (рис. 244, *з*), действует элементарная осевая сила  $dN_1 = \sigma' dF = \frac{M(x)\eta}{J_z}$ . Тогда искомая равнодействующая

$$N_1 = \int_{F_1} \sigma' dF = \int_{F_1} \frac{M(x)\eta}{J_z} dF = \frac{M(x)}{J_z} \int_{F_1} \eta dF.$$

Так как  $\int_{F_1} \eta dF = S_z(y)$  представляет собой статический момент площади, заключенной между уровнем  $y$  и краем балки, то

$$N_1 = \frac{M(x)}{J_z} S_z(y). \quad (10.18)$$

Аналогично в грани  $A_2 C_2 n_2 m_2$  равнодействующая нормальных напряжений  $\sigma''$

$$N_2 = \frac{M(x) + dM}{J_z} S_z(y). \quad (10.19)$$

Величина же  $S_z(y)$  будет, очевидно, такой же, как и для первого сечения.

В грани  $n_1 n_2 m_2 m_1$  действуют нормальные напряжения, поскольку при поперечном изгибе волокна давят друг на друга. Однако этими нормальными напряжениями пренебрегают, как несущественными для расчета на прочность. Кроме того, согласно закону парности касательных напряжений здесь непременно возникнут и напряжения

$$\tau' = \tau,$$

причем они будут направлены так, как показано на рис. 244, *д*.

Так как длина грани  $n_1 n_2 m_2 m_1$  мала (она равна  $dx$ ), можно считать, что  $\tau'$  равномерно распределены по этой грани и, следовательно, дают усилие

$$dT = \tau' b dx = \tau b dx.$$

Запишем теперь условие равновесия параллелепипеда  $A_1A_2C_2C_1n_1n_2m_2m_1$ :

$$\sum X = N_2 - N_1 - dT = 0.$$

Внося сюда найденные величины усилий, получаем:

$$\frac{[M(x) + dM] S_z(y)}{J_z} - \frac{M(x) S_z(y)}{J_z} - \tau b dx = 0,$$

или

$$\tau b dx = \frac{dMS_z(y)}{J_z}.$$

Разделив это равенство на  $b dx$  и учитывая, что  $\frac{dM}{dx} = Q$ , находим окончательно:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{bJ_z}. \quad (10.20)$$

Выведенная формула впервые была получена Д. И. Журавским и носит его имя. Несмотря на то, что положенные в основу ее вывода гипотезы справедливы только для узких прямоугольных сечений (при  $\frac{h}{b} > 2$ ), на практике ею можно пользоваться для любых сечений, кроме тех мест в сечении, где имеются узкие прямоугольники, расположенные перпендикулярно к  $Q$  — полки двутавра, швеллера и т. д.

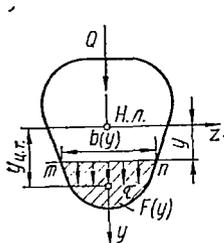


Рис. 245.

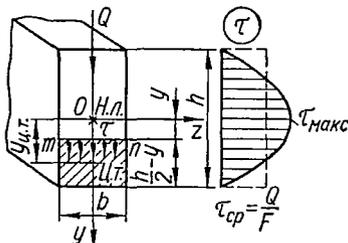


Рис. 246.

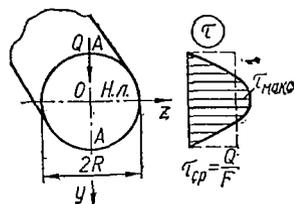


Рис. 247.

Для произвольного сечения (рис. 245) величины, входящие в формулу (10.20), имеют следующие значения:  $Q = Q(x)$  — абсолютная величина поперечной силы в том сечении, где вычисляются касательные напряжения;  $J_z$  — момент инерции этого сечения относительно его нейтральной линии;  $b = b(y)$  — ширина сечения по той линии, где определяют  $\tau$ ;  $S_z(y)$  — абсолютная величина статического момента относительно нейтральной линии той части площади  $F(y)$ , которая отсекается линией, где определяются  $\tau$ , от сечения.

Формула (10.20) дает, таким образом, только величину  $\tau$ . Что касается направления  $\tau$ , то в соответствии с исходными допущениями оно считается параллельным  $Q$ .

Построим эпюру  $\tau$  для прямоугольного сечения (рис. 246). Проведем линию  $mn$ , параллельную нейтральной линии и удаленную от нее на произвольное расстояние  $y$ , и найдем величины  $\tau$  в точках этой

линии. Линия  $mn$  отсекает площадь  $F(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$ . Статический момент этой площади

$$S_z(y) = F(y) \cdot y_{ц.т} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Подставляя в формулу Журавского (10.20) найденное значение  $S_z(y)$ , а также  $J_z = \frac{bh^3}{12}$ , получаем:

$$\tau = Q \frac{\frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (10.21)$$

Переменная  $y$  входит во второй степени, следовательно, эпюра  $\tau$  будет параболической. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках  $y = \pm \frac{h}{2}$  и  $\tau = 0$ . Для точек нейтральной линии  $y = 0$  и

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}. \quad (10.22)$$

По этим данным и построена эпюра  $\tau$  на рис. 246. Формулу (10.22) можно записать также в виде

$$\tau_{\max} = k \frac{Q}{F}, \quad (10.23)$$

где  $k = 1,5$ .

Подобным образом для круглого сечения (рис. 247) получим:

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \quad (10.24)$$

Как видно, эпюра  $\tau$  вновь получается параболической. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках  $A$  ( $y = \pm R$ )  $\tau = 0$ . Наибольшее касательное напряжение будет в точках нейтральной линии ( $y = 0$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} = 1,33 \cdot \frac{Q}{F}. \quad (10.25)$$

*Пример 38.* Построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения двутавровой балки № 12, если в сечении действует изгибающий момент  $M = 200 \text{ кг} \cdot \text{м}$  и поперечная сила  $Q = 1 \text{ Т}$ .

По таблице сортамента (приложение 1) находим основные размеры профиля (рис. 248), момент инерции площади поперечного сечения  $J_z = 350 \text{ см}^4$  и статический момент площади половины этого сечения  $S_{\max} = 33,7 \text{ см}^3$ .

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения, находящихся на расстоянии  $y$  от нейтральной линии (по линии  $mn$ ), определяем по формуле (10.10):

$$\sigma = \frac{My}{J_z}.$$



Для точек нейтральной линии ширина сечения  $d = 0,48$  см, а статический момент следует взять для половины сечения. Очевидно, это будет наибольшая величина для данного сечения —  $S_{z_{\max}}$ . Тогда

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{QS_{z_{\max}}}{dJ} = \frac{1000 \cdot 33,7}{0,48 \cdot 350} = 200,6 \text{ кг/см}^2.$$

На основании этих данных строим эпюру  $\tau$  для нижней половины сечения. Для верхней половины в силу симметрии профиля относительно оси  $z$  эпюра будет симметричной. Эпюра  $\tau$  приведена на рис. 248 справа от профиля.

Построенная эпюра условна, так как дает верные значения  $\tau$  только для точек стенки, достаточно удаленных от полков. Вблизи полков касательные напряжения в стенке возрастают ввиду того, что место сопряжения полки со стенкой является источником концентрации напряжений.

Формула (10.20) и рассмотренные примеры позволяют сделать некоторые общие заключения о распределении касательных напряжений в сечениях при поперечном изгибе:

- 1) вид эпюры  $\tau$  зависит от формы поперечного сечения балки;
- 2) в крайних наиболее удаленных от нейтральной линии точках  $\tau$  всегда равно нулю;
- 3) наибольшей величины касательные напряжения для большинства видов сечений достигают на нейтральной линии сечения, причем

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ}, \quad (10.26)$$

где  $S_{\max}$  — статический момент половины сечения.

Наибольшее касательное напряжение может быть найдено также по формуле

$$\tau_{\max} = k \frac{Q}{F}. \quad (10.27)$$

Здесь  $k$  — коэффициент, зависящий от формы сечения. Для прямоугольника  $k = 1,50$ ; для круглого сечения  $k = 1,33$ ;

4) формулой Журавского можно пользоваться для вычисления касательных напряжений в любых точках массивных профилей, а также в тех элементах прокатных профилей, которые параллельны  $Q$ . Формула Журавского, выведенная для вычисления  $\tau$  в сечениях балок, очевидно, непосредственно применима и к рамам.

## § 62. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

В предыдущих параграфах этой главы были получены формулы для вычисления  $\sigma$  и  $\tau$  при плоском изгибе балок. Эти формулы дают возможность составить условия прочности, необходимые для проверки и подбора сечений деталей, работающих на изгиб. Чтобы получить эти условия, выясним, в каком напряженном состоянии находятся элементы стержня, испытывающего плоский изгиб. Для конкретности рассмотрим балку, изображенную на рис. 249.

На рис. 249, а показана схема балки и нагрузка, а также построены эпюры  $Q$  и  $M$ . На рис. 249, б изображен фасад балки. У ряда точек

ее поперечного сечения выделены элементарные кубики, одна из граней которых совпадает с плоскостью поперечного сечения. На рис. 249, *в* для примера показано сечение *A—A* и выделенные в нем элементы *3* и *13*.

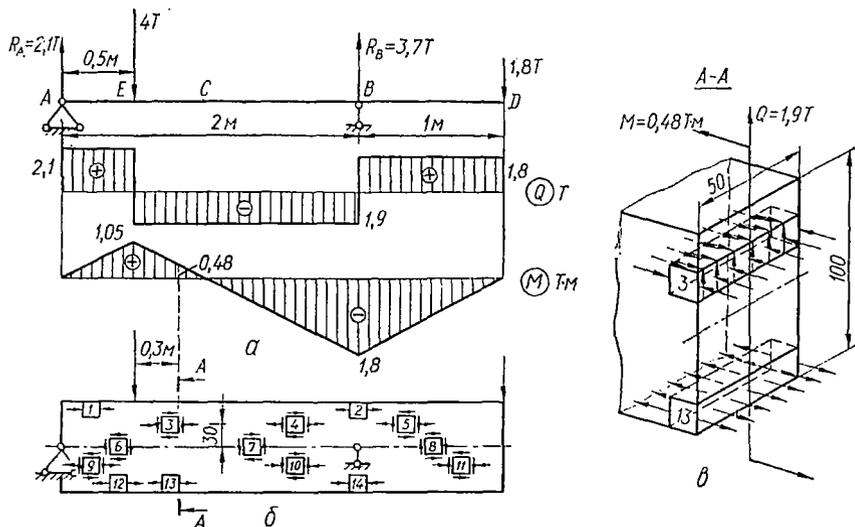


Рис. 249.

Элементы *1, 2, 12, 13* и *14* выделены у крайних точек сечений. Здесь  $\tau = 0$ ,  $\sigma = \sigma_{\max}$  и элементы испытывают простое растяжение или сжатие, т. е. находятся в линейном напряженном состоянии (рис. 250, *а*).

Элементы *6, 7* и *8* выделены у точек нейтрального слоя, где  $\sigma = 0$ , а  $\tau = \tau_{\max}$ , поэтому в их гранях действуют только касательные напряжения и, следовательно, они испытывают чистый сдвиг (рис. 250, *б*).

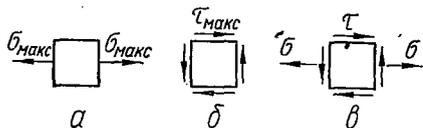


Рис. 250.

В вертикальных гранях элементов *3, 4, 5, 9, 10* и *11*, выделенных у произвольных точек балки, будут действовать и  $\sigma$  и  $\tau$ , поэтому они

будут находиться в плоском напряженном состоянии (рис. 250, *в*).

Величины и направления  $\sigma$  и  $\tau$  зависят от величины и направления  $M$  и  $Q$  в рассматриваемом сечении и от положения элемента по высоте сечения. Направления напряжений определяются непосредственно на основании эпюр  $Q$  и  $M$ . При этом нужно помнить, что эпюры  $M$  строят на сжатых волокнах. Поэтому элементы *1, 3, 10, 14* и *11* испытывают сжатие, а элементы *9, 12, 13, 4, 2* и *5* — растяжение.

Чтобы выявить направление  $\tau$ , обращаем внимание на знаки  $Q$  в соответствующих сечениях. Например, в сечении *A—A*  $Q$  отрицательно, а следовательно, стремясь повернуть обе части рассеченной

балки против часовой стрелки,  $Q$  действует на левую сторону сечения вверх (рис. 249, в). Так именно и будут направлены  $\tau$  в правой грани элемента 3; в остальных гранях направления  $\tau$  определяются законом парности касательных напряжений.

Величины напряжений могут быть найдены по формулам, полученным в предыдущих параграфах:

а) для элементов 1, 2, 12, 13 и 14

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W};$$

б) для элементов 6, 7 и 8

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{QS_z_{\text{макс}}}{Jb} = k \frac{Q}{F};$$

в) для элементов 3, 4, 5, 9, 10 и 11

$$\sigma = \frac{My}{J}; \quad \tau = \frac{QS_z(y)}{Jb}.$$

Если балка имеет, например, прямоугольное сечение с размерами, показанными на рис. 249, в, то

$$b = 5 \text{ см}; \quad h = 10 \text{ см}; \quad F = 50 \text{ см}^2; \quad k = 1,5;$$

$$W = \frac{5 \cdot 10^3}{6} = 83,3 \text{ см}^3; \quad J = \frac{5 \cdot 10^3}{12} = 417 \text{ см}^4.$$

Тогда для элементов 2 и 14 ( $|M| = 1,8 \text{ Т} \cdot \text{м} = 180\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ )

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{180\,000}{83,3} = 2160 \text{ кг/см}^2;$$

для элемента 7 ( $|Q| = 1,9 \text{ Т} = 1900 \text{ кг}$ )

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{1,5 \cdot 1900}{50} = 57 \text{ кг/см}^2;$$

для элемента 3 ( $M = 48\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ ;  $|Q| = 1900 \text{ кг}$ )

$$y = 3 \text{ см}; \quad S = (5 - 3) \cdot 5 \cdot \left(3 + \frac{5 - 3}{2}\right) = 40 \text{ см}^3;$$

$$\sigma = \frac{48\,000 \cdot 3}{417} = 345 \text{ кг/см}^2; \quad \tau = \frac{1900 \cdot 40}{5 \cdot 417} = 37 \text{ кг/см}^2$$

и т. д.

Таким образом, при поперечном изгибе балки материал её находится в неоднородном плоском напряженном состоянии. Условие прочности должно быть записано для так называемой опасной точки балки, т. е. той точки, где материал находится в наиболее напряженном состоянии. Опасной будет одна из следующих трех точек:

- точка, где нормальное напряжение достигает наибольшей величины;
- точка, где касательное напряжение достигает наибольшей величины;
- точка, где  $\sigma$  и  $\tau$ , хотя и не принимают наибольших значений, но

в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т. е. наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности. При этом таких точек может оказаться несколько.

Первая точка будет расположена в крайних волокнах того сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение (например, точки 2 и 14 на рис. 249). Напряженное состояние в такой точке линейное (рис. 250, а) и условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (10.28)$$

Вторая точка будет находиться на нейтральной линии того сечения, где поперечная сила имеет наибольшее значение (на рис. 249 это точка б и вообще любая точка на участке нейтрального слоя, где  $Q = Q_{\max}$ ). В такой точке наблюдается чистый сдвиг (рис. 250, б) и поэтому условие прочности примет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} = k \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (10.29)$$

Что касается третьей точки, то положение ее не столь определено. Но где бы она ни была выбрана, в ней будет плоское напряженное состояние (рис. 250, в), при котором главные напряжения рассчитывают по формулам

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \\ \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \end{cases} \quad (10.30)$$

Внося эти величины в выражения для эквивалентных напряжений по различным теориям прочности [(7.31)—(7.35), (7.21)], получаем условия прочности:

$$\sigma_{\text{эKB I}} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]; \quad (10.31)$$

$$\sigma_{\text{эKB II}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.32)$$

$$\sigma_{\text{эKB III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.33)$$

$$\sigma_{\text{эKB IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.34)$$

$$\sigma_{\text{эKB M}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (10.35)$$

где

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям [формулы (10.33) и (10.34)].

Практика применения и расчета балок показала, что в подавляющем большинстве реальных случаев опасной является крайняя точка того сечения, где  $M = M_{\text{макс}}$ . Поэтому практически проверочный расчет балок на прочность состоит в следующем:

- 1) находят *опасное сечение*, т. е. сечение, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент  $M_{\text{макс}}$ ;
- 2) по таблице или вычислением определяют момент сопротивления  $W$  сечения относительно нейтральной линии сечения;
- 3) применяют только одно условие прочности (10.28), которое и называется поэтому *основным*.

По этой схеме для большинства профилей (круглого, прямоугольного, двутаврового и других сечений) легко выполним и проектировочный расчет; при этом условие прочности (10.28) записывается в виде

$$\boxed{W = \frac{M_{\text{макс}}}{\sigma}} \quad (10.36)$$

Определив необходимый момент сопротивления балки и приняв определенный профиль поперечного сечения, подбирают его размеры.

Рассмотрим некоторые примеры расчета балок по основному условию прочности.

*Пример 39.* Для балки (рис. 251), считая заданными размеры  $l$ ,  $D$  и  $d$  и величину допускаемого напряжения  $[\sigma]$ , найти допускаемую нагрузку  $[P]$ .

Опасное сечение будет, очевидно, в заделке, причем  $M_{\text{макс}} = Pl$ .

Момент сопротивления в данном случае

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Опасными точками в балке будут верхняя и нижняя точки сечения у заделки. Записывая для них условие прочности, получаем:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{32Pl}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma].$$

Отсюда находим допускаемую нагрузку:

$$P \leq [P] = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4) [\sigma]}{32l}.$$

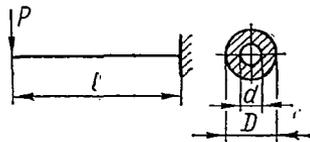


Рис. 251.

*Пример 40.* На балку (рис. 252) действует нагрузка  $10 T$ , равномерно распределенная по пролету. Материал балки Ст. 3 ( $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ ). Требуется подобрать различные варианты сечений. На чертежах горизонтальными осевыми линиями показаны нейтральные линии.

Опасным будет сечение посредине пролета, где

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{8} = \frac{ql \cdot l}{8} = \frac{Pl}{8} = \frac{10000 \cdot 160}{8} = 200000 \text{ кг}\cdot\text{см}.$$

Опасными точками будут точки этого сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии. Условие прочности для них следующее:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{200\,000}{W} \leq [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда находим необходимую величину момента сопротивления:

$$W_{\text{расч}} = \frac{200\,000}{1600} = 125 \text{ см}^3.$$

Найденные размеры сечения обычно округляют до ближайших стандартных, поэтому фактический момент сопротивления  $W$  может отличаться от  $W_{\text{расч}}$ . В

результате напряжение в опасной точке будет отличаться от  $[\sigma]$  и, следовательно, будет иметь место перенапряжение ( $\delta_\sigma > 0$ ) или недонапряжение ( $\delta_\sigma < 0$ ), где

$$\delta_\sigma = \frac{\sigma_{\text{макс}} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{M_{\text{макс}}}{W} - \frac{M_{\text{макс}}}{W_{\text{расч}}}}{\frac{M_{\text{макс}}}{W_{\text{расч}}}} = \frac{W_{\text{расч}} - W}{W} \cdot 100\%.$$

При расчетах на прочность отклонение расчетных напряжений от допускаемых должно быть в пределах  $\pm 5\%$  величин допускаемых напряжений.

Чтобы сравнить веса балок различных вариантов сечений, учитывая, что веса пропорциональны площади  $F$  сечения, вычислим также и величину  $F$ . Для

большой наглядности полученные расчетом размеры поперечных сечений будем округлять до ближайших больших целых чисел, а для стандартных профилей брать ближайший профиль с большим моментом сопротивления.

Перейдем к вычислениям:

1. Для сечения, показанного на рис. 252, а,

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq 125 \text{ см}^3; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{\pi}} = 10,83 \text{ см}.$$

Принимаем  $d = 11 \text{ см} = 110 \text{ мм}$ ; тогда

$$W = \frac{\pi \cdot 11^3}{32} = 130,5 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 130,5}{130,5} \cdot 100\% = -4,2\%;$$

$$F = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} = 95,0 \text{ см}^2.$$

2. Для сечения, показанного на рис. 252, б,

$$W = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 \geq 125 \text{ см}^3; \quad b \geq \sqrt[3]{187,5} = 5,72 \text{ см}.$$

Принимаем  $b = 6 \text{ см} = 60 \text{ мм}$ ; тогда

$$W = \frac{2}{3} \cdot 6^3 = 144 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 144}{144} \cdot 100\% = -13,2\%; \quad F = 6 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2.$$

3. Для сечения, показанного на рис. 252, а,

$$W = \frac{2b \cdot b^3}{6} = \frac{1}{3} b^3 \geq 125 \text{ см}^3; \quad b \geq \sqrt[3]{375} = 7,21 \text{ см.}$$

Принимаем  $b = 7,5 \text{ см} = 75 \text{ мм}$ ; тогда

$$W = \frac{1}{3} \cdot 7,5^3 = 140,5 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 140,5}{140,5} \cdot 100\% = -11\%; \\ F = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ см}^2.$$

4. Рассмотрим сечение в виде двутавра (рис. 252, з). Принимаем двутавр № 18, тогда

$$W = W_2 = 143 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 143}{143} \cdot 100\% = -12,6\%; \quad F = 23,4 \text{ см}^2.$$

5. Для сечения, показанного на рис. 252, д, приемлемыми оказываются профили № 50 и № 55, первый из которых дает незначительное перенапряжение (2,5%), а второй имеет заметный избыток прочности (16,7%). Останавливаемся на двутавре № 55. Для него

$$W = W_2 = 150 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 150}{150} \cdot 100\% = -16,7\%; \quad F = 114 \text{ см}^2.$$

6. Для сечения в виде двух двутавров (рис. 252, е) подходящим профилем в сортаменте будет двутавр № 14. У этого сечения

$$W = 2W_2 = 2 \cdot 81,7 = 163,4 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 163,4}{163,4} \cdot 100\% = -23,5\%; \\ F = 2 \cdot 17,4 = 34,8 \text{ см}^2.$$

7. Для сечения, показанного на рис. 252, ж, нейтральная линия (она расположена на стыке двух профилей) не совпадает с нейтральной линией каждого профиля. Поэтому момент сопротивления всего сечения не равен сумме моментов сопротивления  $W_2$  каждого профиля, а должен быть вычислен делением момента инерции сечения на расстояние от нейтральной линии до крайних волокон (т. е. на высоту одного профиля):

$$W = \frac{2 \left[ J_2 + \left( \frac{h_1}{2} \right)^2 F_1 \right]}{h_1},$$

где  $h_1$ ,  $F_1$ ,  $J_2$  и  $W_2$  — соответственно высота, площадь, момент инерции и момент сопротивления одного двутавра.

Возьмем двутавр № 12. Для него

$$W = 58,4 + \frac{12}{2} \cdot 14,7 = 146,6 \text{ см}^3.$$

Легко убедиться, что меньший профиль не подходит.

Таким образом, имеем:

$$\delta_{\sigma} = \frac{125 - 146,6}{146,6} \cdot 100\% = -14,7\%; \quad F = 2 \cdot 14,7 = 29,4 \text{ см}^2.$$

8. Для сечения в виде двух уголков (рис. 252, з) момент сопротивления равен сумме моментов сопротивления каждого профиля. Но в таблицах сортамента для уголков значения  $W$  нет. Поэтому определяем момент сопротивления сечения как

$$W = 2 \frac{J_2}{b - z_0},$$

где  $J_2$ ,  $b$ ,  $z_0$  имеют тот же смысл, что и в таблице сортамента (опасными точками будут нижние концы уголков).

Указать непосредственно, какой именно профиль нужно взять, трудно, поэтому рассмотрим два варианта сечений:  
для уголка  $140 \times 140 \times 12$

$$W = 2 \frac{602}{14 - 3,9} = 119,3 \text{ см}^3;$$

для уголка  $160 \times 160 \times 10$

$$W = 2 \frac{774}{16 - 4,3} = 132 \text{ см}^3.$$

Последний вариант с точки зрения прочности лучший. Получаем:

$$W = 132 \text{ см}^3; F = 2 \cdot 24,7 = 49,4 \text{ см}^2; \delta_\sigma = \frac{125 - 132}{132} \cdot 100\% = -5,3\%.$$

Таким образом, определены размеры всех сечений и задача решена. Различные формы сечений дали разные избытки прочности и площади сечений, а следовательно, и вес балок.

Таблица 16

Сечение на рис. 252	Избыток прочности, %	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Относительный вес
<i>a</i>	4,2	95,0	4,06
<i>б</i>	13,2	72,0	3,08
<i>в</i>	11,0	112,5	4,81
<i>г</i>	12,6	23,4	1,00
<i>д</i>	16,7	114,0	4,87
<i>e</i>	23,5	34,8	1,49
<i>ж</i>	14,7	29,4	1,26
<i>з</i>	5,3	49,4	2,11

Приведем сводную таблицу результатов (табл. 16), которая позволяет судить о том, какие из полученных сечений рациональны для данной балки, а какие нет. Числа последнего столбца показывают, во сколько раз балка с данным сечением тяжелее двутавровой балки (рис. 252, *г*), вес которой получился наименьшим и поэтому принят за единицу.

Заканчивая исследование напряжений в балке при изгибе, сделаем еще некоторые замечания и дополнения.

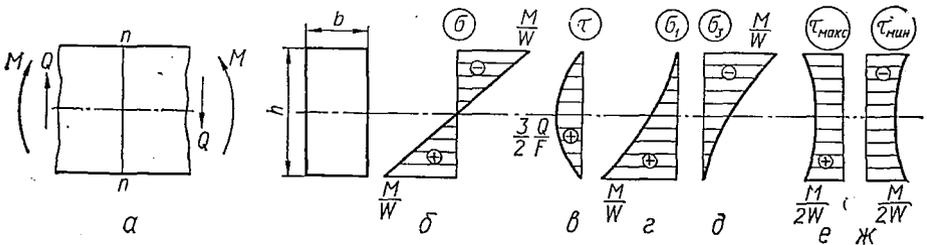


Рис. 253.

При изгибе балки (рис. 253, *a*) в точках определенного поперечного сечения  $n-n$ , взятых на различных расстояниях от нейтральной оси, мы находили нормальные напряжения  $\sigma$  и касательные  $\tau$ . Для

балки прямоугольного поперечного сечения эпюры напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  приведены соответственно на рис. 253, б и в. Кроме того, в каждой из этих точек по напряжениям  $\sigma$  и  $\tau$  вычислялись главные напряжения: растягивающие  $\sigma_1$  и сжимающие  $\sigma_3$ . Эти напряжения действуют на площадках, наклон которых к плоскости поперечного сечения изменяется от точки к точке. Изменение величины главных напряжений по высоте балки может быть представлено в виде эпюр  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Для той же балки эти эпюры приведены на рис. 253, г, д.

В каждой точке по высоте балки по напряжениям  $\sigma$  и  $\tau$  (или  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ) могут быть вычислены также максимальные и минимальные касательные напряжения, которые действуют в сечениях, наклоненных

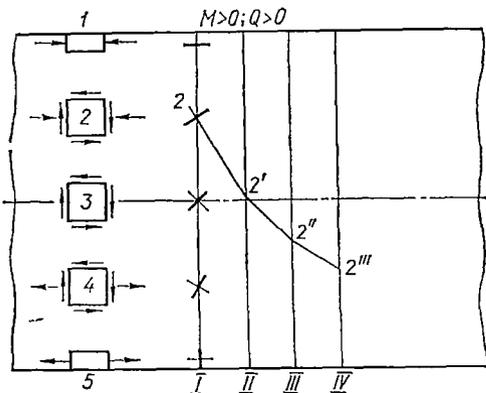


Рис. 254.

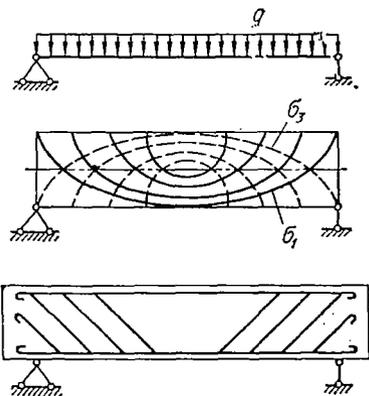


Рис. 255.

под углом  $45^\circ$  к сечениям с главными напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в этой точке. Эти касательные напряжения вычисляются по формуле

$$\tau_{\text{макс}}^{\text{мин}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

или, учитывая зависимости (10.30), по формуле:

$$\tau_{\text{макс}}^{\text{мин}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Эпюры значений максимальных и минимальных касательных напряжений для рассматриваемой балки приведены на рис. 253, е, ж.

Отметим, что в точках, взятых на нейтральной линии, абсолютные значения  $\tau$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{\text{макс}}$ ,  $\tau_{\text{мин}}$  одинаковы. При одном и том же масштабе для всех напряжений ординаты эпюр этих напряжений по середине высоты балки также одинаковые.

Проверяя прочность балки, определяют величины главных напряжений. В ряде случаев важно знать также и направления главных напряжений во всех точках балки. В частности, это необходимо при конструировании железобетонных балок, в которых арматуру нужно располагать в направлении наибольших растягивающих напряжений.

Рассмотрим направления главных напряжений в различных точках какого-либо сечения I (рис. 254). Тонкими линиями показаны

направления  $\sigma_1$ , а толстыми —  $\sigma_3$ . Продолжим направление  $\sigma_1$  для точки 2 до пересечения со смежным сечением в точке 2'. В этой точке определим вновь направление рассматриваемого главного напряжения и, далее поступая аналогичным образом, получим ломаную линию 2 — 2' — 2'' — 2'''. В пределе эта ломаная линия обратится в кривую, касательная к которой совпадает с направлением рассматриваемого главного напряжения в точке касания. Эта кривая называется *траекторией главного напряжения*. Направление траекторий главных напряжений зависит от вида нагрузки и условий закрепления балки. Очевидно, через каждую точку балки проходят две траектории главных напряжений (соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ), пересекающиеся между собой под прямым углом.

В железобетонных балках арматуру обычно стремятся располагать примерно в направлении траекторий главных растягивающих напряжений (рис. 255).

### § 63. О РАЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЕЧЕНИЯ

В § 60 настоящей главы были сделаны некоторые замечания о рациональной форме сечения при чистом изгибе. Здесь на основе рассмотренных примеров расчета на изгиб эти замечания будут несколько расширены. При этом мы отвлекаемся от каких-либо конструктивных или технологических соображений, связанных с формой сечения той или иной конкретной детали, и считаем сечение рациональным, если оно обеспечивает прочность данной балки при минимальном весе ее, т. е. при минимальной площади сечения.

В ряде случаев, кроме формы сечения, большое значение имеет и расположение его — ориентировка относительно силовой плоскости.

Как видно из табл. 16, наиболее рациональным является двутавровое сечение, поставленное так, чтобы нейтральная линия его совпадала с осью, относительно которой  $J_z = J_{\text{макс}}$ . Хуже будет сечение, составленное из двух двутавров, поставленных рядом или один на другой. Значительно хуже сечения из двух равнобоких уголков и прямоугольное сечение. Нерациональным является круглое сечение, так как вес балки такого сечения почти в 4 раза превышает вес двутавровой балки, имеющей ту же прочность. Поэтому выбор круглого сечения может быть оправдан только конструктивными или технологическими соображениями (например, для вращающихся деталей), причем в таком случае выгоднее ставить полое сечение. Совершенно нерационально сечение, ориентированное так, что нейтральная линия совпадает с осью  $J_{\text{мин}}$  (варианты *в* и *д* на рис. 252 и в табл. 16).

Заметим также, что если в условии прочности

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$$

максимальное напряжение близко к допускаемому, то это не означает еще, что сечение подобрано удачно, так как при другой форме сечения и значительно меньшем  $\sigma_{\text{макс}}$  балка может оказаться намного легче.

Изложенные выводы получены из рассмотрения данных примера 40. Эти выводы справедливы для любой балки, работающей на плоский изгиб и изготовленной из пластичного материала, поскольку характер нагрузки и схема балки влияют только на величину расчетного изгибающего момента.

Для балок из хрупкого материала полученные рекомендации теряют силу, так как у него допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma_+]$  значительно меньше допускаемого напряжения на сжатие  $[\sigma_-]$ . В этом случае нецелесообразно применять сечения, нейтральная линия которых является осью симметрии сечения и, следовательно, максимальные напряжения в растянутой и сжатой зонах одинаковы. Рациональным будет такое сечение, у которого  $\sigma_{\max}$  в растянутой зоне значительно меньше  $\sigma_{\max}$  в сжатой зоне. Добиться этого положения можно, выбирая такую форму сечения, у которой нейтральная линия была бы сдвинута в сторону растянутой зоны. Пример такого сечения и соответствующая ему эпюра  $\sigma$  показаны на рис. 256.

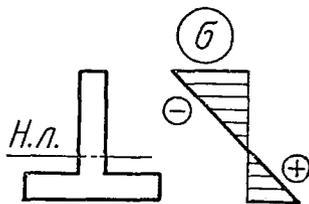


Рис. 256.

В настоящем параграфе были рассмотрены некоторые вопросы, связанные с рациональной формой сечения балки. Если же говорить о рациональности балки в целом, то следует иметь в виду, что  $M$  и  $Q$  неодинаковы в различных сечениях. Поэтому размеры, подобранные по опасному сечению, окажутся излишне большими для других сечений балки. Это обстоятельство побуждает в целях экономии веса и материала применять балки переменного сечения. Основы расчета таких балок будут рассмотрены в § 69.

## § 64. ПОЛНЫЙ РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

Все рассмотренные примеры расчета на прочность при изгибе относятся к тем случаям, когда опасной является одна из точек крайних волокон балки (рис. 249, б) и напряженное состояние в ней линейное (рис. 250, а).

Как уже отмечалось, в подавляющем большинстве практически важных случаев этого расчета достаточно. Однако, хотя и редко, но встречаются случаи, когда опасная точка принадлежит нейтральному слою. В ней материал испытывает чистый сдвиг (рис. 249, б и 250, б), и для расчета следует пользоваться условием прочности (10.29). Такое положение может быть тогда, когда при больших поперечных силах в сечениях балки действуют незначительные изгибающие моменты, например, при коротких пролетах и значительной поперечной нагрузке.

*Пример 41.* На балку (рис. 257) действует равномерно распределенная нагрузка  $q = 12 \text{ Т/м}$ . Пролет  $l = 70 \text{ см}$ , сечение балки двутавровое, материал Ст. 3 ( $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ ;  $[\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2$ ).

Подберем сечение из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

Наибольший изгибающий момент будет в среднем сечении балки:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{120 \cdot 70^2}{8} = 73\,500 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Из условия прочности находим:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{73\,500}{1600} = 46 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента подбираем двутавр № 12, у которого  $W = 58,4 \text{ см}^3$ , а  $J = 350 \text{ см}^4$ . Проверим прочность по касательным напряжениям.

Условие прочности согласно формуле (10.29) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} \leq [\tau].$$

Наибольшая поперечная сила будет в опорном сечении:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{120 \cdot 70}{2} = 4200 \text{ кг}.$$

Ширина сечения по нейтральной линии, т. е. толщина стенки двутавра,  $b = 0,48 \text{ см}$  (в сортаменте она обозначена буквой  $d$ ). Далее по таблице сортамента находим, что  $S_{\max} = 33,7 \text{ см}$ . Подставляя числовые величины в условие прочности, получим:

$$\tau_{\max} = \frac{4200 \cdot 33,7}{0,48 \cdot 350} = 842,5 \text{ кг/см}^2 < [\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, размеры сечения балки удовлетворяют условиям прочности как по нормальным, так и по касательным напряжениям.

В балках с тонкостенным сечением (двутавр, швеллер) опасной может оказаться точка, расположенная в месте соединения стенки с полкой. Это происходит в тех случаях, когда к балке приложена значительная поперечная нагрузка, причем есть сечения, в которых  $M$  и  $Q$  одновременно велики. Одно из таких сечений и будет опасным.

Таким образом, если балка имеет тонкостенное сечение и к ней приложена значительная поперечная нагрузка, то необходимо производить полный расчет на прочность (типовой расчет приведен ниже). Если расчет проектировочный, то сначала можно подобрать сечение по основному условию прочности (10.28), а затем произвести проверку по всем условиям прочности.

*Пример 42.* Требуется подобрать двутавровое сечение для балки, показанной на рис. 258, а. Материал Ст. 3 ( $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ ;  $[\tau] = 1000 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ ).

Построив эпюры  $Q$  и  $M$ , заключаем, что опасными могут оказаться такие точки балки:

- крайняя точка (рис. 258, б, точка 1) сечения С;
- точка, расположенная в месте соединения стенки с полкой (рис. 258, б, точка 2) в сечении справа от опоры А;
- точка, лежащая на нейтральной линии этого же сечения (рис. 258, б, точка 3).

Подберем поперечное сечение балки, считая опасной точку 1 в сечении С. Из условия прочности (10.28) имеем:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{960\,000}{1600} = 600 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента находим подходящий профиль № 33, у которого  $W = 597 \text{ см}^3$ .

Тогда напряжение в точке 1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{960\,000}{597} = 1608 \text{ кг/см}^2.$$

Это больше допустимого, но перенапряжение составляет всего 0,5%.

Далее находим геометрические характеристики двутавра № 33, необходимые для проверки прочности в точках 2 и 3 сечения А. Согласно таблице сортамента

$$J = 9840 \text{ см}^4; S_{\max} = 339 \text{ см}^3;$$

ширина сечения стенки, соответствующая точкам 2 и 3,  $d = 0,7 \text{ см}$ . Находим  $S_{\text{полки}} = 14 \cdot 1,22 \cdot 15,89 = 272 \text{ см}^3$ .

Проверяем прочность в точке 3 сечения балки непосредственно справа от опоры А. По условию прочности (10.29), учитывая, что  $Q_{\max} = 19,14 \text{ Т}$ , находим:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} = \frac{19\,140 \cdot 339}{0,7 \cdot 9840} = 942 \text{ кг/см}^2 < [\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Проверяем прочность в точке 2 этого же сечения. Материал Ст. 3 пластичный, поэтому пользуемся условием прочности (10,34) по четвертой теории:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

В сечении действует

$$M = 8,71 \text{ Т} \cdot \text{м} = 871\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

$$\text{и } Q = Q_{\max} = 19\,140 \text{ кг}.$$

Поэтому в точке 2

$$\sigma = \frac{My}{J} = \frac{871\,000 (16,5 - 1,22)}{9840} = 1353 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau = \frac{Q_{\max} S_{\text{полки}}}{bJ} = \frac{19\,140 \cdot 272}{0,7 \cdot 9840} = 756 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma \sqrt{1 + 3 \frac{\tau^2}{\sigma^2}} = 1353 \sqrt{1 + 3 \cdot 0,312} = 1883 \text{ кг/см}^2 > [\sigma] = 1300 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, в данной балке опасной оказывается точка 2 сечения справа от опоры А, причем перенапряжение в ней составляет около 18%, что недопустимо. Поэтому вместо профиля № 33 следует принять профиль № 36.

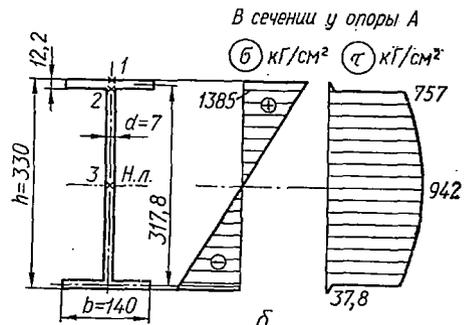
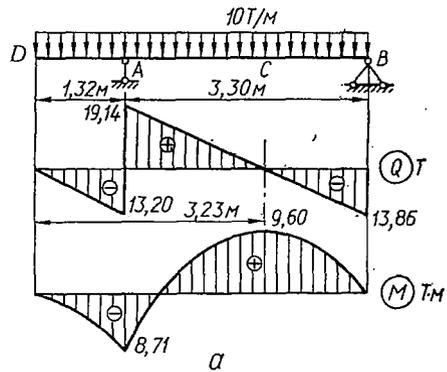


Рис. 258.

## § 65. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе, как и при растяжении или кручении, в местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений наблюдается концентрация напряжений. Если нагрузка статическая, то концентрация напряжений в деталях из пластичного материала не опасна благодаря перераспределению напряжений в зоне концентратора вследствие текучести. В случае же хрупких материалов, когда не приходится рассчитывать на ограничение максимальных напряжений, так как уровень последних будет определяться временным сопротивлением материала, прочность детали должна учитывать концентрацию напряжений.

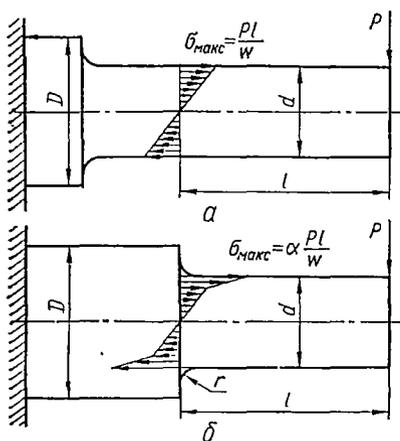


Рис. 259.

В зависимости от степени резкости нарушения призматической формы стержня или сплошности материала будет та или иная степень концентрации напряжений, т. е. местного повышения напряжений.

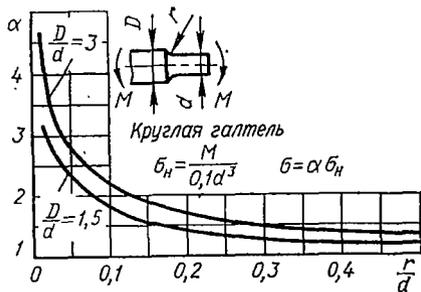


Рис. 260.

На рис. 259 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в стержне при отсутствии концентрации напряжений (рис. 259, а) и при наличии концентрации (рис. 259, б). В последнем случае вследствие резкого изменения сечения вала в крайних волокнах сечения действуют максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{\text{н}},$$

где  $\sigma_{\text{н}} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{W}$  — номинальные напряжения при отсутствии концентрации;

$\alpha$  — теоретический коэффициент концентрации, величина которого зависит от соотношения диаметров  $d$  и  $D$  сопрягаемых участков стержня, а также от радиуса закругления  $r$  в месте сопряжения этих участков.

Значения  $\alpha$  в зависимости от  $\frac{d}{D}$  и  $r$  рассчитываются методами теории упругости и приводятся в справочной литературе в виде соответствующих графиков или таблиц. В частности, для круглой галтели при отношениях  $\frac{D}{d} = 3$  и  $1,5$  на рис. 260 приведен график

зависимости теоретического коэффициента концентрации  $\alpha$  от отношения  $\frac{r}{d}$ .

Рассмотрим и другие типичные случаи концентраторов напряжений, встречающихся при изгибе.

Двусторонняя внешняя выточка (рис. 261). С увеличением глубины двусторонней симметричной выточки коэффициент концентрации приближается к своему предельному значению. При этом в силу так называемого закона затухания, согласно которому, чем

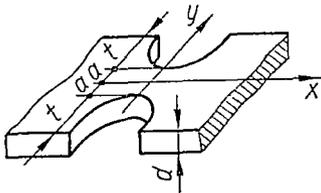


Рис. 261.

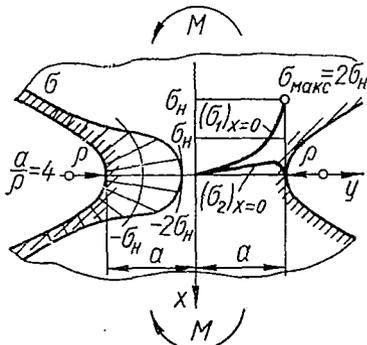


Рис. 262.

больше максимальное напряжение в месте концентрации, тем резче затухание напряжений при удалении от наиболее напряженной зоны, существенное влияние на коэффициент концентрации оказывает только кривизна у дна выточки. Форма выточки в остальной ее части мало влияет на коэффициент концентрации. Учитывая последнее и принимая, что выточка имеет форму гиперболы, формулу для определения

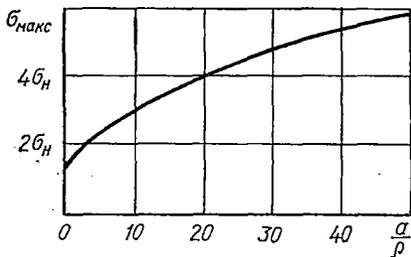


Рис. 263.

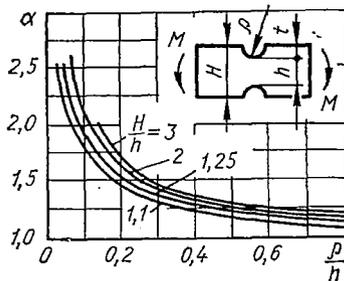


Рис. 264.

максимальных напряжений, выведенную методами теории упругости для случая чистого изгиба (рис. 262), можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \frac{4 \frac{a}{r} \sqrt{\frac{a}{r}}}{3 \left[ \sqrt{\frac{a}{r}} + \left( \frac{a}{r} - 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{r}} \right]}, \quad (10.37)$$

где  $\sigma_n = \frac{3M}{2a^2d}$  — номинальное напряжение (без учета концентрации).

На рис. 263 изображена зависимость наибольшего напряжения от  $\frac{a}{\rho}$ , а на рис. 264 — кривые теоретического коэффициента концентрации  $\alpha$  для различных соотношений  $\frac{H}{h}$  в зависимости от  $\frac{\rho}{h}$ .

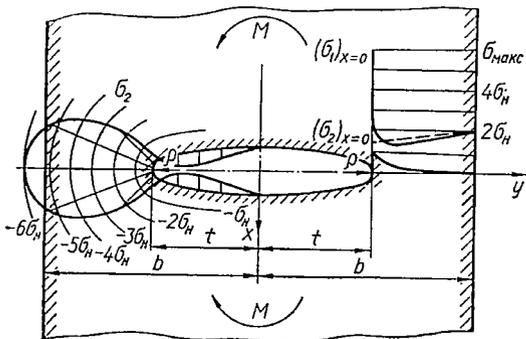


Рис. 265.

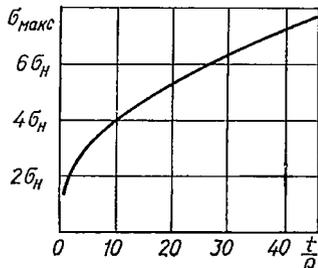


Рис. 266.

Круглые и продолговатые отверстия в очень широком стержне (рис. 265). Предполагается, что большая ось отверстия совпадает с осью стержня или перпендикулярна ей. На рис. 265 даны графики распределения напряжений для случая, когда  $\frac{t}{\rho} = 25$ . При перемещении от дна выточки вдоль контура ее, а также вдоль оси  $y$  напряжения быстро убывают. Напряжения, показанные штриховой линией, соответствуют результатам, полученным на основании элементарной теории изгиба с учетом ослабления стержня в результате высверливания отверстия. Для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, формула может быть записана в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \left( 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \right), \quad (10.38)$$

где

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2\delta b^3};$$

$\delta$  — толщина стержня.

Зависимость наибольшего напряжения от  $\frac{t}{\rho}$  представлена на рис. 266. Для круглого отверстия  $\sigma_{\max} = 2\sigma_n$ . Когда продолговатое отверстие расположено параллельно оси стержня, концентрации напряжений около отверстия нет.

Глубокая внешняя кольцевая выточка на теле вращения (рис. 267). Наибольшее напряжение при изгибе возникает у дна выточки, где материал испытывает плоское напряженное состояние. На рис. 267 показано распределение напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в точках по поперечному сечению в месте выточки, а на рис. 268 дано

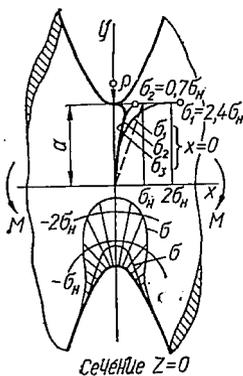


Рис. 267.

распределение напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  у дна выточки в зависимости от отношения  $\frac{a}{\rho}$  при различных коэффициентах Пуассона.

Весьма распространенным концентратором в машиностроительной практике являются различного рода поперечные отверстия в деталях круглого сечения, работающих на изгиб. Величина коэффициента концентрации в данном случае зависит от отношения диаметра поперечного отверстия  $d$  к диаметру детали  $D$ . Зависимость коэффициента концентрации  $\alpha = f\left(\frac{d}{D}\right)$  приведена на рис. 269.

Распространенными концентраторами напряжений есть также различного рода мелкие выточки на круглых деталях, приводящие к ступенчатости стержня. Величина коэффициента концентрации в данном случае зависит, главным образом, от отношения радиуса

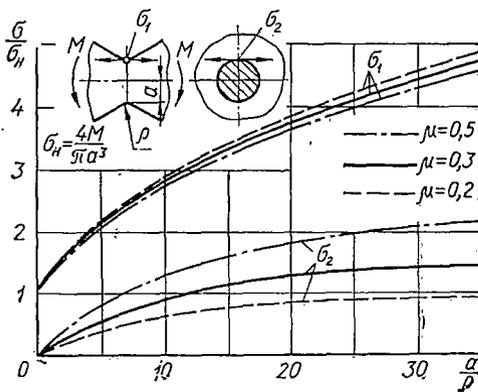


Рис. 268.

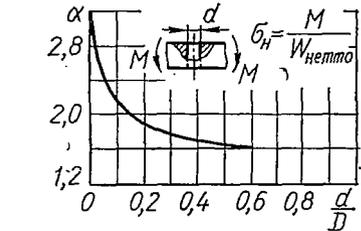


Рис. 269.

закругления  $r$  к меньшему диаметру ступенчатого стержня (диаметру выточки  $d$ ). На рис. 270 приведен график зависимости  $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$  для рассматриваемого случая.

Кроме концентрации нормальных напряжений, при изгибе в некоторых случаях приходится иметь дело с концентрацией касательных напряжений, в частности при поперечном изгибе уголкового, швеллерного, тавровых и двутавровых балок. В данном случае концентрация напряжений обуславливается резким изменением толщины элементов сечения балки в месте соединения полки со стенкой. Как показывают детальные исследования картины распределения касательных напряжений при изгибе, например в балке двутаврового сечения, фактическое распределение касательных напряжений не отвечает картине, приведенной на рис. 271, а, полученной на основании расчетов по формуле (10.20). По линии 1—1, совпадающей с осью симметрии сечения, распределение касательных напряжений будет с достаточной точностью изображаться графиком рис. 271, б. По линии же 2—2, проходящей у самого края стенки, распределение напряжений в случае малого радиуса закругления в месте сопряжения стенки с полкой будет представляться кривой, показанной на рис. 271, в. Из этого графика видно,

что в точках входящих углов сечения касательные напряжения теоретически достигают очень большой величины. На практике эти входящие углы скругляются, напряжения падают и их распределение в точках линии 2—2 примерно представляется кривой, приведенной на рис. 271, з.

Во всех случаях снизить концентрацию напряжений можно введением соответствующих плавных переходов от одного размера сечения к другому, закруглениями в углах, уменьшением жесткости более массивной части детали в месте перехода и т. п.

Если при статическом изгибе концентрация напряжений не представляет собой опасности, особенно для элементов конструкций, изгото-

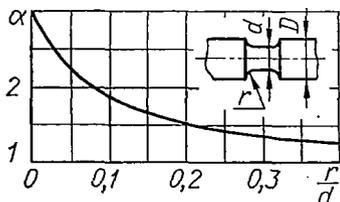


Рис. 270.

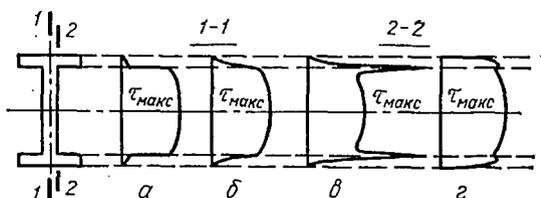


Рис. 271.

товленных из пластичных материалов, то в случае динамических и повторно-переменных нагрузок вопросам концентрации должно уделяться особенно большое внимание (см. гл. XXI).

## § 66. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ

В предыдущих параграфах были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. В большинстве случаев практического расчета деталей, работающих на изгиб, необходимо также производить расчет их на жесткость. Год *расчетом на жесткость* мы понимаем оценку упругой податливости балки под действием приложенных

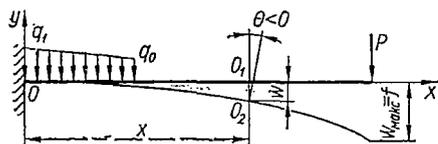
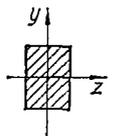


Рис. 272.



нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов. Для выполнения такого расчета необходимо научиться

вычислять перемещения точек балки под действием любой внешней нагрузки. Такое умение необходимо также для расчета статически неопределимых балок.

Рассмотрим деформацию балки при простом изгибе. Ось балки (рис. 272) под действием нагрузки, расположенной в одной из главных плоскостей инерции (в плоскости  $xOy$ ), искривляется в той же плоскости, а поперечные сечения поворачиваются и одновременно получают поступательные перемещения. Искривленная ось балки называется *изогнутой осью*, или *упругой линией*. На рис. 272 и 273 упругая линия изображена тонкой кривой линией.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется *прогибом балки в данном сечении* и обозначается буквой  $w$ . На рис. 272 и 273 центр тяжести произвольного сечения, взятого на расстоянии  $x$  от начала координат, переместился по вертикали из точки  $O_1$  в точку  $O_2$  на расстояние  $O_1O_2$ . Это перемещение и является прогибом балки  $w(x)$  в сечении с абсциссой  $x$ . Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба* и обозначается буквой  $f$ .

Угол  $\Theta$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота сече-*

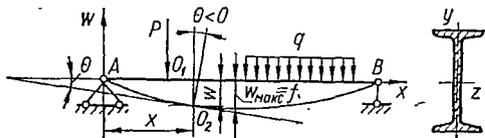


Рис. 273.

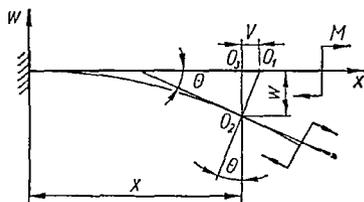


Рис. 274.

ния. Угол поворота также может быть определен как угол между касательной к упругой линии и осью  $x$  (рис. 273).

Заметим, что длина изогнутой оси, принадлежащей нейтральному слою, при искривлении бруса не изменяется, следовательно, при этом происходит смещение ее точек также и в направлении оси  $x$  (перемещение  $O_1O_3$  на рис. 274). Однако в большинстве случаев смещения  $V$  (проекция на ось  $x$  полных перемещений) настолько малы, что ими можно пренебречь.

Условимся оси координат всегда располагать следующим образом: начало координат помещать на левом конце балки, ось  $x$  направлять по оси балки вправо, а ось  $w$  — вверх.

Прогиб  $w$  будем считать положительным, если перемещение соответствующей точки происходит вверх, т. е. в направлении оси  $w$ . Угол поворота  $\Theta$  будем считать положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

В связи с малостью деформаций балок можно полагать  $\text{tg } \Theta \approx \Theta$ . Так как тангенс угла поворота есть производная от ординаты прогиба:

$$\text{tg } \Theta = \frac{dw}{dx}, \quad (10.39)$$

то с достаточной степенью точности можно считать угол поворота  $\Theta(x)$  в данном сечении равным производной прогиба  $w(x)$  по абсциссе сечения:

$$\Theta(x) \approx \frac{dw(x)}{dx}. \quad (10.40)$$

Таким образом, для определения деформации балки в ее произвольном сечении необходимо прежде всего получить уравнение упругой линии

$$w = F(x).$$

Исходя из физической природы изогнутой оси бруса, можем утверждать, что упругая линия должна быть непрерывной и гладкой (не имеющей изломов) кривой, следовательно, на протяжении всей оси бруса должны быть непрерывны функция и ее первая производная. Прогнбы и углы поворота и являются перемещениями сечений балок при изгибе. Деформация того или иного участка балки определяется искривлением его изогнутой оси, т. е. кривизной. В § 60 настоящей главы было получено следующее уравнение кривизны изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.41)$$

Из курса высшей математики известно следующее уравнение кривизны плоской кривой:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (10.42)$$

Теперь для получения дифференциального уравнения изогнутой оси остается приравнять правые части выражений (10.41) и (10.42), выяснив предварительно вопрос о знаке.

Если изгибающий момент положителен, то упругая линия своей вогнутой стороной обращена вверх (рис. 275, а) и, следовательно, при принятом направлении

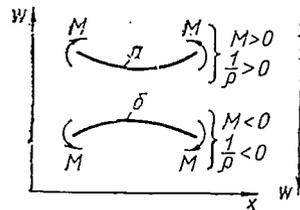


Рис. 275.

координатных осей кривизна  $k = \frac{1}{\rho}$  считается положительной. При отрицательном изгибающем моменте кривизна также будет отрицательной (рис. 275, б). Если бы ось  $w$  была нами направлена вниз, то при положительном

изгибающем моменте кривизна была бы отрицательной (рис. 275, в), а при отрицательном моменте — положительной (рис. 275, г).

Сохраняя принятое нами направление оси  $w$  вверх, имеем соответствие между знаком момента и знаком кривизны, поэтому можем просто приравнять правые части равенств (10.41) и (10.42). Тогда

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.43)$$

Если бы ось  $w$  была направлена вниз, то в правой части следовало бы поставить знак минус.

Полученное уравнение называется *точным уравнением изогнутой оси бруса*. Оно является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, интегрирование которого, как известно, представляет значительные трудности. В связи с этим и так как в подавляющем большинстве рассматриваемых на практике задач прогиба малы, точнее уравнение (10.43) заменяют приближенным уравнением — уравнением для малых перемещений.

В знаменателе уравнения (10.43) стоит сумма двух слагаемых:

$$1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \Theta.$$

При малых деформациях величина второго слагаемого во много раз меньше первого. Действительно, при расчете обычных машиностроительных или строительных элементов нормы допускаемого прогиба составляют 1/100—1/1000 пролета в зависимости от условий работы балки, а получающиеся при этом углы поворота не превышают 1°.

Даже приняв больший предел для прогиба  $(f = \frac{1}{100} l)$ , наибольшую величину тангенса  $\Theta$  получим следующего порядка:

$$\operatorname{tg} \Theta \approx \operatorname{tg} 1^\circ \approx 0,02.$$

Таким образом, значение  $\operatorname{tg}^2 \Theta$  не превосходит 0,0004, т. е. весьма мало по сравнению с единицей. Этими величинами и можно пренебречь без ощутимой для практических целей ошибки. Тогда получим следующее упрощенное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)},} \quad (10.44)$$

в котором величина изгибающего момента  $M(x)$  вычисляется для недеформированной балки. В дальнейшем уравнение (10.44) будем называть *основным дифференциальным уравнением упругой линии* (для малых деформаций). С его помощью можно вычислять перемещения в балках при любых условиях нагружения.

Решая задачу аналитическим методом, углы поворота  $\Theta(x)$  и прогибы  $w(x)$  вычисляют последовательным интегрированием основного дифференциального уравнения (10.44). Проинтегрировав уравнение первый раз, получим выражение для угла поворота  $\Theta(x)$ :

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C, \quad (10.45)$$

содержащее одну произвольную постоянную  $C$ . Интегрируя второй раз, находим выражение для прогиба  $w(x)$ :

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + Cx + D, \quad (10.46)$$

содержащее две произвольные постоянные  $C$  и  $D$ . Значения постоянных  $C$  и  $D$  определяют из условий закрепления балки следующим образом:

а) если балка имеет на конце заделку (рис. 276), то прогиб и угол поворота в ней равны нулю:

$$\omega_B = 0; \quad \Theta_B = 0; \quad (10.47)$$

б) для балки на двух шарнирных опорах (см. рис. 273) равны нулю прогибы на этих опорах:

$$\omega_A = 0; \quad \omega_B = 0. \quad (10.48)$$

Заметим, что уравнение упругой линии иногда удобно записать в иной форме, считая заданным не момент  $M(x)$ , а нагрузку  $q(x)$ .

Вспомнив, что  $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$ , и продифференцировав уравнение (10.44) два раза, получим:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ(x) \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right] = q(x). \quad (10.49)$$

Уравнение упругой линии в форме (10.49) применяют при расчете балок на упругом основании и при рассмотрении колебаний балок.

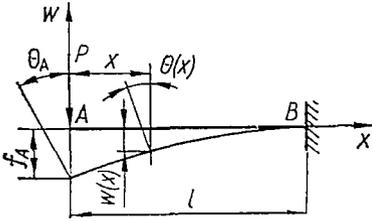


Рис. 276.

## § 67. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Рассмотрим несколько примеров определения деформаций балок методом непосредственного интегрирования основного дифференциального уравнения (10.44), а затем установим правила построения эпюр углов поворота и прогибов, которые необходимы при исследовании деформированного состояния балок при сложной системе нагрузок.

Определим  $\Theta_{\text{макс}}$  и  $\omega_{\text{макс}}$  для консоли постоянного поперечного сечения с сосредоточенной силой  $P$  на свободном конце (рис. 276).

Изгибающий момент в сечении  $x$  будем вычислять как результат действия внешних сил, расположенных слева от сечения:

$$M(x) = -Px.$$

Подставляя выражение для  $M(x)$  в уравнение (10.44), получим:

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ}.$$

Интегрируем дважды:

$$\Theta(x) = -\frac{Px^2}{2EJ} + C;$$

$$\omega(x) = -\frac{Px^3}{6EJ} + Cx + D.$$

Для определения постоянных  $C$  и  $D$  имеем граничные условия:

- 1) при  $x = l$   $\omega = 0$ ;
- 2) при  $x = l$   $\Theta = 0$ .

Из второго условия

$$\Theta(l) = -\frac{Pl^2}{2EJ} + C = 0,$$

откуда

$$C = \frac{Pl^2}{2EJ}. \quad (10.50)$$

Тогда

$$w(x) = -\frac{Px^3}{6EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ}x + D.$$

Из первого условия

$$w(l) = -\frac{Pl^3}{6EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ}l + D = 0,$$

откуда

$$D = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (10.51)$$

Окончательные уравнения прогиба и угла поворота следующие:

$$w(x) = -\frac{P}{6EJ}(x^3 - 3l^2x + 2l^3) = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]; \quad (10.52)$$

$$\Theta(x) = -\frac{P}{2EJ}(x^2 - l^2) = \frac{Pl^2}{2EJ}\left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \quad (10.53)$$

Упругая линия балки (10.52) представляет собой параболу третьей степени.

Теперь можно определить  $w_{\max}$  и  $\Theta_{\max}$ . Как легко убедиться,  $w_{\max}$  и  $\Theta_{\max}$  имеют место на свободном конце балки в точке  $A$  (при  $x = 0$ ). Следовательно,

$$w_{\max} = f_A = -\frac{Pl^3}{3EJ}; \quad (10.54)$$

$$\Theta_{\max} = \Theta_A = \frac{Pl^2}{2EJ} \quad (10.55)$$

Отрицательное значение  $f_A$  показывает, что прогиб происходит в направлении, противоположном направлению оси  $w$  (т. е. вниз). Положительный угол поворота  $\Theta_A$  показывает, что поворот сечения происходит против часовой стрелки.

Сравнивая выражения (10.50), (10.51) для произвольных постоянных с выражениями (10.55), (10.54) для  $\Theta(0)$  и  $w(0)$ , убеждаемся, что  $C$  равно углу поворота на свободном конце консоли (при  $x = 0$ ), а  $D$  равно прогибу свободного конца консоли (при  $x = 0$ ).

Построим эпюры прогибов и углов поворота для простой балки постоянного сечения (рис. 277), несущей сплошную равномерно распределенную нагрузку  $q$ .

Опорные реакции

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Составляем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right).$$

Интегрируя его дважды, получаем:

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{ql}{4EJ}x^2 - \frac{q}{6EJ}x^3 + C; \quad (10.56)$$

$$w(x) = \frac{ql}{12EJ}x^3 - \frac{q}{24EJ}x^4 + Cx + D. \quad (10.57)$$

Граничные условия следующие:

- 1) на левом конце прогиб равен нулю, т. е. при  $x = 0$   $w = 0$ ;
- 2) на правом конце прогиб равен нулю, т. е. при  $x = l$   $w = 0$ .

Первое условие дает

$$w(0) = D = 0. \quad (10.58)$$

Второе условие дает

$$w(l) = \frac{ql^4}{12EJ} - \frac{ql^4}{24EJ} + Cl = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{ql^3}{24EJ}. \quad (10.59)$$

Подставив вычисленные значения произвольных постоянных в уравнения (10.56) и (10.57), получим уравнение упругой линии:

$$w(x) = \frac{qlx^3}{12EJ} - \frac{qx^4}{24EJ} - \frac{ql^3x}{24EJ} = -\frac{ql^3x}{24EJ} \left[ 1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (10.60)$$

и уравнение углов поворота:

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{qlx^2}{4EJ} - \frac{qx^3}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = -\frac{ql^3}{24EJ} \left[ 1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]. \quad (10.61)$$

Для построения эпюр  $\Theta(x)$  и  $w(x)$  вычислим углы поворота по концам балки, а также прогиб посередине пролета  $w\left(\frac{l}{2}\right) = f$ . Углы пово-

рота на опорах найдем из уравнения (10.61). При  $x = 0$  получим величину угла поворота на левой опоре:

$$\Theta_A = \Theta(0) = -\frac{ql^3}{24EJ}. \quad (10.62)$$

На правой опоре, т. е. при  $x = l$ ,

$$\Theta(l) = \Theta_B = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Сравнивая значения произвольных постоянных  $C$  и  $D$  с выражениями для  $\Theta(0)$  и  $w(0)$ , вновь убеждаемся, что они соответственно равны углу поворота и прогибу на той опоре, где находится начало координат:

$$C = \Theta(0) = -\frac{ql^3}{24EJ};$$

$$D = w(0) = 0.$$

Отметим, что таким будет геометрический смысл произвольных постоянных на участке, примыкающем к началу координат, для любой балки при произвольной нагрузке.

Подставив в уравнение (10.60)  $x = \frac{l}{2}$ , вычислим величину прогиба:

$$f = -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}. \quad (10.63)$$

Из уравнения (10.60) упругой линии заключаем, что балка изгибается по кривой, являющейся параболой четвертого порядка. Так как изгибающий момент на всем протяжении балки положителен, то, значит, всюду сжаты верхние волокна и, следовательно, балка изгибается выпуклостью вниз.

Вычислив величины прогибов в различных сечениях, откладываем их в определенном масштабе вниз от базисной линии. Соединив концевые точки отложенных отрезков кривой, получаем эпюру прогибов  $w$ . Эпюра прогибов в принятом масштабе изображает изогнутую ось рассматриваемой балки.

Для построения эпюры  $\Theta$  отложим вычисленные значения  $\Theta_A$  и  $\Theta_B$  от базисной линии вниз и вверх соответственно. Из условия симметрии балки и нагрузки заключаем, что сечение на оси симметрии (т. е. при  $x = \frac{l}{2}$ ) не поворачивается. Значит,

$$\Theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

В соответствии с уравнением (10.61) эпюра углов поворота должна быть очерчена параболой третьего порядка. Строим эпюру по точкам (рис. 277), вычислив промежуточные ординаты:

$$\Theta\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{9}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}; \quad \Theta\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{9}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}.$$

При этом параболическая кривая на левой половине балки обращена вогнутостью вверх, а на правой — вниз.

Рассмотрим еще один случай определения перемещений. Для простой балки постоянного поперечного сечения, нагруженной силой  $P$  в точке  $C$  (рис. 278), необходимо:

- найти уравнения упругой линии и углов поворота;
- вычислить прогибы в точке  $C$  и посредине пролета, а также определить положение и величину стрелы прогиба  $f$ ;

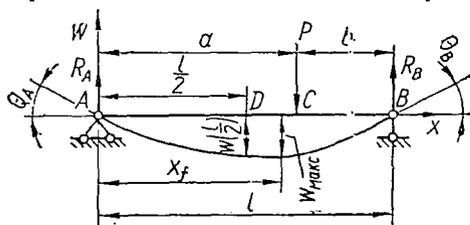


Рис. 278.

в) вычислить углы наклона сечений в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;

г) построить эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $\Theta$  и  $w$ , приняв  $P = 18T$ ,  $l = 6$  м,  $a = 2,2$  м,  $J_2 = 46\,470$  см<sup>4</sup>,  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Предоставим читателю возможность самостоятельно решить этот пример. Укажем лишь, что на каждом из участков балки

при интегрировании дифференциальных уравнений упругой линии будут получены по две произвольные постоянные:  $C_I$ ,  $D_I$  и  $C_{II}$ ,  $D_{II}$ . Для их определения к двум опорным условиям балки

$$w(0) = 0; \quad w(l) = 0$$

должны быть добавлены условия плавного и непрерывного сопряжения участков  $AC$  и  $CB$  в точке  $C$  при  $x = a$ :

$$\Theta(a)_{\text{лев}} = \Theta(a)_{\text{прав}}; \quad w(a)_{\text{лев}} = w(a)_{\text{прав}}.$$

Эти дополнительные условия выражают отсутствие разрыва и отсутствие излома упругой линии балки под силой  $P$ .

Для самоконтроля приводим окончательные уравнения прогибов и углов поворота:

для участка  $AC$

$$w(x) = -\frac{Pbx}{6EJl}(a^2 + 2ab - x^2); \quad (10.64)$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pb}{6EJl}(a^2 + 2ab - 3x^2); \quad (10.65)$$

для участка  $BC$

$$w(x) = -\frac{Pa}{6EJl}[-a^2l + (a^2 + 2l^2)x + x^3 - 3lx^2]; \quad (10.66)$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pa}{6EJl}(a^2 + 2l^2 - 6lx + 3x^2). \quad (10.67)$$

Эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $\Theta$ ,  $w$  изображены на рис. 279.

Вспользуемся результатами этого примера для того, чтобы определить абсциссы сечений с наибольшим прогибом и величины  $f$  при различных положениях груза  $P$  на балке. Наибольший прогиб будет иметь место в сечении  $x_f$ , где

$$\Theta(x_f) = \frac{dw}{dx} = 0. \quad (10.68)$$

При  $a > b$  это сечение находится на участке  $AC$ .

Приравняв нулю уравнение (10.65), получим:

$$x_f = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \quad (10.69)$$

Исследуем, как будет меняться абсцисса сечения с наибольшим прогибом при перемещении силы  $P$  от середины балки к правой опоре.

При  $b \rightarrow 0$  абсцисса  $x_f = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$ . Значит, даже в предельном случае, когда груз  $P$  подойдет к опоре  $B$ , точка  $F$  с наибольшим прогибом будет находиться от середины балки на расстоянии всего

$$t = 0,577l - 0,5l = 0,077l = \frac{l}{13}.$$

Заметим, что на таком же расстоянии от середины пролета находится наибольший прогиб и в случае, когда балка на двух опорах нагружена моментом, действующим над одной из опор (см. рис. 62).

Подставив выражение (10.69) в уравнение (10.64) для упругой линии на участке  $AC$ , получим формулу для  $w_{\max} = f$ :

$$\begin{aligned} f &= -\frac{Pb}{6EJl} \left( a^2 + 2ab - \frac{a^2 + 2ab}{3} \right) \sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{3}} = \\ &= \frac{P}{9\sqrt{3}EJ} \cdot \frac{b(a^2 + 2ab)^{3/2}}{a + b} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EJ} \cdot \frac{(l^2 - b^2)^{3/2}}{l}. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Прогиб посредине пролета найдем из уравнения (10.64), подставив  $x = \frac{l}{2}$ :

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pb}{12EJ} \left( a^2 + 2ab - \frac{l^2}{4} \right). \quad (10.71)$$

Анализ формул (10.69) и (10.64) показывает, что даже при  $b \rightarrow 0$  разница между прогибом посредине балки и максимальным прогибом не превышает 3%. Следовательно, прогиб балки посредине пролета  $w\left(\frac{l}{2}\right) = f\left(\frac{l}{2}\right)$  приблизительно равен наибольшему прогибу  $f$ . Это

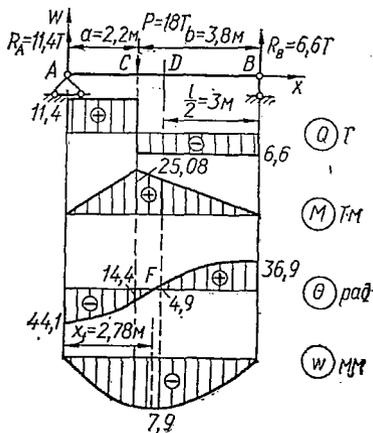


Рис. 279.

заключение применимо при действии на балку любых нагрузок, вызывающих изгиб в одну сторону.

Во многих случаях построение эпюр  $w$  и  $\Theta$  возможно и без составления аналитических выражений для прогибов и углов поворота по участкам: достаточно лишь вычислить прогибы и углы поворота для некоторых характерных сечений. При построении же эпюр следует пользоваться правилами, которые могут быть получены на основе анализа дифференциальных зависимостей, существующих между  $w$ ,  $\Theta$ ,  $M$  и  $Q$ .

Запишем эти зависимости в удобной для анализа форме. Из уравнения (10.44) с учетом выражения (10.40) находим, что

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (10.72)$$

Продифференцировав уравнение (10.72) по  $x$  и учтя зависимость  $\frac{dM}{dx} = Q$ , получим:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}. \quad (10.73)$$

Таким образом, имеем две группы дифференциальных зависимостей:

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}; \quad \frac{dw}{dx} = \Theta(x); \quad (10.74)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (10.75)$$

аналогичных зависимостям, на основании которых были получены правила для построения эпюр  $Q$  и  $M$  (§ 21). Выражения (10.74), (10.75), а также сопоставление построенных эпюр позволяют установить общие для любых балок зависимости между эпюрами  $w$ ,  $\Theta$ ,  $Q$  и  $M$ , которые будут в дальнейшем служить правилами построения эпюр. Укажем наиболее важные из этих правил:

1. Так как  $M(x)$  представляет собой диаграмму производной от эпюры углов поворота  $\Theta$ , то ординаты эпюры  $M$  пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре  $\Theta$ . В сечениях, где  $M(x) = 0$ , касательная к кривой  $\Theta = F(x)$  должна быть параллельна оси абсцисс (рис. 277 и 279, сечения  $A$  и  $B$ ). Скачку на эпюре моментов соответствует угловая точка на эпюре  $\Theta$  (рис. 283, сечение  $C$ ; рис. 286, сечение  $D$ ).

2. Если изгибающий момент равен нулю на протяжении какого-либо участка балки, то на этом участке эпюра  $\Theta$  прямоугольна, а эпюра  $w$  прямолинейна, но, вообще говоря, наклонна (рис. 286, участок  $DE$ ).

3. На участках, где действует постоянный момент (на участках, находящихся в условиях чистого изгиба), эпюра  $\Theta$  прямолинейна и наклонна, а эпюра  $w$  — параболическая (рис. 286, участок  $BD$ ).

Здесь обнаруживается противоречие с изложенным выше утверждением, что при чистом изгибе кривизна постоянна ( $k = \frac{1}{\rho} =$

$= \frac{M}{EJ} = \text{const}$ ) и балка изгибается по дуге окружности. Причина этого кроется в приближенности дифференциального уравнения упругой линии, которым мы пользуемся для вывода уравнения (10.72). Строго говоря, при чистом изгибе балка изгибается по дуге окружности, которая в пределах малых деформаций с весьма большой точностью может быть представлена квадратичной параболой.

4. Вторая производная прогиба

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

имеет знак момента. Если момент положителен (сжаты верхние волокна), то вогнутость на эпюре  $w$  будет обращена в сторону положительных  $w$  (вверх). При отрицательном моменте вогнутость параболы обращена вниз. Так как ординаты эпюр изгибающих моментов мы условились откладывать со стороны сжатых волокон (§ 20), то вогнутость эпюры прогибов  $w$  всегда обращена в ту сторону, с которой расположены ординаты эпюры изгибающих моментов. В сечении, где действует сосредоточенный момент  $M$ , имеем точку перегиба упругой линии (рис. 283, точка  $C$ ).

5. Вторая производная угла поворота

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}$$

имеет знак поперечной силы. Если  $Q$  положительна, то выпуклость на эпюре  $\theta$  будет обращена вниз (рис. 279, участок  $AC$ ; рис. 286, участки  $AC$  и  $CB$ ). При  $Q < 0$  выпуклость направлена в сторону оси  $w$ , т. е. вверх (рис. 279, участок  $CB$ ). В сечении, где  $Q$  меняет знак, на эпюре  $\theta$  имеем точку перегиба (рис. 279, сечение  $C$ ).

6. На тех участках балки, где эпюра  $M$  изменяется по линейному закону (например на участках  $AC$  и  $CB$  рис. 279) эпюра  $\theta$  будет квадратичной параболой, а эпюра  $w$  — параболой третьего порядка.

7. Так как  $\theta$  представляет собой график изменения по длине балки тангенсов углов наклона касательных к упругой линии, то можно утверждать следующее:

а) на участках, где в направлении оси  $x$  прогиб  $w$  возрастает, угол наклона  $\theta$  будет положителен (рис. 279, участок  $FB$ ), и наоборот, при уменьшении  $w$  углы наклона  $\theta$  будут отрицательны (рис. 279 и 286, участки  $AC$ );

б) в сечениях, где  $\theta = 0$ , касательная к эпюре  $w$  горизонтальна, т. е. здесь на эпюре  $w$  получается аналитический максимум или минимум (рис. 279, сечение  $F$ ).

8. В тех сечениях, где на балке расположены промежуточные шарниры (рис. 286, сечение  $C$ ), на эпюре углов поворота будут скачки. На эпюре  $w$  в этих сечениях получаются переломы, т. е. угловые точки, в которых скачкообразно изменяется угол наклона касательной к эпюре  $w$ .

Перечисленные особенности эпюр позволяют по самому виду их установить, не допущены ли принципиальные ошибки при построении. Несколько примеров построения эпюр будет рассмотрено в следующем параграфе. В дальнейшем всегда будем пользоваться этими общими правилами.

### § 68. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПО МЕТОДУ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии в случае балок с большим количеством участков сопряжено со значительными трудностями. Эти затруднения заключаются не в интегрировании дифференциальных уравнений, а в технике определения произвольных постоянных интегрирования — составлении и решении систем линейных алгебраических уравнений. Так, если балка по условиям нагружения разбивается на  $n$  участков, то интегрирование дифференциальных уравнений для всех участков балки дает  $2n$  произвольных постоянных. Добавив к двум основным опорным условиям балки  $2(n-1)$  условий непрерывного и плавного сопряжения всех участков упругой линии, можно составить  $2n$  уравнений для определения этих постоянных.

Задача становится очень трудоемкой уже при  $n=3$ . Для уменьшения большой вычислительной работы, связанной с определением произвольных постоянных интегрирования, в настоящее время разработан ряд методов. К ним относится и метод начальных параметров,

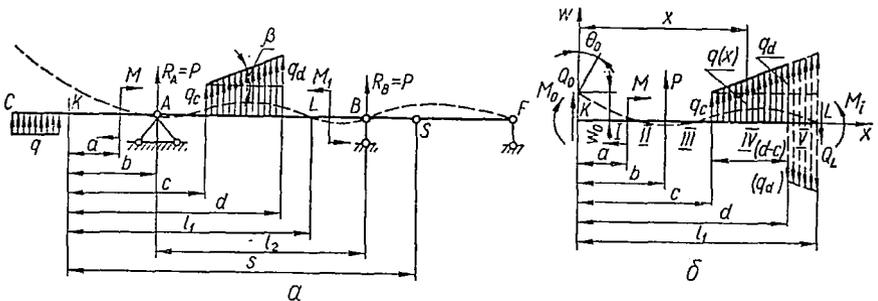


Рис. 280.

позволяющий при любом числе участков свести решение к отысканию всего двух постоянных — прогиба и угла поворота в начале координат.

**Вывод общих уравнений и примеры их применения.** Рассмотрим некоторую часть балки длиной  $l_1$  (рис. 280, а), проведя сечение в точках  $K$  и  $L$ . На рис. 280, б изображен этот отрезок, нагруженный следующими наиболее часто встречающимися нагрузками:

- а) сосредоточенным моментом  $M$  в сечении с абсциссой  $a$ ;
- б) сосредоточенной силой  $P$  в сечении с абсциссой  $b$ ;

в) нагрузкой, распределенной по закону трапеции от сечения с абсциссой  $c$  до сечения с абсциссой  $d$ , интенсивностью

$$q(x) = q_c + k(x - c),$$

где  $k$  — тангенс угла наклона  $\beta$  касательной к эпюре нагрузки (рис. 280, а):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c} = k;$$

г) кроме того, по концам рассматриваемой части балки приложены поперечные силы и изгибающие моменты, заменяющие действие мысленно отброшенных частей балки.

При выводе уравнений направления всех нагрузок выберем такими, чтобы они вызывали положительные изгибающие моменты. Заметим также, что на рассматриваемом отрезке может быть несколько сосредоточенных моментов и сосредоточенных сил, а также несколько участков распределенной нагрузки. Мы показали на балке по одному из перечисленных силовых факторов лишь с целью упрощения дальнейших выкладок.

Чтобы резко сократить число неизвестных произвольных постоянных, сведя решение к определению только двух постоянных интегрирования, необходимо обеспечить равенство соответствующих постоянных на всех участках балки. Это равенство может быть только тогда, когда в уравнениях моментов, углов поворота и прогибов при переходе от участка к участку повторяются все члены предыдущего участка, а вновь появляющиеся слагаемые обращаются в нуль на левых границах своих участков. Для обеспечения этих условий при составлении дифференциальных уравнений упругой линии и их интегрирования должны соблюдаться следующие правила:

1. Начало координат необходимо выбирать в крайней левой точке рассматриваемой балки и делать его общим для всех участков.

2. Выражение для изгибающего момента  $M(x)$  составлять, вычисляя моменты сил, расположенных слева от рассматриваемого сечения.

3. При включении в уравнения внешнего сосредоточенного момента  $M$  его нужно умножать на множитель  $(x - a)^0$ , равный единице. Здесь  $a$  — абсцисса точки, где приложен момент  $M$ .

4. В случае обрыва распределенной нагрузки (например в сечении  $x = d$ , рис. 280, б) ее продлевают до конца рассматриваемого сечения, а для восстановления действительных грузовых усилий вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления. «Дополнительную» и «компенсирующую» нагрузки будем показывать на чертежах штриховыми линиями.

5. Интегрирования уравнений на всех участках следует производить, не раскрывая скобок.

Итак, выбрав начало координат в крайней левой точке рассматриваемого отрезка балки (в точке  $K$ ), составим выражение для изгибающего момента  $M(x)$  в произвольном сечении крайнего правого ( $V$ ) участка с соблюдением пунктов 2—4 указанных правил. При этом условимся разбивать трапециевидную нагрузку на треугольную и равномерно распределенную. Изгибающий момент запишется так:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b) + q_c \frac{(x - c)^2}{2} - q_d \frac{(x - d)^2}{2} + k \frac{(x - c)^3}{6} - k \frac{(x - d)^3}{6}. \quad (10.76)$$

Рассматривая чертеж балки (рис. 280, б), легко убеждаемся в том, что выражение для изгибающего момента на IV участке легко получить из уравнения (10.76), вычеркивая члены, учитывающие нагрузку, появляющуюся лишь на V участке.

Действительно, выражение для изгибающего момента на IV участке имеет вид

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c \frac{(x-c)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6}. \quad (10.77)$$

Полезно запомнить, что коэффициенты  $(x-a)$ ,  $(x-b)$ ,  $(x-c)$ , ...  $(x-j)$  могут быть только положительными величинами. Если окажется, что  $(x-j) < 0$ , то это означает, что соответствующая нагрузка расположена справа от рассматриваемого сечения и такое слагаемое должно быть вычеркнуто из уравнения.

Изгибающий момент  $M_0$  и поперечная сила  $Q_0$ , действующие в сечении, совпадающем с началом координат, называются *статическими начальными параметрами*.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии на участке V:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c \frac{(x-c)^3}{2} - q_d \frac{(x-d)^3}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6} - k \frac{(x-d)^3}{6} \right]. \quad (10.78)$$

Интегрируем обе части равенства, не раскрывая скобок. Тогда получаем:

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q_c \frac{(x-c)^3}{6} - q_d \frac{(x-d)^3}{6} + k \frac{(x-c)^4}{24} - k \frac{(x-d)^4}{24} + C_V \right]. \quad (10.79)$$

Интегрируя вторично, находим:

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q_c \frac{(x-c)^4}{24} - q_d \frac{(x-d)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} - k \frac{(x-d)^5}{120} + C_V x + D_V \right]. \quad (10.80)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии на IV участке запишется так:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c \frac{(x-c)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6} \right]. \quad (10.81)$$

Пронтегрировав его дважды, получим:

$$\Theta(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q_c \frac{(x-c)^3}{6} + k \frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV} \right]; \quad (10.82)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q_c \frac{(x-c)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} + C_{IV} x + D_{IV} \right]. \quad (10.83)$$

Теперь мы можем показать, что соблюдение правил составления и дифференцирования уравнений упругой линии обеспечило равенство произвольных постоянных на *IV* и *V* участках. Действительно, положив в выражениях (10.79) и (10.82)  $x = d$ , из условий плавного сопряжения участков получим:

$$\begin{aligned} \Theta(d)_{IV} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + q_c \frac{(d-c)^3}{6} + k \frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV} \right] = \Theta(d)_V = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + q_c \frac{(d-c)^3}{6} - q_d \frac{(d-d)^3}{6} + k \frac{(d-c)^4}{24} - k \frac{(d-d)^4}{24} + C_V \right]. \end{aligned} \quad (10.84)$$

Следовательно,  $C_{IV} = C_V$ .

Положив  $x = d$  в уравнениях (10.80) и (10.83), из условия непрерывного сопряжения участков  $\omega(d)_{IV} = \omega(d)_V$  найдем, что и

$$D_{IV} = D_V.$$

Выполнив аналогичные операции для остальных участков, заключаем, что соответствующие произвольные постоянные равны на всех участках рассматриваемого отрезка балки:

$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V = C; \quad (10.85)$$

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V = D. \quad (10.86)$$

Геометрический смысл этих двух постоянных интегрирования установим, рассматривая уравнения углов поворота и прогибов на первом участке. Вычеркивая в уравнениях (10.79) и (10.80) слагаемые, учитывающие нагрузки, приложенные на *II*—*V* участках, получим уравнения для первого участка:

$$\Theta(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + C \right]; \quad (10.87)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + Cx + D \right]. \quad (10.88)$$

Подставив в эти уравнения  $x = 0$ , найдем:

$$\Theta(0) = \Theta_0 = C; \quad (10.89)$$

$$w(0) = w_0 = D. \quad (10.90)$$

Следовательно, произвольные постоянные  $C$  и  $D$  равны соответственно углу поворота и прогибу в начале координат. Прогиб  $w_0$  и угол поворота  $\Theta_0$  являются *начальными параметрами*.

Подставив значения  $C$  и  $D$  в уравнение (10.80), получим общее выражение для прогиба в произвольном сечении балки:

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q_c \frac{(x-c)^4}{24} - q_d \frac{(x-d)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} - k \frac{(x-d)^5}{120} \right]. \quad (10.91)$$

Для случая нескольких моментов и сил, а также нескольких участков распределенной нагрузки уравнение записывают в следующей форме:

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \right]. \quad (10.92)$$

Уравнение (10.92) обычно называют *универсальным уравнением упругой линии*. При этом имеют в виду, что это уравнение применимо для любых расчетных схем балок.

Дифференцируя уравнение (10.92), получаем уравнение углов поворота сечений:

$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x}{1!} + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum k \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(x-d)^4}{4!} \right]. \quad (10.93)$$

В уравнения (10.92) и (10.93) подставляют только те нагрузки, которые расположены слева от рассматриваемого сечения. Знаки слагаемых определяются знаком соответствующих силовых факторов.

Таким образом, определение перемещений по методу начальных параметров сводится в первую очередь к определению величин начальных параметров  $Q_0$ ,  $M_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $w_0$ . Статические начальные параметры  $Q_0$  и  $M_0$  находят из условий равновесия балки. Геометрические начальные параметры  $\Theta_0$  и  $w_0$  определяют из условий на опорах. Уравнения (10.92) и (10.93), выведенные для произвольного отрезка балки,

пригодны и для всей балки в целом. Начало координат, как правило, будем выбирать в крайней левой точке балки.

Рассмотрим примеры определения перемещений в балках по методу начальных параметров.

В консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой на половине длины (рис. 281, а), определим прогибы в сечениях балки с абсциссами  $x = a$  и  $x = 2a$ .

Запишем уравнение упругой линии для правого участка балки. Так как распределенная нагрузка обрывается в точке  $C$ , продлим ее до конца балки, одновременно вводя компенсирующую нагрузку такой же интенсивности (рис. 281, б).

Уравнение упругой линии в общем случае будет иметь вид

$$\omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + q \frac{(x-a)^4}{4!} \right]. \quad (10.94)$$

Из условий равновесия балки определяем статические начальные параметры:

$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2}; \quad Q_0 = R_A = qa. \quad (10.95)$$

Так как начало координат совпадает с заделкой, то геометрические начальные параметры — прогиб и угол поворота в начале координат — равны нулю:

$$\omega_0 = 0; \quad \Theta_0 = 0. \quad (10.96)$$

Подставив в уравнение (10.94) найденные значения начальных параметров, получим уравнение упругой линии в окончательном виде:

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + qa \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + q \frac{(x-a)^4}{4!} \right]. \quad (10.97)$$

Положив в выражении (10.97)  $x = 2a$ , получим формулу для прогиба свободного конца консоли:

$$\omega_B = -\frac{7}{24} \cdot \frac{qa^4}{EJ}.$$

Положив в выражении (10.97)  $x = a$ , получим формулу для прогиба в точке  $C$ :

$$\omega_C = -\frac{qa^4}{8EJ}. \quad (10.98)$$

В балке, нагруженной, как показано на рис. 282, определим прогибы и углы поворота в точках  $C$  и  $D$ .

Запишем уравнение упругой линии для крайнего правого участка балки (участка  $BD$ , где  $l \leq x \leq \frac{5}{4}l$ ), предварительно продлив распре-

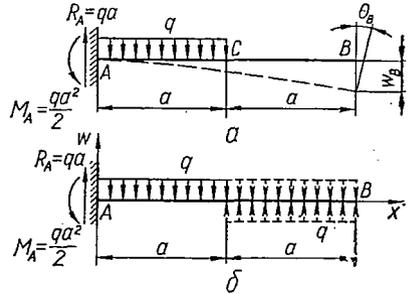


Рис. 281.

деленную нагрузку до конца балки и приложив компенсирующую нагрузку:

$$\omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ -R_A \frac{x^3}{3!} + R_B \frac{(x-l)^3}{3!} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + q \frac{(x-l)^4}{4!} \right]. \quad (10.99)$$

Уравнение (10.99) записано с учетом того, что статические начальные параметры нам уже известны:

$$Q_0 = -R_A = -\frac{7}{8} ql; \quad M_0 = 0.$$

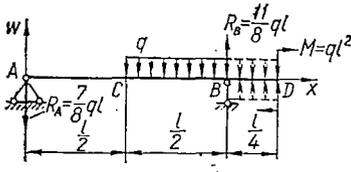


Рис. 282.

Для определения геометрических начальных параметров имеем опорные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad \omega(0) = \omega_A = 0, \\ \text{при } x = l & \quad \omega(l) = \omega_B = 0. \end{aligned}$$

Из первого опорного условия следует, что

$$\omega_0 = \omega_A = 0.$$

Второе опорное условие дает

$$\omega(l) = \Theta_0 l + \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{7}{8} ql \frac{l^3}{6} - q \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \right] = 0,$$

откуда

$$\Theta_0 = \frac{57}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ}.$$

Теперь уравнение упругой линии для участка балки  $BD$  примет вид

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{57ql^3}{384} x - \frac{7}{8} ql \frac{x^3}{3!} + \frac{11}{8} ql \frac{(x-l)^3}{3!} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + q \frac{(x-l)^4}{4!} \right]. \quad (10.100)$$

Чтобы найти перемещение точки  $D$ , достаточно положить в этом уравнении  $x = \frac{5}{4} l$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{5}{4}l\right) &= \left[ \frac{57}{384} \cdot \frac{5}{4} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{24} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right] \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{167}{1536} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \approx -0,11 \frac{ql^4}{EJ}, \end{aligned}$$

т. е.

$$w_D = -0,11 \frac{ql^4}{EJ}. \quad (10.101)$$

Чтобы вычислить перемещение точки  $C$ , нужно записать уравнение упругой линии для того участка, где находится эта точка. Так как она лежит на границе  $I$  и  $II$  участков, запишем уравнение упругой линии для первого участка. С этой целью в уравнении (10.100) нужно вычеркнуть слагаемые, соответствующие нагрузкам, появляющимся лишь на  $II$  и  $III$  участках. Другими словами, в уравнение должен войти лишь один силовой фактор —

$$R_A = \frac{7}{8} ql.$$

Таким образом, уравнение упругой линии на первом участке имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{57}{384} ql^3 x - \frac{7}{8} ql \frac{x^3}{3!} \right]. \quad (10.102)$$

Положив здесь  $x = \frac{l}{2}$ , получим формулу для прогиба точки  $C$ :

$$w_C = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{43}{768} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \approx 0,056 \frac{ql^4}{EJ}.$$

Чтобы вычислить угол поворота какого-либо сечения балки, необходимо иметь выражения для углов поворота на соответствующем участке балки. Уравнение углов поворота для участка  $BD$  получим дифференцированием уравнения (10.100):

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{57}{384} ql^3 - \frac{7}{8} ql \frac{x^2}{2!} + \frac{11}{8} ql \frac{(x-l)^2}{2!} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{3!} + \right. \\ \left. + q \frac{(x-l)^3}{3!} \right]. \quad (10.103)$$

Положив здесь  $x = \frac{5}{4} l$ , получим формулу для угла поворота сечения  $D$ :

$$\Theta_D = \Theta\left(\frac{5}{4} l\right) = \left[ \frac{57}{384} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \frac{ql^3}{EJ} = -\frac{215}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ} = -0,56 \frac{ql^3}{EJ},$$

следовательно,

$$\Theta_D = -0,56 \frac{ql^3}{EJ}. \quad (10.104)$$

Уравнение углов поворота для первого участка (участка  $AC$ ) получим дифференцированием уравнения (10.102):

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{57}{384} ql^3 - \frac{7}{8} ql \frac{x^2}{2!} \right]. \quad (10.105)$$

Отсюда при  $x = \frac{l}{2}$  получаем формулу для угла поворота в сечении  $C$ :

$$\theta_C = \theta \left( \frac{l}{2} \right) = \left( \frac{57}{384} - \frac{7}{8 \cdot 2 \cdot 2^2} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{15}{384} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \approx 0,039 \frac{ql^3}{EJ}.$$

Расчет на жесткость при изгибе. Овладев методикой определения прогибов и углов поворота, можно перейти к проверке жесткости балок, а также к подбору размеров сечения балок из условия жесткости.

Обозначив максимальный прогиб балки через  $f$ , а допускаемую стрелу прогиба через  $[f]$ , получим условие жесткости балки:

$$f \leq [f]. \quad (10.106)$$

Допускаемые величины прогибов устанавливают на основании экспериментальных и эксплуатационных данных.

*Пример 43.* Для балки, нагруженной на расстоянии  $a = 4$  м от левой опоры сосредоточенным моментом  $M = 12$  Т · м (рис. 283), построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота сечений и прогибов, а также подобрать двутавровое сечение из условий прочности и жесткости;  $[\sigma] = 1600$  кг/см<sup>2</sup>;

$$[f] = \frac{1}{600} l; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Определив опорные реакции, строим эпюры поперечных сил и моментов.

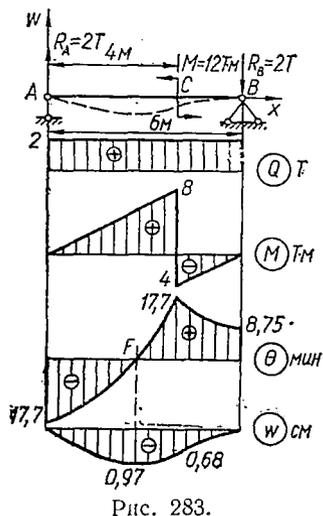
Перемещения характерных сечений будем определять в соответствии с рекомендованным выше порядком решения. Записываем уравнение прогибов для участка  $CB$ :

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ R_A \frac{x^3}{3!} - M \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = \\ &= \omega_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{x^3}{3} - 6(x-4)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Начало координат совмещено с левой опорой  $A$ , следовательно,  $\omega_0 = \omega_A = 0$ . В соответствии со вторым опорным условием  $\omega(l) = \omega_B = 0$ .

Из уравнения (10.107) при  $l = 6$  м имеем:

$$\omega(l) = \theta_0 l + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{l^3}{3} - 6(l-4)^2 \right] = 0,$$



откуда

$$\theta_0 = -\frac{8}{EJ}. \quad (10.108)$$

Подставив выражение (10.108) в уравнение (10.107), запишем уравнение упругой линии на участке  $CB$  в окончательном виде:

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ -8x + \frac{x^3}{3} - 6(x-4)^2 \right]. \quad (10.109)$$

Уравнение упругой линии на участке  $AC$  запишется так:

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left( -8x + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{x}{3} (24 - x^2) \right]. \quad (10.110)$$

Продифференцировав уравнение (10.109), получим уравнение углов поворота на участке балки  $CB$ :

$$\theta(x) = \frac{1}{EJ} \left[ -8 + x^2 - 12(x-4) \right]. \quad (10.111)$$

Для построения эпюры  $\theta$  необходимо вычислить углы поворота на границах этого участка:

$$\begin{aligned} \theta_C = \theta(4) &= \frac{-8 + 4^2}{EJ} = \frac{8}{EJ}; \\ \theta_B = \theta(6) &= \frac{1}{EJ} \left[ -8 + 6^2 - 12(6-4) \right] = \frac{4}{EJ}. \end{aligned}$$

Если  $E$  имеет размерность  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$ , а  $J - \text{см}^4$ , то, чтобы получить угол поворота в радианах, необходимо правую часть умножить на  $10^7$ . Тогда

$$\theta_C = \frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад}; \quad \theta_B = \frac{4 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад}.$$

Дифференцируя уравнение (10.110), получаем уравнение углов поворота на участке  $AC$ :

$$\theta(x) = \frac{1}{EJ} (-8 + x^2). \quad (10.112)$$

Углы поворота на границах этого участка нам уже известны. Таким образом, можно построить эпюру  $\theta^1$ .

На границах участка откладываем ординаты

$$\theta_A = \theta_0 = -\frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад} \quad \text{и} \quad \theta_C = \frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад}.$$

Вершины этих ординат в соответствии с уравнением (10.112) соединяем параболической кривой. Так как  $Q > 0$ , то парабола  $\theta$  должна быть обращена выпуклостью вниз (см. п. 5 на стр. 275). В точке  $A$  касательная к эпюре должна быть параллельна оси абсцисс (см. п. 1). Аналогично проводим построение на участке  $CB$ .

Для построения эпюры прогибов вычислим наибольший прогиб. Он имеет место в сечении, где  $\theta(x) = 0$ . Запишем это условие:

$$\theta(x_f) = \frac{1}{EJ} (-8 + x_f^2) = 0,$$

откуда

$$x_f = 2,83 \text{ м}.$$

В этой точке прогиб имеет экстремальное значение  $w_{\text{макс}} = f$ . Вычислим величину стрелы прогиба, подставив в выражение (10.110)  $x = x_f$ :

$$f = -\frac{2,83}{3EJ} (24 - 2,83^2) = -\frac{0,943 \cdot 16}{EJ} = -\frac{15,09}{EJ} \text{ м}.$$

$E$  и  $J$  имеют размерность  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$  и  $\text{см}^4$  соответственно. Поэтому, чтобы получить прогиб в сантиметрах, необходимо умножить правую часть на  $10^9$ :

$$f = -\frac{15,09}{EJ} \cdot 10^9 \text{ см}.$$

<sup>1</sup> На эпюрах  $\theta$  и  $w$  отложены ординаты, полученные после окончательного расчета;  $J = 7780 \text{ см}^4$ .

Для построения эпюры прогибов необходимо еще вычислить прогиб в точке  $C$ , являющейся точкой перегиба для эпюры прогибов (в этой точке на эпюре моментов меняется знак). Полагая в уравнении (10.110)  $x = 4$  м, получим:

$$\omega_C = \omega(4) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{(24 - 4^2)}{EJ} = -\frac{32}{3EJ} \text{ м,}$$

или

$$\omega_C = -\frac{10,6}{EJ} \cdot 10^9 \text{ см.}$$

Откладываем вычисленную ординату вниз от базисной линии. В соответствии с уравнениями (10.109) и (10.110) эпюра прогибов должна быть очерчена на обоих участках кубическими параболами. На участке  $AC$  момент  $M > 0$ , поэтому парабола обращена здесь вогнутостью вверх; на участке  $CB$  момент  $M < 0$  и парабола будет обращена вогнутостью вниз (п. 4).

Перейдем к подбору сечения балки из условия жесткости. Условие жесткости (10.106) принимает вид

$$f = \left| \frac{15,09}{EJ} \cdot 10^9 \right| \text{ см} \ll [f],$$

откуда

$$J \geq \frac{15,09}{[f] E} \cdot 10^9 \text{ см}^4.$$

При  $E = 2 \cdot 10^8$   $\kappa\Gamma/\text{см}^2$  и допускаемой стреле  $[f] = \frac{l}{600} = 1$  см необходим момент инерции

$$J = \frac{15,09 \cdot 10^9}{1 \cdot 2 \cdot 10^8} \text{ см}^4 = 7545 \text{ см}^4.$$

По каталогу сортамента (приложение 1) находим, что нужен двутавр № 30а, момент инерции которого  $J = 7780$   $\text{см}^4$ .

Необходимо проверить прочность выбранного двутавра № 30а, момент сопротивления которого  $W = 518$   $\text{см}^3$ . Вычисляем наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{800\,000}{518} = 1545 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} < [\sigma] = 1600 \kappa\Gamma/\text{см}^2.$$

Следовательно, прочность балки обеспечена.

**Расчет балок с промежуточным шарниром.** Полученные выше универсальные уравнения упругой линии и углов поворота были найдены из рассмотрения участка  $KL$  (рис. 280, б), на котором балка не имеет промежуточных шарниров, нарушающих плавность изогнутой оси. Поэтому, рассматривая всю балку в целом и оставляя общее для всех участков начало координат, применить эти уравнения к непосредственному определению перемещений на участке  $SF$  балки, расположенном правее шарнира  $S$ , нельзя. В этом случае определить перемещения можно, лишь рассматривая балку по частям (отдельно часть  $CS$  и отдельно —  $SF$ ).

Можно, однако, показать способ обобщения уравнений метода начальных параметров и для случая балки с промежуточным шарниром (рис. 280). С этой целью, записав дифференциальные уравнения для участков  $BS$  и  $SF$ , проинтегрируем их дважды:

для участка  $BS$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{л}; \quad (10.113)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{л}x + D_{л}; \quad (10.114)$$

для участка  $SF$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{пр}; \quad (10.115)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{пр}x + D_{пр}. \quad (10.116)$$

Вследствие наличия шарнира углы поворота слева и справа от точки  $S$  будут отличаться на некоторый угол  $\alpha$ . Для того чтобы установить связь между постоянными  $C_{л}$ ,  $D_{л}$  и  $C_{пр}$ ,  $D_{пр}$ , составим условия сопряжения участков в точке  $S$ :

$$w(s)_{л} = w(s)_{пр}; \quad (10.117)$$

$$\Theta(s)_{л} + \alpha = \Theta(s)_{пр}. \quad (10.118)$$

Подставляя в равенства (10.117) и (10.118) соответствующие значения  $w(s)$  и  $\Theta(s)$  из выражений (10.114), (10.116) и (10.113), (10.115), при  $x = s$  получим:

$$C_{л} + \alpha = C_{пр}; \quad (10.119)$$

$$C_{л}s + D_{л} = C_{пр}s + D_{пр}. \quad (10.120)$$

Из равенств (10.119) и (10.120) находим:

$$D_{пр} = -\alpha s + D_{л}. \quad (10.121)$$

Подставив равенство (10.119) и (10.121) в уравнения (10.115) и (10.116), сможем записать уравнения углов поворота и прогибов на участке  $SF$  в таком виде:

$$\Theta(x) = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{л} + \alpha; \quad (10.122)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{л}x + D_{л} + \alpha(x - s). \quad (10.123)$$

Так как было установлено, что левее шарнира  $S$  произвольные постоянные  $C$  и  $D$  на всех участках одинаковы и представляют собой соответственно угол поворота и прогиб в начале координат, заключаем, что для сечений правее шарнира в универсальное уравнение прогибов следует ввести дополнительный член  $\alpha(x - s)$ , а в уравнение углов поворота — член  $\alpha$ . Итак, при наличии шарнира слева

от рассматриваемого участка уравнение (10.92) для этого участка принимает вид

$$\begin{aligned} \omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \alpha(x-s) + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \right. \\ \left. + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \right. \\ \left. - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \right]. \end{aligned} \quad (10.124)$$

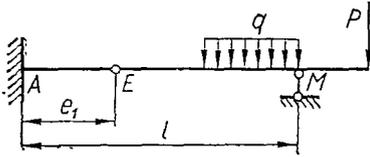


Рис. 284.

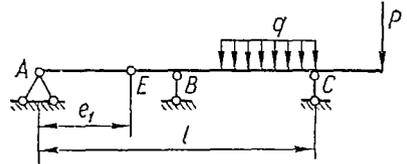


Рис. 285.

Взаимный угол наклона  $\alpha$  является дополнительной неизвестной величиной в универсальных уравнениях для  $\omega(x)$  и  $\Theta(x)$ . Как и начальные параметры  $\omega_0$  и  $\Theta_0$ , его определяют из опорных условий.

В зависимости от вида расчетной схемы балки возможны два основных варианта опорных условий:

1. Условие равенства нулю прогибов на правой опоре (рис. 284). Отсюда определяют только угол  $\alpha$ .

2. Условия равенства нулю прогибов на опорах B и C (рис. 285). Угол  $\alpha$  здесь определяется совместно с  $\Theta_0$  путем решения системы двух алгебраических уравнений.

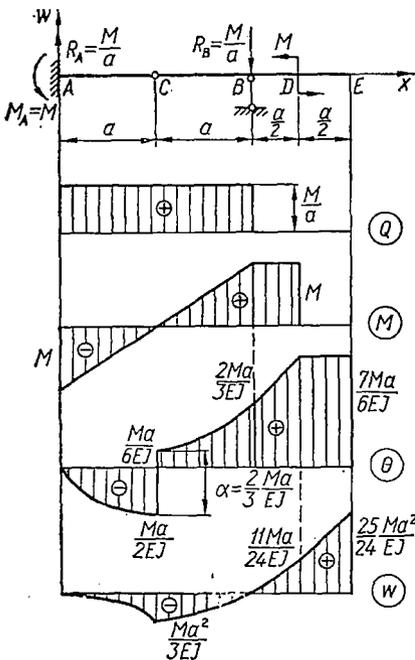


Рис. 286.

**Пример 44.** Для балки (рис. 286) построить эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $\theta$  и  $w$ ; подобрать двутавровое сечение из условий прочности и жесткости, если  $M = 16 \text{ T} \cdot \text{м}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ ,  $[f] = 10 \text{ мм}$ .

Вычислив опорные реакции  $M_A$ ,  $R_A$  и  $R_B$ , строим эпюры  $Q$  и  $M$ . Для построения эпюры  $\theta$  и  $w$  необходимо прежде всего вычислить их значения на границах всех участков.

Запишем универсальное уравнение упругой линии (10.124) для крайнего правого участка балки DE, учтя, что геометрические начальные параметры  $\Theta_0$  и  $\omega_0$  равны нулю. Получим:

$$\omega(x) = \alpha(x-a) + \frac{1}{EJ} \left[ -M_0 \frac{x^2}{2!} + R_A \frac{x^3}{3!} - R_B \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \left( \frac{x-\frac{5}{2}a}{2!} \right)^2 \right]. \quad (10.125)$$

Значение взаимного угла поворота сечений в шарнире  $C$  ( $\alpha_C$ ) — найдем из условия равенства нулю прогиба в сечении над правой опорой  $B$ :

$$\omega_B = \omega(2a) = 0.$$

Уравнение для прогиба в сечении  $B$  получим из выражения (10.125), вычеркнув последнее слагаемое и положив  $x = 2a$ :

$$\omega_B = \omega(2a) = \alpha a + \frac{1}{EJ} \left[ -M \frac{4a^2}{2} + \frac{M}{a} \cdot \frac{8a^3}{6} \right] = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{Ma}{EJ}. \quad (10.126)$$

Подставив выражение (10.126) в уравнение (10.125), получим окончательное уравнение упругой линии для участка балки  $DE$ :

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2}{3} Ma(x-a) - M \frac{x^2}{2!} + \frac{M}{a} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{M}{a} \cdot \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \frac{(x-2,5a)^2}{2!} \right]. \quad (10.127)$$

Из уравнения (10.127) можно получить уравнения для всех остальных участков.

Уравнения углов поворота для всех участков получим дифференцированием уравнений упругой линии на соответствующих участках.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно произвести все указанные вычисления и построить эпюры  $\theta$  и  $\omega$ . Для самоконтроля на рис. 286 приведены эпюры прогибов и углов поворота.

Перейдем к подбору сечения балки. Наибольший изгибающий момент  $M_{\max} = M = 16 T \cdot м$ . Из условия прочности

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1\,600\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}}{1600 \text{ кг/см}^2} = 1000 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 45, для которого

$$W = 1220 \text{ см}^3; J = 27\,450 \text{ см}^4.$$

Проверим, выполняется ли условие жесткости. Находим численное значение стрелы прогиба:

$$f = |\omega_E| = \frac{25}{24} \cdot \frac{Ma^2}{EJ} = \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 2^2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 \cdot 27\,450} \approx 1,22 \text{ см}.$$

Условие жесткости (10.106) не удовлетворяется:

$$f = 1,22 \text{ см} > [f] = 1 \text{ см}.$$

Следовательно, размеры поперечного сечения балки необходимо увеличить, исходя из условия жесткости:

$$f = \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 J_z} \leq [f] = 1 \text{ см}. \quad (10.128)$$

Из выражения (10.128) находим:

$$J_z \geq \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \text{ см}^4 \approx 33\,400 \text{ см}^4.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 50 ( $J = 39\,290 \text{ см}^4$ ).

## § 69. РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

До сих пор мы рассматривали расчет на изгиб стержней, сечение которых оставалось постоянным по длине. Такие стержни, особенно при значительной длине их, нельзя считать рациональными с точки зрения веса и расхода материала, так как размеры сечения подбираются по усилиям, действующим в опасном сечении, в остальных же сечениях получается весьма значительный избыток прочности. Кроме того, по конструктивным соображениям стержни, работающие на изгиб, часто имеют конусность, отверстия, выточки, ступеньки и т. д. В силу указанных причин на практике широко распространены стержни непостоянного по длине сечения.

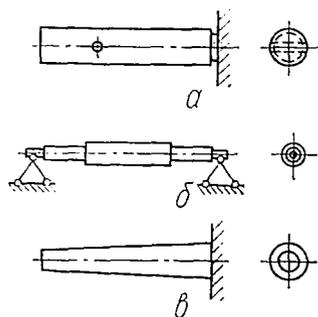


Рис. 287.

С точки зрения расчета на прочность и жесткость все такие стержни можно разделить на три основные группы:

а) стержни, имеющие местные изменения формы и размеров сечений (рис. 287, а):

б) стержни ступенчато-переменного сечения (рис. 287, б):

в) стержни, имеющие непрерывно изменяющиеся по длине размеры (иногда и форму) сечений (рис. 287, в).

Разумеется, есть много деталей, в которых сочетаются различные виды нарушения размеров и формы сечений. В этом случае при расчете на прочность и жесткость следует учитывать все особенности, присущие тому или иному виду нарушения формы и размеров. Перейдем к рассмотрению каждой группы в отдельности.

**Местные нарушения формы и размеров сечений.** Отверстия, выточки и прочие нарушения формы и размеров сечений вызывают резкое и значительное изменение картины распределения напряжений и деформаций. Однако это возмущение носит местный характер и на напряженное и деформированное состояние стержня в целом влияет незначительно. Поэтому, определяя прогибы и углы поворота сечений, отверстия и прочие нарушения вовсе не учитывают. При расчете на прочность касательные напряжения не принимают во внимание, а основное условие прочности записывают для опасной точки, расположенной в одном из ослабленных сечений, так как здесь может иметь место концентрация напряжений (§ 65). В зависимости от чувствительности материала к концентрации условия прочности будут иметь различный вид, а именно: для высокопластичных материалов (малоуглеродистых сталей, меди, алюминия) и хрупких неоднородных материалов (чугунов) концентрацию можно не учитывать и условие прочности записывать в обычном виде:

$$\frac{M}{W} \leq [\sigma]; \quad (10.129)$$

для однородных хрупких материалов (высокопрочных закаленных сталей)

$$\alpha \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (10.130)$$

где  $\alpha$  — теоретический коэффициент концентрации, определяемый по справочным таблицам (§ 65).

В обеих формулах  $W$  — это момент сопротивления ослабленного сечения.

**Пример 45.** Палец (неподвижная ось), изготовленный из легированной стали марки 20X ( $\sigma_T = 60 \text{ кг/мм}^2$ ), имеет размеры, указанные на рис. 288, а, и нагружен силой 400 кг. Посредине пальца есть отверстие диаметром 3 мм для смазки. Требуется проверить прочность, если коэффициент запаса прочности  $n_T = 1,6$ , и найти прогиб посредине. Расчетная схема пальца и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 288, б.

Опасным будет ослабленное сечение, в котором действует  $M = 400 \text{ кг} \cdot \text{см}$ . Опасной точкой, строго говоря, будет точка  $a$  (рис. 288, а), однако для расчета удобнее принять в качестве опасной условную точку  $b$ , что, очевидно, не внесет в расчет заметной погрешности.

Момент инерции ослабленного сечения

$$J = J_{\text{бр}} - J_{\text{отв}}$$

где

$$J_{\text{бр}} = \frac{\pi \cdot 1,5^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{0,8}{1,5} \right)^4 \right] = 0,228 \text{ см}^4;$$

$$J_{\text{отв}} = 2 \left[ \frac{0,3 \cdot 0,35^3}{12} + 0,3 \cdot 0,35 \cdot 0,575^2 \right] = 0,072 \text{ см}^4,$$

причем  $J_{\text{отв}}$  вычислено для двух прямоугольников размерами  $0,3 \times 0,35 \text{ см}$ . Таким образом,

$$J = 0,228 - 0,072 = 0,156 \text{ см}^4.$$

Тогда момент сопротивления для определения напряжений в точке  $b$

$$W = \frac{J}{0,750} = \frac{0,156}{0,750} = 0,208 \text{ см}^3.$$

При заданном запасе прочности допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{6000}{1,6} = 3750 \text{ кг/см}^2.$$

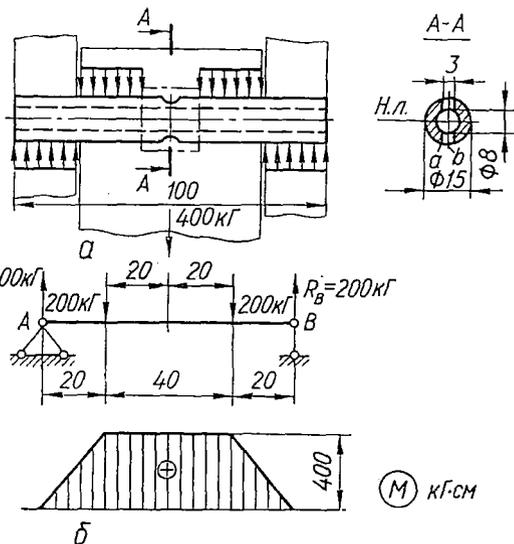


Рис. 288.

Вычислим номинальное напряжение в опасной точке  $b$ :

$$\sigma_{II} = \frac{M}{W} = \frac{400}{0,208} = 1920 \text{ кг/см}^2.$$

Так как рассматриваемая опасная точка находится возле конструктивного концентратора — отверстия для смазки, то наибольшее напряжение должно быть вычислено с учетом концентрации напряжений. Величину теоретического коэффициента концентрации  $\alpha$  находим по графику рис. 269, где при  $\frac{d}{D} = \frac{0,3}{1,5} = 0,2$  коэффициент  $\alpha = 1,87$ .

Вычислим максимальное напряжение и произведем проверку прочности:

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{II} = 1,87 \cdot 1920 = 3590 \text{ кг/см}^2 < 3750 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, прочность обеспечена.

Переходим к определению прогиба. Пользуясь универсальным уравнением упругой линии (10.92), для крайнего правого участка получаем:

$$\omega(x) = \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{200x^3}{6} - \frac{200(x-2)^3}{6} - \frac{200(x-6)^3}{6} \right].$$

Из условия, что прогиб на правой опоре ( $x = 8 \text{ см}$ ) равен нулю, получаем уравнение для определения начального параметра:

$$\theta_0 \cdot 8 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{200}{6} (8^3 - 6^3 - 2^3) = 0,$$

отсюда

$$\theta_0 = -\frac{1200}{EJ}.$$

Теперь для определения прогиба посредине пролета получаем выражение

$$\omega(4) = f = \theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{200}{6} (4^3 - 2^3),$$

откуда при  $E = 2,0 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$  и  $J = J_{\text{ср}} = 0,228 \text{ см}^4$  найдем:

$$f = \frac{-1200 \cdot 4 + 1867}{0,228 \cdot 2,0 \cdot 10^9} = -\frac{2933}{0,228 \cdot 2} \cdot 10^{-9} \text{ см} = -6,44 \cdot 10^{-3} \text{ см} = -0,0064 \text{ см},$$

т. е.

$$f = 0,064 \text{ мм} \text{ и } \frac{f}{l} = \frac{0,064}{80} = \frac{1}{1250}.$$

**Ступенчатые стержни.** В местах сопряжения участков с различными размерами сечений возникает концентрация напряжений. Если материал чувствителен к ней, то нужно применить условие прочности (10.130) ко всем сечениям на границах участков. Если же материал нечувствителен к концентрации напряжений, то нужно применить условие прочности (10.129) к нескольким вероятным опасным сечениям.

Для определения перемещений в ступенчатом стержне можно или пользоваться общими методами, изложенными ниже (гл. XIII), или применять видоизмененный метод начальных параметров. Суть последнего заключается в замене ступенчатого стержня эквивалентным ему по деформациям стержнем постоянной жесткости. Рассмотрим

обоснование такой замены на примере произвольной многоступенчатой балки (рис. 289, а). Расчленим балку на части постоянного сечения (рис. 289, б), приложив в местах разрезов соответствующие внутренние силовые факторы —  $Q$  и  $M$ .

Дифференциальное уравнение упругой линии для первой части имеет вид

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_1}. \quad (10.131)$$

Аналогично для всех последующих призматических частей

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_2}; \dots; \frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_n}. \quad (10.132)$$

Преобразуем заданную ступенчатую балку в эквивалентную балку постоянного сечения с моментом инерции  $J_0$ , равным моменту инерции одного из участков балки, например, первого. Умножив числитель и знаменатель правой части последнего дифференциального уравнения (10.132) для произвольного участка  $n$  на  $J_0$ , получим:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_n} \cdot \frac{J_0}{J_0} = \frac{M(x)}{EJ_0} \cdot \frac{J_0}{J_n} = \frac{M(x)}{EJ_0} \beta_n, \quad (10.133)$$

где  $\beta_n$  — коэффициент приведения.

Отсюда следует, что, умножив изгибающие моменты каждой части балки на соответствующие коэффициенты приведения и заменив момент инерции  $J_n$  моментом инерции  $J_0$ , получим балочки одинакового сечения с моментом инерции  $J_0$ , упругие линии которых тождественны упругим линиям соответствующих частей заданной ступенчатой балки.

Так как изгибающие моменты находятся в линейной зависимости от нагрузок, то для каждой части балки вместо умножения на коэф-

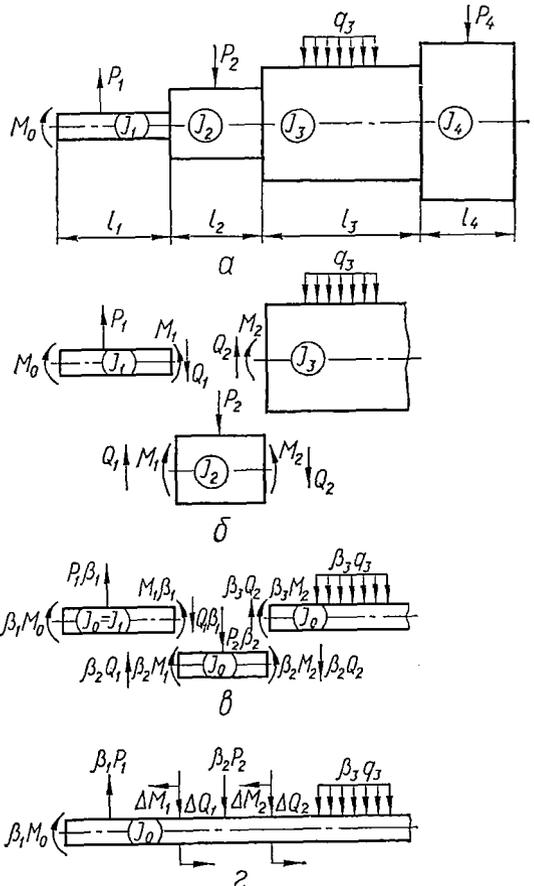


Рис. 289.

коэффициент приведения изгибающих моментов можно умножить на этот коэффициент все нагрузки этой части вместе с внутренними усилиями  $Q$  и  $M$  в торцевых сечениях (рис. 289, в).

Соединяя теперь отдельные разрезанные части, получаем эквивалентную балку постоянного сечения. Эта балка будет нагружена

приведенными внешними нагрузками (т. е. нагрузками, измененными в  $\beta_n$  раз), и, кроме того, в местах сопряжения частей балки будут действовать дополнительные силы  $\Delta Q$  и моменты  $\Delta M$ . Величина этих дополнительных нагрузок определяется разностью приведенных внутренних силовых факторов, приложенных к левой и правой сторонам сечения:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= Q_1(\beta_2 - \beta_1); \\ \Delta Q_2 &= Q_2(\beta_3 - \beta_2); \\ \Delta M_1 &= M_1(\beta_2 - \beta_1); \\ \Delta M_2 &= M_2(\beta_3 - \beta_2). \end{aligned} \quad (10.134)$$

Таким образом, получена эквивалентная балка (рис. 289, г), упругая линия которой полностью совпадает с упругой линией заданной ступенчатой балки. Для любого участка этой эквивалентной балки упругая линия определяется интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{M_{np}(x)}{EJ_0}, \quad (10.135)$$

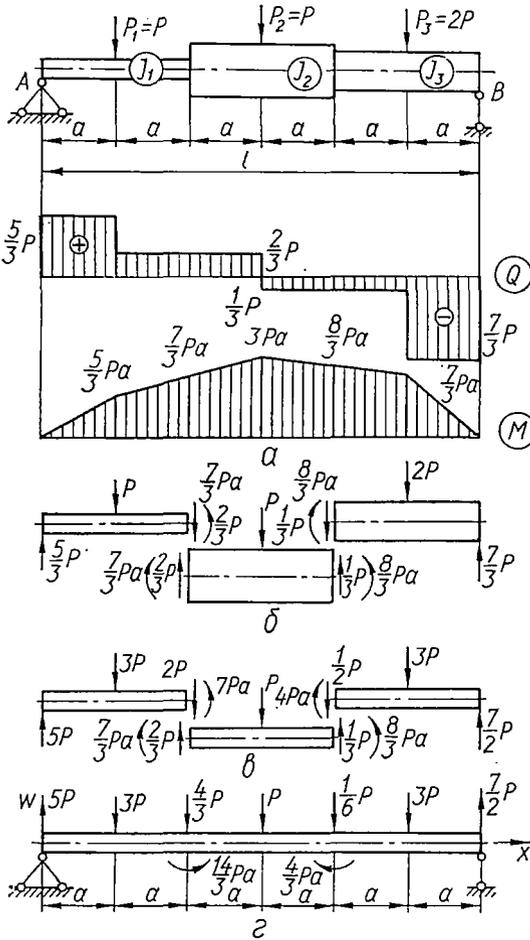


Рис. 290.

где  $M_{np}(x)$  — момент от приведенных внешних нагрузок и дополнительных нагрузок  $\Delta Q$  и  $\Delta M$ .

Для определения перемещений в полученной эквивалентной балке может быть использовано универсальное уравнение упругой линии (10.92).

**Пример 46.** Определить углы поворота опорных сечений и прогибы для трехступенчатой балки, лежащей на двух опорах (рис. 290, а). Отношение моментов инерции сечений отдельных ступеней балки  $J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 3 : 2$ .

Определяем опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Разрезаем балку на три части в местах сопряжения ступеней. На рис. 290, б изображены отдельные части балки, находящиеся под действием внешних сил и внутренних усилий  $Q$  и  $M$  в местах разрезов.

Приведем заданный ступенчатый брус к эквивалентному брусу постоянной жесткости с моментом инерции  $J_0$ , равным моменту инерции  $J_2$  сечения его средней части. Коэффициенты приведения следующие:

$$\beta_1 = \frac{J_0}{J_1} = \frac{3}{1} = 3; \quad \beta_2 = \frac{J_0}{J_2} = \frac{3}{3} = 1; \quad \beta_3 = \frac{J_0}{J_3} = \frac{3}{2}. \quad (10.136)$$

Умножаем на всех участках заданные нагрузки, а также  $Q$  и  $M$  в сечениях разрезов на соответствующие коэффициенты приведения  $\beta_n$ . Все три части с приложенными к ним приведенными нагрузками показаны на рис. 290, в. Теперь составим их в один брус постоянной жесткости  $EJ_0 = EJ_2$ , приложив в сечениях сопряжений добавочные силы  $\Delta Q_1, \Delta Q_2$  и добавочные моменты  $\Delta M_1$  и  $\Delta M_2$ .

Вычисляем добавочные силы:

$$\Delta Q_1 = \frac{2}{3} P - 2P = -\frac{4}{3} P, \text{ или } \Delta Q_1 = \frac{2}{3} P (1 - 3) = -\frac{4}{3} P;$$

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{3} P - \frac{1}{2} P = -\frac{1}{6} P, \text{ или } \Delta Q_2 = -\frac{1}{3} P \left( \frac{3}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{6} P.$$

Вычисляем добавочные моменты:

$$\Delta M_1 = \frac{7}{3} Pa - 7Pa = -\frac{14}{3} Pa, \text{ или } \Delta M_1 = \frac{7}{3} Pa (1 - 3) = -\frac{14}{3} Pa;$$

$$\Delta M_2 = 4Pa - \frac{8}{3} Pa = \frac{4}{3} Pa, \text{ или } \Delta M_2 = \frac{8}{3} Pa \left( \frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{4}{3} Pa.$$

Эквивалентная балка с приложенными к ней нагрузками изображена на рис. 290, г. Чтобы убедиться в правильности произведенных подсчетов загрузки эквивалентной балки, проверяем, соблюдены ли условия ее равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_{(A)} &= 3Pa + \frac{4}{3} P \cdot 2a + P \cdot 3a + \frac{1}{6} P \cdot 4a + 3P \cdot 5a - \frac{7}{2} P \cdot 6a - \\ &- \frac{14}{3} P \cdot a + \frac{4}{3} Pa = \left( 21 \frac{14}{3} - 21 \frac{14}{3} \right) P \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к определению перемещений при помощи метода начальных параметров. Возьмем сечение на крайнем правом участке и запишем для него уравнение упругой линии:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_2} \left[ -\frac{14}{3} Pa \frac{(x-2a)^2}{2} + \frac{4}{3} Pa \frac{(x-4a)^2}{2} + \right. \\ &+ 5P \frac{x^3}{6} - 3P \frac{(x-a)^3}{6} - \frac{4}{3} P \frac{(x-2a)^3}{6} - P \frac{(x-3a)^3}{6} - \\ &\left. - \frac{1}{6} P \frac{(x-4a)^3}{6} - 3P \frac{(x-5a)^3}{6} \right]. \quad (10.137) \end{aligned}$$

Начальные параметры находим из опорных условий: при  $x=0$   $\omega(0)=0$ , следовательно,  $\omega_0=0$ ; при  $x=l=6a$   $\omega(l)=0$ . Используем это условие для определения второго начального параметра  $\theta_0$ :

$$\begin{aligned} \omega(l) &= \theta_0 6a + \frac{1}{EJ_2} \left[ -\frac{14}{3} Pa \frac{(4a)^2}{2} + \frac{4}{3} Pa \frac{(2a)^2}{2} + 5P \frac{(6a)^3}{6} - \right. \\ &- 3P \frac{(5a)^3}{6} - \frac{4}{3} P \frac{(4a)^3}{6} - P \frac{(3a)^3}{6} - \frac{P}{6} \cdot \frac{(2a)^3}{6} - 3P \frac{a^3}{6} \left. \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\theta_0 = -10,58 \frac{Pa^2}{EJ_2}. \quad (10.138)$$

Для определения угла поворота  $\theta_B$  правого конца балки продифференцируем уравнение упругой линии (10.137) для крайнего правого участка балки ( $5a \leq x \leq 6a$ ) и в полученное таким образом уравнение для  $\theta(x)$  подставим  $x = l = 6a$ . Получим:

$$\begin{aligned} \theta_B = \theta(6a) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{14}{3} Pa(6a-2a) + \frac{4}{3} Pa(6a-4a) + \right. \\ \left. + 5P \frac{(6a)^2}{2} - 3P \frac{(6a-a)^2}{2} - \frac{4}{3} P \frac{(6a-2a)^2}{2} - P \frac{(6a-3a)^2}{2} - \right. \\ \left. - \frac{P}{6} \cdot \frac{(6a-4a)^2}{2} - 3P \frac{(6a-5a)^2}{2} \right], \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\theta_B = 8,92 \frac{Pa^2}{EJ_2}. \quad (10.139)$$

Определим, для примера, прогибы в местах приложения внешних нагрузок  $P_1$  и  $P_2$  (т. е. в сечениях  $x = a$  и  $x = 3a$ ).

При  $x = a$

$$w(a) = \theta_0 a + 5P \frac{a^3}{6EJ_2} = \left[ -\frac{10,58 + 0,83}{EJ_2} \right] Pa^3 = -\frac{9,75Pa^3}{EJ_2}.$$

При  $x = 3a$

$$\begin{aligned} w(3a) = \theta_0 3a - \frac{14}{3} \frac{Pa}{EJ_2} \cdot \frac{a^2}{2} + 5P \frac{(3a)^3}{6EJ_2} - 3P \frac{(2a)^3}{6EJ_2} - \\ - \frac{4}{3} P \frac{a^3}{6EJ_2} = (-10,58 \cdot 3 - 2,33 + 22,5 - 4 - 0,222) \frac{Pa^3}{EJ_2} = -\frac{15,80Pa^3}{EJ_2}. \end{aligned}$$

Определение линейных и угловых перемещений любых других сечений балки также не представляет каких-либо затруднений.

**Стержни с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений.** Если размеры сечения стержня непрерывным образом изменяются по длине, то формулы, полученные на основании гипотезы плоских поперечных сечений, становятся, вообще говоря, неверными (как и сама гипотеза). Однако некоторые точные решения теории упругости показывают, что в том случае, когда угол наклона образующей поверхности стержня к оси его невелик (не превышает  $15-20^\circ$ ), с достаточной для инженерной практики точностью можно принимать распределение нормальных напряжений по высоте сечения прямолинейным. Тогда, естественно, можно пользоваться обычным условием прочности и дифференциальным уравнением упругой линии, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} \leq [\sigma] \quad (10.140)$$

и

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.141)$$

Касательные же напряжения более чувствительны к наклону образующих поверхности стержня, поэтому формула Журавского в применении к стержням переменного сечения дает значительные погрешности.

Расчет на прочность и жесткость стержней переменного сечения осложняется тем обстоятельством, что момент сопротивления и момент инерции сечения являются функциями абсциссы  $x$  сечения. На это указывают и обозначения в формулах (10.140) и (10.141). Последнюю формулу можно записать в несколько измененном виде.

Обозначим через  $J_0$  момент инерции какого-либо сечения (обычно наибольшего или наименьшего) и введем понятие приведенного изгибающего момента

$$M_{\text{пр}}(x) = M(x) \frac{J_0}{J(x)}. \quad (10.142)$$

Тогда, умножив на  $J_0$  числитель и знаменатель правой части формулы (10.141), получим:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_{\text{пр}}(x)}{EJ_0}. \quad (10.143)$$

Эта формула по своему внешнему виду совпадает с формулой (10.135), но входящие в формулы величины  $M_{\text{пр}}(x)$  имеют разный смысл.

Частным случаем балок с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений являются балки *равного сопротивления изгибу*, во всех сечениях которых максимальное напряжение равно допускаемому, т. е.

$$\sigma_{\text{макс}}(x) = \frac{|M(x)|}{W(x)} = [\sigma].$$

Отсюда получают уравнение для определения размеров балки равного сопротивления:

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \quad (10.144)$$

Задавшись какой-либо формой сечения (причем таким образом, чтобы размеры его определялись только одним параметром), из уравнения (10.144) находим закон изменения этого параметра по длине балки. Тем самым определяем размеры всех сечений. Для нахождения перемещений можно пользоваться дифференциальным уравнением упругой линии (10.143).

Найдем форму консоли равного сопротивления изгибу. Сечение прямоугольное с постоянной шириной  $b$  и переменной высотой (рис. 291).

Обозначим высоту балки в произвольном сечении через  $h(x)$ . Тогда

$$W(x) = \frac{bh^2(x)}{6},$$

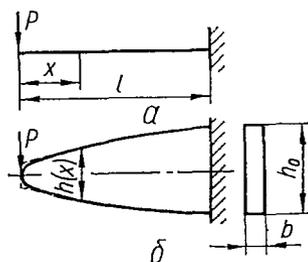


Рис. 291.

кроме того, очевидно,

$$|M(x)| = Px.$$

Поэтому согласно уравнению (10.144)

$$\frac{bh^2(x)}{6} = \frac{Px}{[\sigma]},$$

откуда

$$h(x) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \cdot \sqrt{x}.$$

Следовательно, высота рассматриваемой балки равного сопротивления будет изменяться по параболическому закону (рис. 291, б). При этом

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \cdot \sqrt{l}.$$

Заметим, что в окрестности концевое сечения ( $x = 0$ ) изгибающие моменты малы, поэтому высоту сечения следует определять из условия прочности по  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh} \leq [\tau],$$

откуда

$$h \geq \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

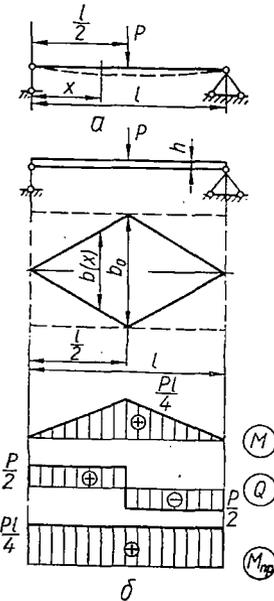


Рис. 292.

Построенная балка параболического очертания наиболее рациональна с точки зрения экономии материала, однако из-за сложности формы не удовлетворяет технологическим требованиям. Поэтому на практике применяют не балки равного сопротивления, а близкие к ним ступенчатые стержни.

Аналогично обстоит дело и в случаях двутаврового, круглого и других видов сечений. Есть один вид балок равного сопротивления с весьма простым очертанием, который получил широкое распространение в листовых рессорах, — это балки прямоугольного сечения с постоянной высотой  $h$  и переменной шириной  $b(x)$ .

Найдем форму балки равного сопротивления изгибу для схемы, показанной на рис. 292, а. Сечение балки прямоугольное с постоянной высотой  $h$  и переменной по длине шириной  $b(x)$ .

В силу симметрии для определения формы балки достаточно рассмотреть только левую половину пролета. Тогда

$$M(x) = \frac{P}{2} x; \quad W(x) = \frac{b(x)h^2}{6}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (10.144), получим

$$\frac{6Px}{2b(x)h^2} = [\sigma],$$

откуда

$$b(x) = \frac{3P}{h^2 [\sigma]} x.$$

Ширина сечения меняется по линейному закону, и, следовательно, балка имеет вид, представленный на рис. 292, б. Максимальная ширина  $b_0$  будет посередине пролета:

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^2 [\sigma]}.$$

Определим наибольший прогиб  $f$  этой балки. Согласно выражениям (10.142) и (10.143) имеем:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_{\text{пр}}(x)}{EJ_0},$$

где

$$M_{\text{пр}}(x) = M(x) \frac{J_0}{J(x)} = \frac{P}{2} x \frac{J_0}{J(x)}.$$

В данном случае

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}; \quad J(x) = \frac{b(x) h^3}{12},$$

так что

$$\frac{J_0}{J(x)} = \frac{b_0}{b(x)} = \frac{l}{2x}$$

и, значит,

$$M_{\text{пр}}(x) = \frac{P}{2} x \cdot \frac{l}{2x} = \frac{Pl}{4}.$$

На рис. 292, б показаны эпюры  $M$  и  $Q$ , а также эпюра приведенных изгибающих моментов.

Таким образом, дифференциальное уравнение упругой линии для левой половины пролета имеет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Дважды интегрируя его, получаем:

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \frac{1}{EJ_0} \left[ \frac{Pl}{4} x + C \right]; \\ w(x) &= \frac{1}{EJ_0} \left[ \frac{Pl}{8} x^2 + Cx + D \right]. \end{aligned}$$

Для нахождения постоянных  $C$  и  $D$  используем симметрию упругой линии (она показана штриховой линией на рис. 292, а):

$$w(0) = \Theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$C = -\frac{Pl^2}{8}; D = 0.$$

Тогда

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ_0} \left[ \frac{Pl}{8} x^2 - \frac{Pl^2}{8} x \right],$$

значит,

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EJ_0} \left( \frac{Pl}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right)$$

и, следовательно,

$$f = \left| \omega\left(\frac{l}{2}\right) \right| = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

Если бы балка имела постоянное сечение, то из условия прочности мы нашли бы, что она будет прямоугольного очертания в плане (балка с постоянной шириной  $b_0$  на рис. 292, б показана штриховым контуром). Для такой балки максимальный прогиб

$$f' = \frac{Pl^3}{48EJ_0}. \quad (10.145)$$

Таким образом, балка равного сопротивления имеет вдвое меньший вес, чем балка постоянного сечения, а максимальный прогиб ее в полтора раза больше, т. е.

$$f = 1,5f'. \quad (10.146)$$

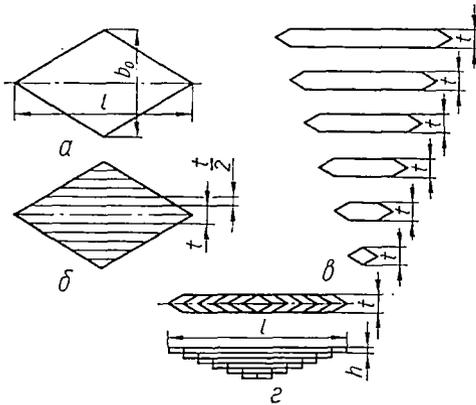


Рис. 293.

В заключение отметим, что у опор ширина сечения  $b$  должна быть определена из условия прочности по  $\tau_{\text{макс}}$ . Но размер  $b$  получается незначительным, и обычно прочность у концов обеспечивается конструктивным устройством, необходимым для опирания балки.

Расчет обычной листовой рессоры (рис. 293, г), состоящей из пакета листов, приводится к расчету только что

рассмотренной балки. Будем рассуждать следующим образом.

Разрежем балку равного сопротивления (рис. 293, а) на полосы, как показано на рис. 293, б, а затем сложим одинаковые полоски шириной  $\frac{l}{2}$ . В результате получим  $n$  полос шириной

$$t = \frac{b_0}{n},$$

изображенных на рис. 293, в. Сложив эти полосы вместе, получим представленную на рис. 293, г листовую рессору.

Если все листы соединить между собой (например сварить или склепать), то получится балка постоянной ширины  $t$  и переменной высоты сечения. В рессорах же листы не связаны друг с другом (хомуты, имеющиеся в рессорах, служат для того, чтобы рессора не рассыпалась) и имеют возможность свободно проскальзывать относительно друг друга. Кроме того, приближенно можно считать, что при деформации все полосы получают одинаковую кривизну. Тогда сумма полос, находящихся в рессоре, с точки зрения напряжений и деформаций будет эквивалентна сумме полос, показанных на рис. 293, б, т. е. балке равного сопротивления постоянной высоты и переменной ширины (рис. 293, а). Поэтому для такой рессоры условие прочности (учитывается, что  $b_0 = tn$ ) будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2tnh^2} \leq [\sigma], \quad (10.147)$$

а наибольший прогиб [см. равенство (10.146)]

$$f = 1,5f' = 1,5 \frac{Pl^3}{48EJ_0}, \quad (10.148)$$

где

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12} = \frac{tnh^3}{12}.$$

Для рессоры, показанной на рис. 294, а, соответствующая балка равного сопротивления имеет форму треугольника (рис. 294, б) и, очевидно,

$$f' = \frac{Pl^3}{3EJ_0};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6Pl}{tnh^2}.$$

Поэтому условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{tnh^2} \leq [\sigma], \quad (10.149)$$

а

$$f = 1,5 \frac{Pl^3}{3EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}. \quad (10.150)$$

Заметим, что рессоры изготавливают из высокопрочных сталей, так что обычно величина  $[\sigma]$  достигает  $4000 \text{ кг/см}^2$  и выше. Что касается прогиба рессор, то на практике (главным образом из-за трения между листами) он получается несколько меньше, чем у соответствующей балки равного сопротивления, поэтому в формулах (10.148) и (10.150) вместо коэффициента 1,5 принимают  $\beta = 1,25 \div 1,40$ .

*Пример 47.* Рессора (рис. 292, 293) длиной 100 см, состоящая из семи полос сечением  $60 \times 8 \text{ мм}$ , нагружена силой  $P = 750 \text{ кг}$ . Требуется проверить прочность рессоры ( $[\sigma] = 4500 \text{ кг/см}^2$ ) и найти максимальный прогиб.

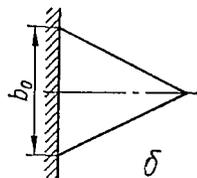
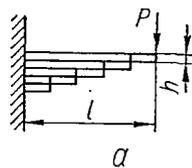


Рис. 294.

В данном случае  $h = 0,8$  см;  $t = 6$  см;  $l = 100$  см;  $P = 750$  кг;  $n = 7$ . Тогда

$$J_0 = \frac{tnh^3}{12} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 0,8^3}{12} = 1,79 \text{ см}^4.$$

По условию прочности (10.147)

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{3Pl}{2tnh^2} = \frac{3 \cdot 750 \cdot 100}{2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 0,8^2} = 4180 \text{ кг/см}^2 < 4500 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, рессора прочная.

Далее, пользуясь формулой (10.148) и заменяя в ней коэффициент 1,5 на  $\beta$ , находим:

$$f = \beta \frac{Pl^3}{48EJ_0} = (1,25 \div 1,40) \frac{750 \cdot 100^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,79} = \\ = (1,25 \div 1,40) 4,16 = 5,2 \div 5,8 \text{ см},$$

т. е. наибольший прогиб лежит в пределах 52 — 58 мм.

В заключение отметим, что приведенный выше способ расчета листовых рессор в известной мере условен, так как:

- 1) не учитывает трения между листами рессоры;
- 2) в действительности листы рессоры соприкасаются друг с другом не всюду, а только в отдельных точках, вследствие чего кривизна листов при деформации неодинакова, а значит, и напряжения в них различны.

## § 70. РАСЧЕТ НА ДЕЙСТВИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Расчет на изгиб с учетом сил инерции приходится проводить в том случае, когда элементы конструкций в процессе эксплуатации испытывают большие ускорения, вызывающие значительные инерционные усилия. Классическим примером деталей, прочные размеры которых следует выбирать из условия расчета на изгиб с учетом сил инерции, являются спарники паровозов и шатуны двигателей.

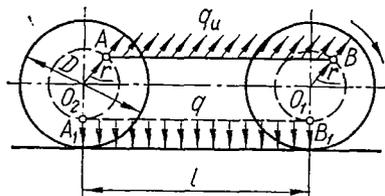


Рис. 295.

Рассмотрим спарник  $AB$  (рис. 295), соединяющий две оси паровоза, одна из которых ( $O_1$ ) является ведущей и на нее передается вращающий момент от машины паровоза. В точках  $A$  и  $B$  спарник присоединен к колесам при помощи цилиндрических шарниров; расстояния  $AO_2$  и  $BO_1$  равны радиусу кривошипа  $r$ , диаметр колеса  $D$ , длина спарника  $l$ ; паровоз движется с постоянной скоростью  $v$ .

Участвуя в переносном движении вместе с паровозом с постоянной скоростью  $v$ , спарник, не имея ускорений, не будет испытывать инерционных усилий. Ускорение он будет иметь только в процессе относительного движения. Так как в этом движении точки  $A$  и  $B$  спарника перемещаются одинаково, описывая в одной плоскости окружности радиуса  $r$ , то это движение будет плоским и поступательным. Следовательно, все точки спарника будут иметь те же скорости и ускорения, что и точки  $A$  и  $B$ .

Участвуя в переносном движении вместе с паровозом с постоянной скоростью  $v$ , спарник, не имея ускорений, не будет испытывать инерционных усилий. Ускорение он будет иметь только в процессе относительного движения. Так как в этом движении точки  $A$  и  $B$  спарника перемещаются одинаково, описывая в одной плоскости окружности радиуса  $r$ , то это движение будет плоским и поступательным. Следовательно, все точки спарника будут иметь те же скорости и ускорения, что и точки  $A$  и  $B$ .

Точка  $A$  движется вместе со вторым колесом, описывая окружность радиуса  $r$ . При постоянной скорости движения паровоза угловая скорость вращения колеса  $\omega$  будет постоянной. Следовательно, тангенциальное ускорение точки  $A$  равно нулю, а центростремительное ускорение  $\omega_n$ , направленное от точки  $A$  к точке  $O_2$ , равно  $\omega^2 r$ . Любой элемент спарника будет испытывать такое же ускорение, направленное параллельно  $O_2 A$ .

Определяя изгибающие моменты в спарнике, необходимо к равномерно распределенным силам инерции, интенсивность которых

$$q_{ин} = \frac{\gamma F}{g} \omega_n = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

прибавить собственный вес его. При этом наиболее опасным положением спарника, очевидно, будет крайнее нижнее, т. е. положение, в котором нагрузка от сил инерции будет суммироваться с нагрузкой от собственного веса. Тогда полная нагрузка  $q$  на единицу длины спарника

$$q = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r = \gamma F \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

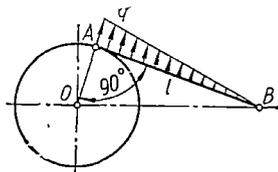


Рис. 296.

При выборе расчетной схемы спарник в данном случае надо рассматривать как балку, шарнирно опертую в точках  $A$  и  $B$  и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

Наибольший изгибающий момент будет, как известно, посредине пролета:

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right),$$

а наибольшее напряжение в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W} \cdot \frac{\gamma l^2}{8} \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

Кроме инерционных нагрузок и собственного веса, вызывающих изгиб, спарник при работе подвергается действию осевой силы, которая также должна быть учтена в расчете на прочность. Условие прочности при совместном действии изгиба и осевой силы приведено в гл. XIX.

Подобным же образом может быть выполнен и расчет шатуна (рис. 296), шарнирно скрепленного в точке  $A$  с кривошипом  $OA$ , вращающимся вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ .

Если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью, то точка  $A$  шатуна испытывает только центростремительное, а точка  $B$  — только тангенциальное ускорение. Все промежуточные точки шатуна, расположенные между  $A$  и  $B$ , имеют и то и другое ускорения. Ограничимся учетом только центростремительного ускорения.

При таком положении, когда кривошип составляет с шатуном угол  $90^\circ$ , направление центростремительного ускорения будет перпендикулярно к оси шатуна. Естественно предположить, что центробежные

силы инерции будут везде перпендикулярны к оси шатуна и по длине его меняются от  $q = q_{\text{макс}}$  в точке  $A$  до  $q = 0$  в точке  $B$ . Это предположение будет тем ближе к истине, чем больше длина шатуна по сравнению с длиной кривошипа.

Составляя расчетную схему, шатун следует рассматривать как балку  $AB$  на двух шарнирных опорах  $A$  и  $B$  с нагрузкой, распределенной по закону треугольника. Максимальный изгибающий момент, как известно, будет в сечении на расстоянии  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$  от точки  $B$ :

$$M_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{9\sqrt{3}},$$

а максимальное напряжение

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W}.$$

Учитывая, что

$$q_{\text{макс}} = \frac{F\gamma}{g} \omega^2 r,$$

найдем:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{9\sqrt{3}W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3}W}.$$

Заметим, что в рассмотренных случаях, определяя напряжения в спарнике и в шатуне, мы из всех возможных положений, непрерывно меняющихся в процессе эксплуатации, выбирали положение рассчитываемого элемента, соответствующее опасному положению.

Помимо нормальных напряжений, вызванных изгибом, при расчете шатуна на прочность следует учитывать также и действие осевой силы (см. гл. XIX).

## Глава XI

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА

#### § 71. О РАСЧЕТЕ СОСТАВНЫХ БАЛОК

В строительной практике, а также в самолетостроении, судостроении и т. д. встречаются балки, однородные в отношении материала, но не представляющие собой монолитного стержня. Это, главным образом, сварные (рис. 297) и клепаные (рис. 298) балки двутаврового сечения. Такие балки состоят из трех основных частей: двух поясов и стенки. Стенка 1 представляет собой вертикальный лист (рис. 297 и 298). Пояса 2 сварной балки (рис. 297) — это горизонтальные листы большей по сравнению со стенкой толщины. Пояс клепаной балки в свою очередь состоит из нескольких деталей — поясного листа 2 и поясных уголков 3 (рис. 298).

Отдельные части составной балки скрепляют в одно целое при помощи соединительных элементов. Соединительным элементом сварной балки есть сварной шов 3 (рис. 297). В клепаной балке соединительными элементами являются поясные заклепки 4, а также заклепки 5, соединяющие поясные листы с поясными уголками (рис. 298).

При расчете на прочность составных балок нужно удовлетворить следующим требованиям:

1. Сечение в целом должно иметь необходимую прочность.
2. Листы поясов, а особенно стенки составных балок представляют собой тонкостенные элементы и способны при сжатии (пояса) или при сдвиге (стенки) терять устойчивость, коробиться. Чем меньше толщина листов и чем больше длина свисающей части  $c$  поясных листов, тем

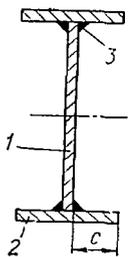


Рис. 297.

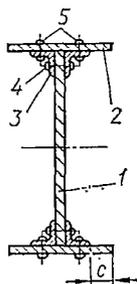


Рис. 298.

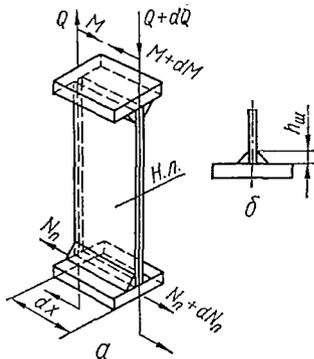


Рис. 299.

меньшую нагрузку может выдержать балка без опасности коробления листов. Поэтому необходимо ограничивать величину  $c$  (рис. 297 и 298) и не принимать для листов слишком малую толщину. Чтобы предотвратить потерю устойчивости стенки, ставят уголки или ребра жесткости.

3. Соединительные элементы должны обладать достаточной прочностью.

Первый вопрос решается методами, изложенными в предыдущей главе, и сводится к расчету сечения по  $\sigma_{\text{макс}}$ , к определению толщины стенки из расчета по  $\tau_{\text{макс}}$  и, в ряде случаев, к проверке сечения по теориям прочности в месте перехода стенки в полку.

Второй вопрос, как и вообще подробный расчет составных балок, излагается в специальных курсах (например в курсе металлических конструкций). Здесь же мы остановимся только на расчете соединительных элементов.

Двумя близкими сечениями выделим элемент  $dx$  сварной балки (рис. 299,  $a$ ). Пусть в левом сечении поперечная сила и изгибающий момент равны  $Q$  и  $M$ , а в правом —  $Q + dQ$  и  $M + dM$ . Тогда по формуле (10.18) нормальное усилие в левом сечении пояса

$$N_n = \frac{MS_n}{J},$$

где  $S_n$  — статический момент пояса относительно нейтральной линии сечения.

В правом сечении пояса

$$N_{\text{п}} + dN_{\text{п}} = \frac{(M + dM) S_{\text{п}}}{J}.$$

Нормальные усилия в правом и левом сечениях пояса будут отличаться на величину

$$dN_{\text{п}} = \frac{dMS_{\text{п}}}{J}.$$

Усилие  $dN_{\text{п}}$  стремится сдвинуть пояс относительно стенки, в результате чего сварные швы, прикрепляющие пояс к стенке (их два), работают на срез как фланговые швы. Условие прочности для них имеет вид (§ 52)

$$\tau = \frac{dN_{\text{п}}}{dF_{\text{ср}}} \leq [\tau_{\text{с}}].$$

Если обозначить через  $h_{\text{ш}}$  катет шва (рис. 299, б), то площадь среза

$$dF_{\text{ср}} = 2 \cdot 0,7h_{\text{ш}} dx.$$

Тогда касательное напряжение в опасном сечении шва

$$\tau = \frac{dN_{\text{п}}}{dF_{\text{ср}}} = \frac{S_{\text{п}}}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}J} \cdot \frac{dM}{dx}.$$

Но  $\frac{dM}{dx} = Q$ , поэтому окончательно условие прочности для шва примет следующий вид:

$$\tau = \frac{QS_{\text{п}}}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}} \leq [\tau_{\text{с}}]. \quad (11.1)$$

Заметим, что найденная выше разность усилий в двух сечениях пояса относится к тому случаю, когда расстояние между этими сечениями равно  $dx$ . На единицу же длины пояса нормальное усилие получает приращение

$$q_l = \frac{dN_{\text{п}}}{dx} = \frac{dMS_{\text{п}}}{dxJ} \text{ кг/см},$$

или

$$q_l = \frac{QS_{\text{п}}}{J}. \quad (11.2)$$

Часто применяют не сплошные, а прерывистые (шпоночные) швы (рис. 300). Рассмотрим шпоночное сварное соединение.

На рис. 300  $l_{\text{ш}}$  — длина шпонки,  $a$  — шаг шва. Расчетная длина шпонки с учетом непровара будет  $l_{\text{ш}} - 1$  см. На участке  $AB$  длиной  $a$  в поясе развивается разность нормальных усилий

$$\Delta N_{\text{п}} = q_l a = \frac{QS_{\text{п}} a}{J}. \quad (11.3)$$

Рассчитывая шпонку на это усилие, получим:

$$\tau = \frac{QS_{\text{п}}a}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}(l_{\text{ш}} - 1)J} \leq [\tau_{\text{э}}]. \quad (11.4)$$

В клепаной балке (рис. 301) усилие  $\Delta N_{\text{п}}$  воспринимается поясной заклепкой I. Эта заклепка должна быть рассчитана на срез и смятие. Поскольку заклепка двусрезная, площадь среза  $F_{\text{ср}} = 2 \frac{\pi d^2}{4}$ . Расчетная площадь смятия  $F_{\text{см}} = t_{\text{ст}} d$  или  $F_{\text{см}} = 2t_{\text{уг}} d$ . Обычно толщина стенки  $t_{\text{ст}}$  меньше удвоенной толщины полки уголка. Поэтому будем считать  $F_{\text{см}} = t_{\text{ст}} d$ .

Условия прочности на срез и смятие для поясных заклепок имеют вид

$$\tau = \frac{\Delta N_{\text{п}}}{F_{\text{ср}}} = \frac{QS_{\text{п}}a}{2 \frac{\pi d^2}{4} J} \leq [\tau]; \quad (11.5)$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{\Delta N_{\text{п}}}{F_{\text{см}}} = \frac{QS_{\text{п}}a}{t_{\text{ст}} d J} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (11.6)$$

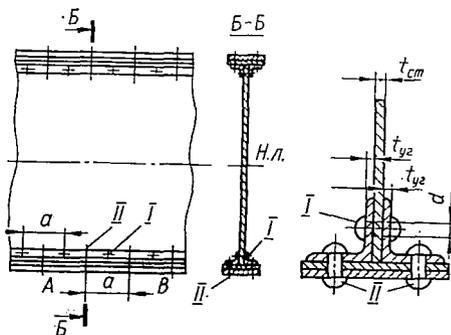


Рис. 301.

Заклепки II, соединяющие поясные листы с уголками, расчету не подлежат, так как они имеют те же диаметр  $d$  и шаг  $a$ , что и поясные, а нагрузка на них меньше, поскольку в формуле (11.3) вместо  $S_{\text{п}}$  для них нужно принимать  $S'_{\text{п}} = S_{\text{п}} - S_{\text{уг}}$ , где  $S_{\text{уг}}$  — статический момент уголков.

## § 72. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ. ЦЕНТР ИЗГИБА

Допущения, положенные в основу вывода формулы (10.20), в достаточной мере соответствуют действительности, если ширина сечения  $b$  мала по сравнению с высотой (размером, перпендикулярным к нейтральной линии сечения). Так, во всех сечениях, показанных на рис. 302, ширина  $mn$  мала по сравнению с  $h$ . В этих

случаях формула (10.20) дает верные результаты.

Если сечение представляет собой тонкостенный профиль (рис. 302, в, г, д), то в полках ширина сечения  $m_1 n_1$  значительна и картина распределения касательных напряжений здесь существенно меняется: они не только переменны вдоль средней линии полки  $m_1 n_1$ , но и направление их становится не параллельным, а перпендикулярным к усилию  $Q$ .

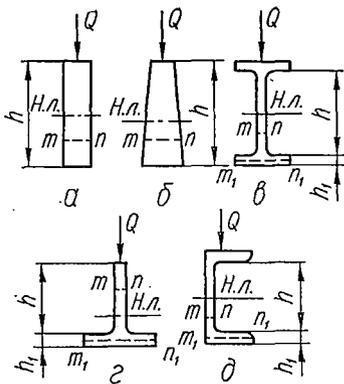


Рис. 302.

Заметим, что в полках будут действовать и касательные напряжения, параллельные  $Q$ . Однако эти напряжения настолько малы по сравнению с касательными напряжениями, параллельными средней линии полки (будем обозначать их  $\tau_n$ ), что их можно совсем не принимать во внимание.

Получим формулу для вычисления касательных напряжений  $\tau_n$  в полках тонкостенных профилей.

Для определенности проведем вывод на примере балки двутаврового сечения. На рис. 303, а показана балка, ее схема и эпюры  $Q$  и  $M$ . Двумя близкими поперечными сечениями  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  выделим элемент балки длиной  $dx$  (рис. 303, б).

Проведем в сечении балки  $A_1B_1D_1E_1$  в нижней полке линию  $m_1n_1$  на произвольном расстоянии  $z$  от оси  $y$ . В точках этой линии будут действовать  $\sigma$  и  $\tau_n$ . Сейчас нас интересуют лишь касательные напряжения  $\tau_n$ .

Учитывая, что полка узкая ( $t$  мало по сравнению с  $b$ ), примем следующие допущения:

- 1) во всех точках линии  $m_1n_1$  касательные напряжения одинаковы, т. е.  $\tau_n$  постоянны по толщине полки и зависят только от расстояния  $z$  до вертикальной оси;
- 2) всюду в полке  $\tau_n$  параллельны средней линии полки.

Отсечем часть элемента балки, проведя через  $m_1n_1$  вертикальную плоскость, параллельную оси балки (рис. 303, б и в), и рассмотрим только те напряжения, которые действуют в гранях отсеченной части полки и дают усилия, проектирующиеся на ось  $x$ .

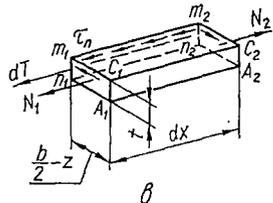
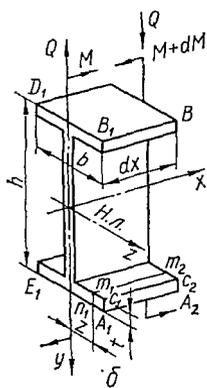
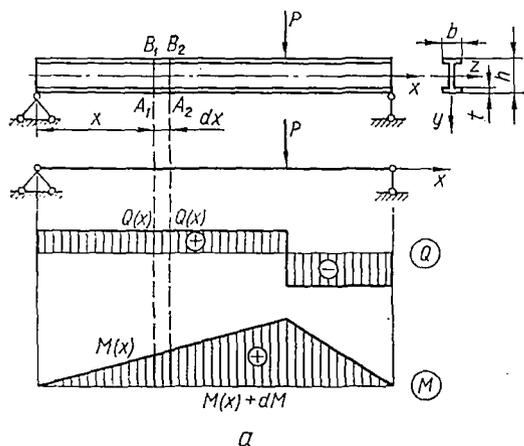


Рис. 303.

Нормальные напряжения приводятся к усилию  $N_1$ . Согласно формуле (10.18)

$$N_1 = \frac{M(x) S(z)}{J_z}.$$

Здесь

$$S(z) = \left(\frac{b}{2} - z\right) t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right), \quad (11.7)$$

т. е.  $S(z)$  — статический момент площади  $A_1 C_1 m_1 n_1$  относительно нейтральной линии. Он является функцией оси  $z$ .

В грани  $A_2 C_2 m_2 n_2$  нормальные напряжения приводятся к усилию

$$N_2 = \frac{[M(x) + dM] S(z)}{J_z},$$

причем, очевидно, величина  $S(z)$  будет такой же, как и для первого сечения.

В грани  $n_1 m_1 m_2 n_2$  согласно закону парности касательных напряжений возникнут напряжения

$$\tau' = \tau_n.$$

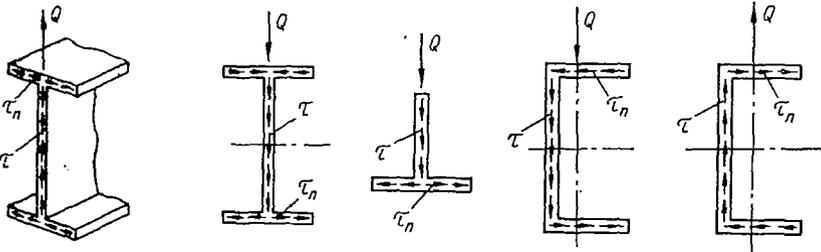


Рис. 304.

В силу первого допущения  $\tau'$  считаем равномерно распределенными по толщине полки  $t$ , а в силу малости размера  $n_1 n_2 = m_1 m_2 = dx$  можно считать, что  $\tau'$  распределены равномерно и по длине  $dx$  грани  $n_1 m_1 m_2 n_2$ . Площадь этой грани равна  $t dx$ , поэтому действующие в ней касательные напряжения приводятся к усилию

$$dT = \tau' t dx = \tau_n t dx.$$

Направление  $\tau'$  должно быть таким, чтобы усилие  $dT$  уравновесило разность

$$dN = N_2 - N_1 = \frac{[M(x) + dM] S(z)}{J_z} - \frac{M(x) S(z)}{J_z} = \frac{dM \cdot S(z)}{J_z}.$$

Если в уравнение равновесия

$$\sum X = dT - dN = 0$$

подставим выражение для  $dT$  и  $dN$ , то получим:

$$\tau_n t dx = \frac{dM \cdot S(z)}{J_z}.$$

Разделив последнее равенство на  $t dx$  и имея в виду, что  $\frac{dM}{dx} = Q$ , получим:

$$\boxed{\tau_n = \frac{QS(z)}{J_z t}}. \quad (11.8)$$

Напряжения  $\tau_n$  всегда образуют единый поток с касательными напряжениями  $\tau$  в стенке профиля (рис. 304). Последние же определяются по формуле Журавского и направлены в сторону  $Q$ .

Формула (11.8) для касательных напряжений  $\tau_n$  в полках и формула (10.20) для касательных напряжений  $\tau$  в стенке дают возможность вычислить касательные напряжения в любой точке тонкостенного профиля и построить полную эпюру касательных напряжений. При этом обычно пренебрегают уклоном полок в двутаврах и швеллерах и считают, что полка имеет постоянную, указанную в сортаменте толщину  $t$ . Кроме того, пренебрегая закруглениями, эпюру  $\tau$  доводят до полок, а эпюру  $\tau_n$ , пренебрегая наличием стенки, — до оси профиля.

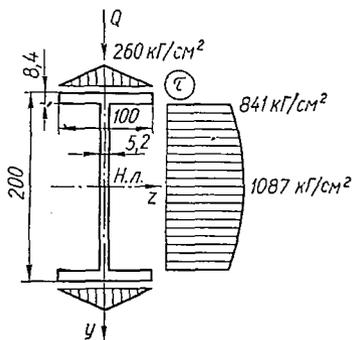


Рис. 305.

*Пример 48.* Построить полную эпюру касательных напряжений для сечения двутавровой балки (№ 20), в котором действует поперечная сила  $Q = 10\,000$  кг. Схема профиля показана на рис. 305.

По сортаменту находим, что  $J = 1840$  см<sup>4</sup>;  $S = 104$  см<sup>3</sup>, и вычисляем статический момент полки относительно нейтральной линии:

$$S_{\text{полки}} = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 0,84 \left( \frac{20}{2} - \frac{0,84}{2} \right) = 80,47 \text{ см}^3.$$

Тогда касательные напряжения в месте соединения стенки с полкой

$$\tau_1 = \frac{QS_{\text{полки}}}{Jd} = \frac{10\,000 \cdot 80,47}{1840 \cdot 0,52} = 841 \text{ кг/см}^2$$

и наибольшие касательные напряжения в точках нейтральной линии

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{QS}{Jd} = \frac{10\,000 \cdot 104}{1840 \cdot 0,52} = 1087 \text{ кг/см}^2.$$

По этим данным строим параболическую эпюру  $\tau$  для стенки.

Для построения эпюры касательных напряжений  $\tau_n$  в полках двутавра обратим внимание на то, что согласно выражениям (11.7) и (11.8)

$$\tau_n = \frac{Q}{J} \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \left( \frac{b}{2} - z \right).$$

Координата  $z$  точки, где определяется  $\tau_n$ , входит в это выражение в первой степени, значит, эпюра  $\tau_n$  будет прямолинейной.

Непосредственные вычисления будем вести по формуле (11.8). Для края полки  $S \left( \frac{b}{2} \right) = 0$ , а значит,  $\tau_n = 0$ . Для середины полки ( $z = 0$ )

$$S(0) = \frac{1}{2} S_{\text{полки}} = 40,2 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{n\text{макс}} = \frac{Q \frac{1}{2} S_{\text{полки}}}{Jt} = \frac{10\,000 \cdot 40,2}{1840 \cdot 0,84} = 260 \text{ кг/см}^2.$$

По этим данным строим треугольную эпюру  $\tau_n$  на правой половине полки. На ее левой половине эпюра будет симметричной, так как статические моменты по абсолютной величине там будут такими же, как и на правой половине полки. Очевидно, такой же вид будет иметь эпюра  $\tau_n$  и для нижней полки.

Наличие касательных напряжений в полках тонкостенных профилей приводит к тому, что в крайних волокнах балки, где действуют наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_{\max}$ , напряженное состояние будет плоским, а не линейным (рис. 306). Поэтому в таких балках вероятной опасной точкой будет не произвольная точка крайних волокон, а та точка, где  $\tau_n = \tau_{n\max}$ . Условие прочности для этих балок следовало бы писать не в обычном виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (11.9)$$

а с использованием теорий прочности, что имеет смысл для нестандартных профилей, особенно при наличии широкой полки.

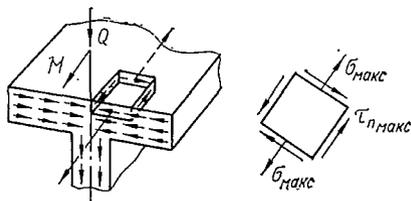


Рис. 306.

Касательные напряжения в полках тонкостенных профилей могут существенно изменить характер напряженного состояния стержня и вид его деформации.

Если сечение имеет две оси симметрии и силовая плоскость проходит через одну из них (например у двутавра), то в нем возникают касательные напряжения, показанные на рис. 307, а (см. также рис. 306). Эти напряжения дают равнодействующее усилия  $T_{ст}$  и  $T_n$  (рис. 307, б). В силу симметрии полок относительно вертикальной оси усилия  $T_n$  взаимно уравновешиваются на каждой полке.

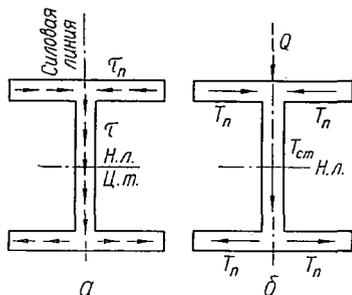


Рис. 307.

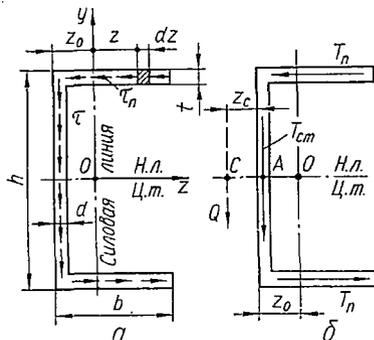


Рис. 308.

Иначе обстоит дело в том случае, когда главная центральная ось сечения, перпендикулярная к нейтральной линии, не является осью симметрии (рис. 308). Касательные напряжения в стенке и полках здесь приводятся к усилиям  $T_{ст}$  и  $T_n$ , показанным на рис. 308, б (как и раньше, вертикальными касательными напряжениями в полках пренебрегаем). Поперечная сила  $Q$ , являющаяся равнодействующей этих усилий,

$$Q = T_{ст},$$

очевидно, будет направлена вертикально вниз, но она уже не будет проходить через центр тяжести сечения, так как две силы  $T_n$  дают еще

и пару сил. Сила  $Q$  сместится на некоторое расстояние  $z_C$  (рис. 308, б), пересекая нейтральную линию в точке  $C$ .

Чтобы найти  $z_C$ , воспользуемся тем, что момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов составляющих относительно этой же точки. Будем вычислять моменты относительно точки  $A$  пересечения оси симметрии со средней линией стенки. Тогда получим:

$$\sum M_A = Q \left( z_C + \frac{d}{2} \right) - T_n (h - t) = 0,$$

откуда

$$z_C = \frac{T_n}{Q} (h - t) - \frac{d}{2}.$$

Эта формула не дает еще окончательного ответа на вопрос о положении точки  $C$ , поскольку она выражает координату  $z_C$  не только через геометрические, но также и через силовые факторы. Чтобы исключить последние, вычислим усилие  $T_n$ .

На элемент полки  $dz$  (рис. 308, а) действует элементарное усилие  $dT_n = \tau_n t dz$ . Следовательно,

$$T_n = t \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} \tau_n dz.$$

Пользуясь выражением (11.8)

$$\tau_n = \frac{QS(z)}{Jt}$$

и учитывая, что

$$S(z) = (b - z_0 - z) t \frac{h-t}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} T_n &= Q \frac{t(h-t)}{2J} \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} (b - z_0 - z) dz = \\ &= -Q \frac{t(h-t)}{4J} (b - z_0 - z)^2 \Big|_{-(z_0-d)}^{b-z_0} = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J}. \end{aligned}$$

Внеся последний результат в формулу для  $z_C$ , получим окончательно:

$$z_C = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}. \quad (11.10)$$

Выясним теперь, какое значение имеет смещение равнодействующей  $Q$  относительно центра тяжести сечения. Для наглядности рассмотрим один из простейших случаев, когда на консоль швеллерного сечения действует вертикальная нагрузка  $P$  (рис. 309, а), причем силовая плоскость совпадает с одной из двух главных плоскостей стержня (плоскостью  $xy$ ). Эта нагрузка вызывает в сечениях балки переменные по длине изгибающие моменты  $M(x) = Px$ . В свою очередь,

переменность последних приводит к тому, что в сечениях появляются касательные напряжения:  $\tau$  — в стенке и  $\tau_n$  — в полках. Поперечная сила  $Q(x) = P$  (рис. 309, б), являющаяся равнодействующей касательных усилий, в любом сечении смещена относительно геометрической оси стержня (оси  $x$ ) на одно и то же расстояние  $z_0 + z_c$ .

Таким образом, участок балки, заключенный между концевым и произвольным сечениями (рис. 309, б), будет находиться под действием сил  $P$ ,  $Q(x) = P$  и момента  $M(x) = Px$ . Эта система сил удовлетворяет всем условиям равновесия, кроме одного. Здесь сумма моментов относительно оси  $x$  не равна нулю. Но рассматриваемый

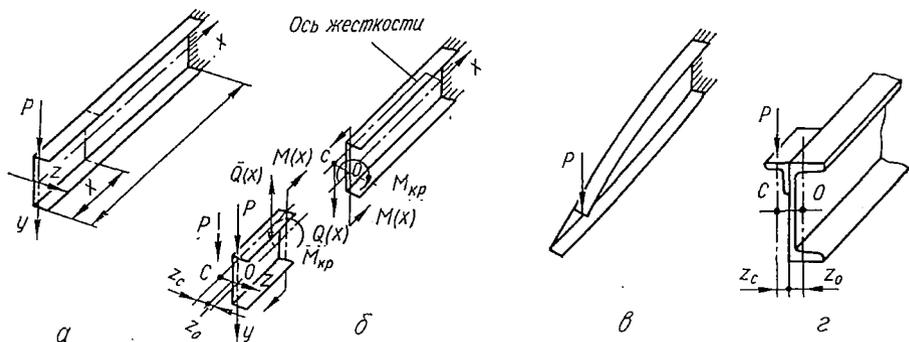


Рис. 309.

участок балки находится в равновесии. Значит, в сечении  $x$  должен действовать еще один силовой фактор, обеспечивающий выполнение также и этого условия равновесия. Таким фактором будет, очевидно, крутящий момент  $M_{кр} = P(z_0 + z_c)$ , направленный, как показано на рис. 309, б.

Следовательно, несмотря на то, что нагрузка пересекает ось  $x$ , балка будет не только изгибаться, но и скручиваться. Опыты подтверждают это (рис. 309, в).

Как известно, открытые тонкостенные профили плохо работают на кручение. Кроме того, если балка заделана так, что депланация сечения в заделке становится невозможной, то будет иметь место так называемое стесненное кручение, при котором в поперечном сечении возникают не только касательные, но и значительные нормальные напряжения. Поэтому желательно принимать меры, устраняющие кручение в балках прокатного профиля. Обычно по этой причине ставят симметричное сечение из двух швеллеров. Если же профиль один, а нагрузка значительна, то ее нужно выносить из главной плоскости так, чтобы она проходила через точку  $C$  (на рис. 309, б такое положение нагрузки показано пунктиром; на рис. 309, г дан один из возможных вариантов конструктивного оформления вынесения нагрузки). В этом случае участок балки длиной  $x$  полностью уравнивается силами  $P$ ,  $Q(x) = P$  и моментом  $M(x) = Px$ ; кручения не будет. Поэтому точка  $C$  называется *центром изгиба* (иногда — *центром*

жесткости). Центры изгиба всех сечений балки расположены на прямой, которая называется *осью жесткости* балки (рис. 309, б).

К балке может быть приложено несколько сил. Тогда, для того чтобы не было кручения, все они должны пересекать ось жесткости. Положение последней определено, если известно положение центра изгиба в сечении. Если сечение имеет две (или больше) оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести сечения. Так будет, например, в двутавровом сечении.

*Пример 49.* В качестве примера применения формулы (11.10) определим положение центра изгиба для швеллера № 18а. Согласно сортаменту  $h = 18$  см,  $b = 7,4$  см,  $d = 0,51$  см,  $t = 0,93$  см,  $J = 1190$  см<sup>4</sup>.

Тогда

$$z_c = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2} = \frac{0,93 \cdot 17,07^2 \cdot 6,89^2}{4 \cdot 1190} = -0,27 = 2,7 \text{ см.}$$

### § 73. ОСНОВЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим балку (рис. 310), опирающуюся на сплошное упругое основание, реакция которого на балку в каждой точке пропорциональна упругому прогибу  $w$  в этой точке.

Обозначив коэффициент пропорциональности буквой  $\alpha$  и предположив, что упругое основание по всей длине балки однородно, получим, что интенсивность реакции основания равна  $-\alpha w$ , где коэффициент  $\alpha$  имеет размерность  $\left| \frac{\text{сила}}{(\text{длина})^2} \right|$ .

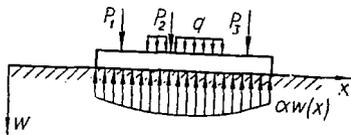


Рис. 310.

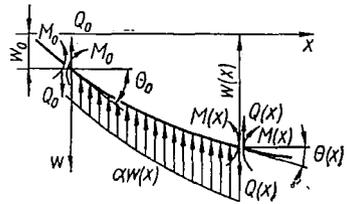


Рис. 311.

Таким образом, полная распределенная нагрузка  $p(x)$ , действующая на балку, будет состоять из заданной внешней распределенной нагрузки  $q(x)$  и неизвестной реакции упругого основания  $\alpha w(x)$ :

$$p(x) = q(x) - \alpha w(x). \quad (11.11)$$

Расчет балки на упругом основании является статически неопределимой задачей, так как одних уравнений равновесия ( $\sum X = 0$  и т. д.) недостаточно для определения закона изменения интенсивности реакции основания по длине балки. Интенсивность реакции основания связана с деформацией балки, поэтому для решения задачи сначала найдем уравнение упругой линии балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для балки постоянного поперечного сечения на упругом основании в соответствии с выражением (10.49) можно записать так:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{1}{EJ} [q(x) - \alpha w(x)]. \quad (11.12)$$

Ограничимся рассмотрением участка балки (рис. 311), на котором отсутствует внешняя распределенная нагрузка. Дифференциальное уравнение для этого случая упрощается. Получим:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -\frac{\alpha}{EJ} w(x). \quad (11.13)$$

Поместим начало координат в крайнюю левую точку рассматриваемого участка, направив ось  $w$  вниз, и обозначим прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в этом сечении соответственно через  $w_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$ . Все эти величины являются начальными параметрами.

Приведем уравнение (11.13) к виду, удобному для интегрирования, обозначив  $\frac{EJ}{\alpha} = \frac{L^4}{4}$ . Отсюда

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}, \quad (11.14)$$

т. е. характеристика  $L$  имеет размерность длины (см). Далее, в уравнении (11.13) независимую переменную  $x$  заменим безразмерной абсциссой

$$\xi = \frac{x}{L}. \quad (11.15)$$

Тогда уравнение (11.13) с учетом выражений (11.14) и (11.15) приводится к виду

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0. \quad (11.16)$$

Напишем общий интеграл этого уравнения в такой известной форме:

$$w = Ae^{\xi} \cos \xi + Be^{\xi} \sin \xi + Ce^{-\xi} \cos \xi + De^{-\xi} \sin \xi. \quad (11.17)$$

Последовательно продифференцируем это выражение по  $\xi$ , приняв во внимание дифференциальные зависимости между  $w$ ,  $\Theta$ ,  $Q$ ,  $M$  и соотношение (11.15):

$$w' = \Theta L = Ae^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) + Be^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - Ce^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + De^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \quad (11.18)$$

$$w'' = \frac{M(x)L^2}{EJ} = -2(Ae^{\xi} \sin \xi - Be^{\xi} \cos \xi - Ce^{-\xi} \sin \xi + De^{-\xi} \cos \xi); \quad (11.19)$$

$$w''' = \frac{Q(x)L^3}{EJ} = -2[Ae^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - Be^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - Ce^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - De^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]. \quad (11.20)$$

Выразим произвольные постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  через начальные параметры  $w_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $Q_0$  и  $M_0$ , положив для этого в уравнениях (11.17)–(11.20)  $\xi = 0$ :

$$\begin{aligned} w_0 &= A + C; \\ L\Theta_0 &= A + B - C + D; \\ L^2 M_0 &= -(-2B + 2D)EJ; \\ L^3 Q_0 &= -(2A - 2B - 2C - 2D)EJ. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Решая систему (11.21) четырех линейных алгебраических уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0}{2} + \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ B &= \frac{L\Theta_0}{4} + \frac{L^2M_0}{4EJ} + \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ C &= \frac{\omega_0}{2} - \frac{L\Theta_0}{4} + \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ D &= \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^2M_0}{4EJ} + \frac{L^3Q_0}{8EJ}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Подставив эти выражения произвольных постоянных в формулы (11.17)–(11.20) для  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $M$  и  $Q$ , найдем:

$$\omega(x) = \omega_0 Y_1(\xi) + L\Theta_0 Y_2(\xi) + \frac{L^2M_0}{EJ} Y_3(\xi) + \frac{L^3Q_0}{EJ} Y_4(\xi); \quad (11.23)$$

$$\Theta(x) = \Theta_0 Y_1(\xi) + \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) + \frac{L^2Q_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4\omega_0}{L} Y_4(\xi); \quad (11.24)$$

$$M(x) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) - \alpha L^2 \omega_0 Y_3(\xi) - \alpha L^3 \Theta_0 Y_4(\xi); \quad (11.25)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1(\xi) - \alpha L \omega_0 Y_2(\xi) - \alpha L^2 \Theta_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi). \quad (11.26)$$

Здесь через  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  обозначены функции А. Н. Крылова<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \\ &= \frac{1}{4} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi + (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi]; \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^\xi - e^{-\xi}) \right] \sin \xi; \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \\ &= \frac{1}{8} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi - (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi]. \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

Заметим, что при дифференцировании функций Крылова получаются следующие простые, но очень важные для практического применения зависимости:

$$LY'_1 = -4Y_4; \quad LY'_2 = Y_1; \quad LY'_3 = Y_2; \quad LY'_4 = Y_3. \quad (11.28)$$

Перейдем к выводу общих уравнений для  $\omega$ ,  $\Theta$ ,  $M$  и  $Q$  при действии произвольных распределенных или сосредоточенных внешних нагрузок. Пусть на отрезке  $x$  балки (рис. 312) действуют вертикальная сосредоточенная сила  $P_i$  в точке с абсциссой  $b_i$ , сосредоточенный момент  $M_i$  в точке с абсциссой  $a_i$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q_i$  на участке от  $x = c$  до  $x = d$ .

Для вывода воспользуемся принципом независимости действия сил, а также будем считать перемещения малыми. Сначала допустим, что

<sup>1</sup> Сокращенные таблицы функций А. Н. Крылова приведены в приложении 12.

все внешние нагрузки на участке  $x$  равны нулю, тогда общий интеграл, или прогиб  $w(x)$ , будет функцией начальных параметров и абсциссы  $x$  по формуле (11.23). Пусть теперь все начальные параметры равны нулю, но действуют сосредоточенные нагрузки  $P_i$  и  $M_i$ . Вдумываясь в геометрический и статический смысл факторов  $P_i$  и  $M_i$  (рис. 312), легко видим, что их можно принять за новые статические начальные параметры и вновь определить  $w(x)$  по формуле (11.23), подставив

$$M_0 = M_i; \quad Q_0 = -P_i.$$

При этом за начало координат следует принять не точку  $O$ , а соответственно расположению каждого силового фактора точки с абсциссами  $a_i$  и  $b_i$ . Поэтому аргументами функций Крылова  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  будут расстояния от рассматриваемого сечения до новых силовых факторов  $P_i$  и  $M_i$ , т. е. отрезки  $(x - a_i)$ ,  $(x - b_i)$  и т. п.

Если сил и моментов несколько, то вводят их суммы. При распределенных нагрузках суммы превращаются в интегралы от элементарных силовых факторов  $q d\eta$ , а при нескольких участках распределенных нагрузок — в суммы интегралов.

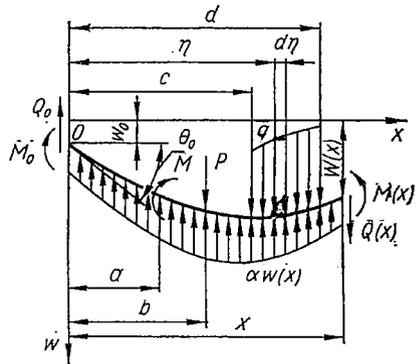


Рис. 312.

Ограничимся рассмотрением случая действия равномерно распределенной нагрузки. Тогда в результате интегрирования с учетом зависимостей (11.28) получим простую формулу:

$$\begin{aligned} \int_c^d q Y_4(\xi - \eta) d\eta &= -\frac{qL}{4} Y_1(\xi - \eta) \Big|_c^d = \\ &= -\frac{qL}{4} [Y_1(\xi - d) - Y_1(\xi - c)]. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Таким образом, при одновременном действии всех перечисленных силовых факторов и начальных параметров полный интеграл  $w(x)$  можно представить так:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \Theta_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ &+ Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + L^2 \sum M_i Y_3\left(\frac{x - a_i}{L}\right) + L^3 \sum P_i Y_4\left(\frac{x - b_i}{L}\right) - \\ &\left. - \frac{L^4}{4} \sum q_i \left[ Y_1\left(\frac{x - c_i}{L}\right) - Y_2\left(\frac{x - d_i}{L}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Обобщив аналогичным образом выражения для  $\Theta(x)$ ,  $M(x)$  и  $Q(x)$ , получим следующие универсальные уравнения метода начальных параметров для балки на упругом основании:

$$\Theta(x) = \Theta_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ + M_0 L Y_2' \left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - \alpha L^3 \omega_0 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ \left. + L \sum M_i Y_2\left(\frac{x-a_i}{L}\right) + L^2 \sum P_i Y_3\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \right. \\ \left. + L^3 \sum q_i \left[ Y_4\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_4\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right] \right\}; \quad (11.31)$$

$$M(x) = M_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) - \alpha L^2 \omega_0 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - \alpha L^3 \Theta_0 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + \\ + \sum M_i Y_1\left(\frac{x-a_i}{L}\right) + L \sum P_i Y_2\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \\ + L^2 \sum q_i \left[ Y_3\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_3\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right]; \quad (11.32)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) - \alpha L \omega_0 Y_2\left(\frac{x}{L}\right) - \alpha L^2 \Theta_0 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{4M_0}{L} Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - \\ - \frac{4}{L} \sum M_i Y_4\left(\frac{x-a_i}{L}\right) + \sum P_i Y_1\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \\ + L \sum q_i \left[ Y_2\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_2\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right]. \quad (11.33)$$

Теперь вычисление  $\omega(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $M(x)$  и  $Q(x)$  в каком угодно сечении балки на упругом основании не представит затруднений, если известны начальные параметры  $\omega_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $Q_0$  и  $M_0$ . В каждом конкретном случае начальные параметры могут быть определены из концевых условий балки. Эти условия для различных случаев закрепления балки могут быть представлены в форме таблицы (табл. 17), при составлении которой предполагалось, что начало координат совмещено с левым концом балки.

Таблица 17

Условия закрепления		Перемещения и силовые факторы для							
левого конца балки	правого конца балки	левого конца ( $x=0$ )				правого конца ( $x=l$ )			
		$\omega(0)$	$\Theta(0)$	$M(0)$	$Q(0)$	$\omega(l)$	$\Theta(l)$	$M(l)$	$Q(l)$
Свободен	Свободен	—	—	$M_0$	$Q_0$	—	—	$M_l$	$Q$
»	Оперт	—	—	$M_0$	$Q_0$	0	—	$M_l$	—
»	Заделан	—	—	$M_0$	$Q_0$	0	0	—	—
Оперт	Оперт	0	—	$M_0$	—	0	—	$M_l$	—
»	Заделан	0	—	$M_0$	—	0	0	—	—
Заделан	»	0	0	—	—	0	0	—	—

В таблице через  $M(l)$  и  $Q(l)$  обозначены внешние сосредоточенные момент и сила на правой опоре. Если на свободных концах балки внешние силы и моменты отсутствуют, то необходимо положить

$$M_0 = Q_0 = M_l = Q_l = 0.$$

В результате анализа данных таблицы заключаем, что при выборе начала координат на левом конце однопролетной балки два начальных

параметра всегда известны. Для определения двух остальных параметров нужно решить систему двух алгебраических уравнений, составленную из условий закрепления правого конца балки.

### § 74. ИЗГИБ БАЛОК, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ НЕ СЛЕДУЕТ ЗАКОНУ ГУКА

Изложенные ранее расчеты на прочность и жесткость при изгибе, основанные на гипотезе плоских сечений и законе Гука с одинаковым модулем упругости на растяжение и сжатие, не исчерпывают всех случаев, с которыми приходится встречаться конструкторам.

Известно, что закон Гука справедлив, пока напряжения не превышают определенной величины, называемой пределом пропорциональности, а в некоторых случаях расчеты на прочность приходится проводить при более высоких напряжениях, с учетом пластических деформаций. Кроме того, и в пределах упругости зависимость между напряжениями и деформациями у ряда материалов нелинейна, т. е. не подчиняется закону Гука. К таким материалам относятся чугун, камень, бетон, некоторые пластмассы. У некоторых материалов, подчиняющихся закону Гука, модули упругости при растяжении и сжатии различны. Поэтому в последнее время расчеты на прочность во всех указанных случаях приобретают все большее значение.

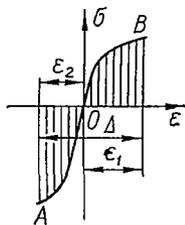


Рис. 313.

Расчеты на прочность с учетом пластических деформаций будут рассмотрены в гл. XVIII. Здесь ограничимся лишь определением нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного поперечного сечения, материал которой не следует закону Гука на протяжении всего процесса нагружения, причем зависимости между напряжениями и деформациями различны при растяжении и сжатии. Рассмотрим также случай изгиба при различных модулях упругости для растяжения и сжатия.

Опыты показывают, что и в указанных случаях гипотеза плоских сечений справедлива.

Пусть балка подвергается чистому изгибу. Если предположить, как и прежде, что волокна при изгибе не дают друг на друга, то материал балки будет находиться в состоянии простого растяжения и сжатия.

Диаграммы растяжения и сжатия, записанные для материалов, не следующих закону Гука (чугунов, камней и др.), показывают, что напряжения растут медленнее деформаций и отставание роста напряжений от роста деформаций значительно больше при растяжении, чем при сжатии (рис. 313). В этом случае нейтральная линия поперечного сечения не проходит через центр тяжести его, а смещается в сторону центра кривизны оси балки.

На основании гипотезы плоских сечений и указанного характера диаграммы растяжения (сжатия) материала можно изобразить эпюру

относительных удлинений и нормальных напряжений (рис. 314) в поперечном сечении балки. Если обозначить радиус кривизны нейтрального слоя через  $\rho$ , то относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, будет выражаться известной зависимостью

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (11.34)$$

Для определения относительных удлинений волокон балки, а затем нормальных напряжений необходимо установить положение нейтральной оси поперечного сечения, радиус кривизны нейтрального слоя и выразить аналитически или графически связь между деформациями и напряжениями.

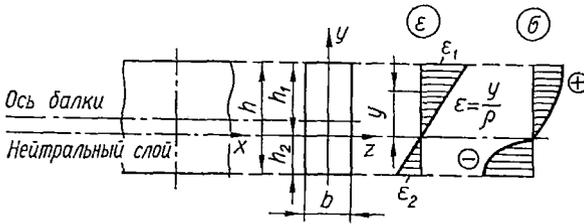


Рис. 314.

Проведем какое-либо поперечное сечение балки, перпендикулярное к ее оси. При изгибе балки парами сил внутренние силы упругости в поперечном сечении должны привести также к паре, следовательно проекция нормальных усилий на ось  $x$  (рис. 315) равна нулю, а момент их относительно нейтральной оси  $z$  равен изгибающему моменту.

Таким образом, получим следующих два уравнения статики:

$$\sum X = \int_F \sigma dF = 0;$$

$$\sum M_z = \int_F \sigma y dF - M = 0. \quad (11.35)$$

Так как  $dF = b dy$ , то соответственно

$$b \left( \int_0^{h_1} \sigma_p dy - \int_0^{h_2} \sigma_{сж} dy \right) = 0; \quad (11.36)$$

$$b \left( \int_0^{h_1} \sigma_p y dy + \int_0^{h_2} \sigma_{сж} y dy \right) = M. \quad (11.37)$$

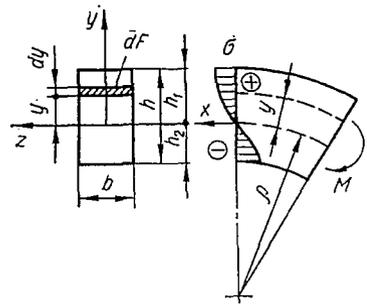


Рис. 315.

Для многих материалов зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии может быть с достаточной точностью представлена степенным законом

$$\epsilon_p = k_p \sigma_p^n; \quad \epsilon_{сж} = k_{сж} \sigma_{сж}^m, \quad (11.38)$$

где  $k_p$ ,  $k_{сж}$ ,  $n$  и  $m$  — величины, характеризующие физические свойства материала.

Учитывая формулу (11.34) для относительной деформации, из зависимостей (11.38) выразим нормальные напряжения следующим образом:

$$\sigma_p = \left(\frac{\epsilon_p}{k_p}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{y}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_{сж} = \left(\frac{\epsilon_{сж}}{k_{сж}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{y}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (11.39)$$

Эти зависимости и уравнения (11.36) и (11.37) позволяют определить положение нейтральной оси, величину радиуса кривизны, а также напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_{сж}$ .

Подставляя формулу (11.39) в уравнение (11.36), получим:

$$b \left[ \int_0^{h_1} \left(\frac{y}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}} dy - \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}} dy \right] = 0,$$

а выполнив интегрирование, будем иметь

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{h_1}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}} h_1 - \frac{m}{m+1} \left(\frac{h_2}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}} h_2 = 0. \quad (11.40)$$

Затем, подставив формулу (11.39) в уравнение (11.37), найдем, что

$$b \left[ \int_0^{h_1} \left(\frac{y}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}} y dy + \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}} y dy \right] = M,$$

и после интегрирования получим:

$$\frac{n}{2n+1} b \left(\frac{h_1}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}} h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \left(\frac{h_2}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}} h_2^2 = M. \quad (11.41)$$

Имея в виду, что  $h_1 + h_2 = h$ , из уравнений (11.40) и (11.41) найдем  $\rho$ ,  $h_1$  и  $h_2$ , а затем по формулам (11.39) — напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_{сж}$ .

Можно решить и обратную задачу — определить наибольший допускаемый изгибающий момент по допускаемому напряжению на растяжение  $[\sigma_p]$  или сжатие  $[\sigma_{сж}]$ . Для решения этой задачи запишем по формулам (11.39) напряжения растяжения и сжатия в крайних волокнах балки, находящихся на расстояниях  $h_1$  и  $h_2$  от нейтрального слоя:

$$\sigma_1 = \left(\frac{h_1}{k_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_2 = \left(\frac{h_2}{k_{сж\rho}}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (11.42)$$

На основании этого выражения (11.40) и (11.41) представим в следующем виде:

$$\frac{n}{n+1} \sigma_1 h_1 - \frac{m}{m+1} \sigma_2 h_2 = 0; \quad (11.43)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \sigma_1 h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \sigma_2 h_2^2 = M. \quad (11.44)$$

Кроме того, из формул (11.42) следует, что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1^m k_p}{\sigma_2^m k_{сж}}. \quad (11.45)$$

Присоединив к последним трем уравнениям равенство  $h_1 + h_2 = h$ , можно вычислить по допускаемому напряжению  $[\sigma_1]$  или  $[\sigma_2]$  положение нейтральной оси и допускаемое значение изгибающего момента. По предельным значениям напряжений может быть определен предельный изгибающий момент, величина которого соответствует достижению предельного значения одним из напряжений в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах в области растяжения или сжатия.

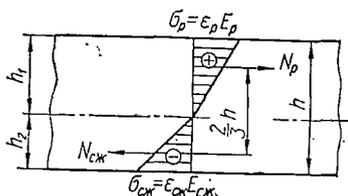


Рис. 316.

Подобно тому, как это сделано для балки прямоугольного поперечного сечения, можно решить задачу и для других простых сечений, например состоящих из прямоугольников (таких, как двутавр, тавр и т. п.).

Рассмотрим еще определение нормальных напряжений при изгибе в случае, когда материал следует закону Гука, но модули упругости при растяжении и сжатии различны.

Пусть  $E_p$  — модуль упругости материала при растяжении,  $E_{сж}$  — при сжатии. Для таких материалов обычно  $E_{сж} > E_p$ . Эпюра нормальных напряжений в сечении балки для этого случая изображена на рис. 316.

Для волокон, расположенных на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, в области растяжения и сжатия

$$\sigma_p = \frac{y}{\rho} E_p \quad \text{и} \quad \sigma_{сж} = \frac{y}{\rho} E_{сж}. \quad (11.46)$$

Из равенства (11.36) следует, что

$$\int_0^{h_1} \sigma_p dy = \int_0^{h_2} \sigma_{сж} dy. \quad (11.47)$$

Подставляя вместо  $\sigma_p$  и  $\sigma_{сж}$  их выражения (11.46), будем иметь:

$$\frac{E_p}{\rho} \int_0^{h_1} y dy = \frac{E_{сж}}{\rho} \int_0^{h_2} y dy, \quad (11.48)$$

откуда после интегрирования и сокращения на  $\frac{1}{2\rho}$  получим:

$$E_p h_1^2 = E_{сж} h_2^2, \quad (11.49)$$

или

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{E_{сж}}{E_p}.$$

Принимая во внимание, что  $h_1 + h_2 = h$ , найдем:

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_{\text{сж}}}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{\text{сж}}}}; \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_p}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{\text{сж}}}}. \quad (11.50)$$

Таким образом, положение нейтральной оси определено.

Теперь найдем напряжения в крайних волокнах балки в области растяжения  $\sigma_p$  и в области сжатия  $\sigma_{\text{сж}}$ . Из эпюры напряжений следует, что суммарная растягивающая сила  $N_p$  в зоне растяжения и сжимающая сила  $N_{\text{сж}}$  в зоне сжатия поперечного сечения определяются следующими выражениями:

$$N_p = \frac{\sigma_p b h_1}{2}; \quad N_{\text{сж}} = \frac{\sigma_{\text{сж}} b h_2}{2}. \quad (11.51)$$

Действуют эти силы на расстоянии  $\frac{2}{3} h_1$  и  $\frac{2}{3} h_2$  от нейтрального слоя. Так как усилия в поперечном сечении приводятся к паре сил, то  $N_p = N_{\text{сж}}$ . Плечо пары равно  $\frac{2}{3} h$ . Изгибающий момент может быть записан как момент пары сил, равный растягивающей или сжимающей силе, умноженной на плечо пары:

$$M = N_p \frac{2}{3} h; \quad M = N_{\text{сж}} \frac{2}{3} h.$$

Учитывая выражения (11.51) и (11.50), будем иметь:

$$M = \frac{\sigma_p b h_1 h}{3} = \frac{\sigma_p b h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{E_{\text{сж}}}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{\text{сж}}}}; \quad (11.52)$$

$$M = \frac{\sigma_{\text{сж}} b h_2 h}{3} = \frac{\sigma_{\text{сж}} b h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{\text{сж}}}},$$

откуда

$$\sigma_p = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_{\text{сж}}}} \right); \quad (11.53)$$

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\sqrt{E_{\text{сж}}}}{\sqrt{E_p}} \right).$$

Пользуясь этими формулами, можем по изгибающему моменту найти наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения, если известно отношение модулей упругости.

Представим формулы (11.53) в несколько ином виде. В соответствии с выражениями (11.50) имеем:

$$\sqrt{\frac{E_p}{E_{\text{сж}}}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{\rho}{h_1}}{\frac{\rho}{h_2}} = \frac{\epsilon_{\text{сж}}}{\epsilon_p}.$$

Внеся это отношение в формулы (11.53), получим:

$$\sigma_p = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\epsilon_{сж}}{\epsilon_p} \right); \quad (11.54)$$

$$\sigma_{сж} = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{сж}} \right). \quad (11.55)$$

В таком виде формулы удобны для вычисления напряжений в случае, когда в крайних волокнах балки измеряются относительные деформации при помощи тензометров.

## Глава XII

### СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под *сложным сопротивлением* подразумевают различные комбинации ранее рассмотренных простых напряженных состояний брусьев (растяжения, сжатия, сдвига, кручения и изгиба).

В общем случае нагружения бруса (рис. 317) в поперечных сечениях могут действовать шесть компонентов внутренних сил —  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_{кр}$ , связанные с четырьмя простыми деформациями стержня — растяжением (сжатием), сдвигом, кручением и изгибом.

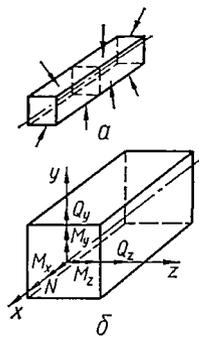


Рис. 317.

Чего-либо принципиально нового задачи сложного сопротивления при достаточно жестких брусках не вносят, так как совместное действие указанных усилий приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. Умея определять нормальные и касательные напряжения в различных точках стержня, а также главные напряжения, можно по той или иной теории прочности произвести проверку прочности данного стержня. Аналогично могут быть изучены деформация или перемещение бруса путем соответствующего сложения перемещений, получаемых при отдельных более простых нагружениях.

Принцип суммирования действия сил применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается редко. Чаще приходится иметь дело с различными комбинациями их, которые и рассмотрим ниже.

#### § 75. СЛОЖНЫЙ И КОСОЙ ИЗГИБ

*Сложный изгиб* вызывается силами или моментами, расположенными в разных плоскостях, проходящих через ось балки (рис. 318, а). Такой изгиб называется также *неплоским изгибом*, так как изогнутая ось балки не является плоской кривой.

Если все нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей, то изгиб называется *косым* (рис. 319, а).

Как в случае неплоского, так и в случае косоугольного изгиба, наиболее удобно привести сложный изгиб к двум плоским. Для этого нагрузки, действующие в произвольных продольных силовых плоскостях, нужно разложить на составляющие, расположенные в главных плоскостях  $xu$  и  $xz$ , где оси  $y$  и  $z$  являются главными осями инерции сечения (рис. 318 и 319). Таким образом, схемы нагружения брусьев при сложном и косом изгибе могут быть представлены так, как показано на рис. 318, б и 319, б соответственно.

При сложном изгибе в поперечных сечениях бруса в общем случае возникают четыре внутренних силовых фактора:  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$  и  $M_y$ . Проводя расчет на прочность при сложном изгибе, обычно пренебрегают влиянием касательных напряжений.

Вычислим напряжения в некоторой точке  $(y, z)$  произвольного поперечного сечения, расположив ее для определенности в первом квадранте (рис. 320, а). Направления главных осей показаны на рисунке. Изгибающие моменты будем считать положительными, если они вызывают в точках первого квадранта растягивающие напряжения.

Исходя из принципа суперпозиции, найдем напряжения в указанной точке, рассматривая два плоских изгиба. Пусть вначале действует только момент  $M_z$ . Тогда нормальное напряжение в точке

$$\sigma' = \frac{M_z y}{J_z}.$$

Если действует только момент  $M_y$ , то напряжение

$$\sigma'' = \frac{M_y z}{J_y}.$$

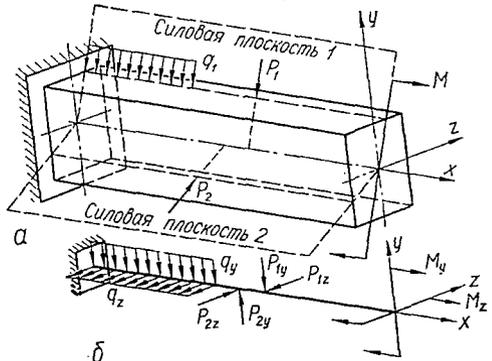


Рис. 318.

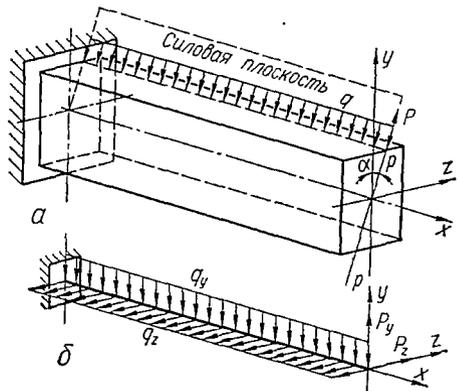


Рис. 319.

Очевидно, что при одновременном действии обоих изгибающих моментов напряжения

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}. \quad (12.1)$$

Формула (12.1) позволяет определить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения при сложном, или, как говорят еще, пространственном, изгибе.

Изгибающие моменты и координаты точек, в которых определяют напряжения, подставляют в эту формулу со своими знаками.

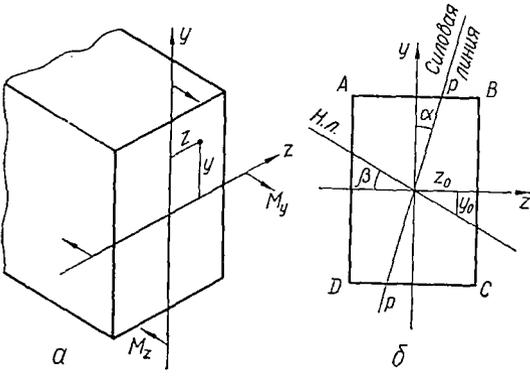


Рис. 320.

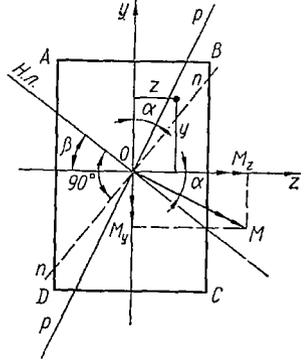


Рис. 321.

В случае косога изгиба (рис. 321) изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  связаны зависимостями

$$\begin{aligned} M_z &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha, \end{aligned} \quad (12.2)$$

где  $M$  — изгибающий момент в данном сечении в силовой плоскости  $p-p$  (рис. 321).

Тогда, используя формулу (12.1), будем иметь:

$$\sigma = \frac{Mz \sin \alpha}{J_y} + \frac{My \cos \alpha}{J_z},$$

или

$$\sigma = M \left( \frac{y \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (12.3)$$

Уравнение нейтральной линии при сложном изгибе в любом поперечном сечении получим из формулы (12.1), положив  $\sigma = 0$  и обозначив координаты точек нейтральной линии через  $y_0$  и  $z_0$ . Тогда

$$\sigma = \frac{M_z y_0}{J_z} + \frac{M_y z_0}{J_y} = 0. \quad (12.4)$$

Это уравнение представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат (центр тяжести  $O$  сечения). Положение ней-

тральной линии характеризуется ее угловым коэффициентом (рис. 320. б):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}. \quad (12.5)$$

В общем случае сложного (пространственного) изгиба углы наклона нейтральных линий вдоль оси бруса не остаются постоянными, а изменяются в соответствии с изменением соотношения величин изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , как это следует из выражения (12.5).

Если в некотором сечении бруса, где действуют изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  (рис. 322, а), нужно найти положение нейтральной линии, то удобно для наглядности сначала показать положение

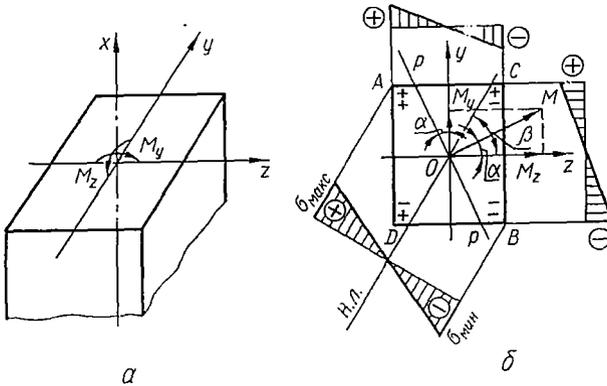


Рис. 322.

силовой линии  $\rho-\rho$ . Наиболее просто выполнить это, построив векторную диаграмму моментов (рис. 322, б), которая показывает направление результирующего вектора-момента  $M$ , и следовательно, определяет угол  $\alpha$  наклона плоскости действия его (силовой линии  $\rho\rho$ ):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}. \quad (12.6)$$

Теперь выражение (12.5) для угла наклона нейтральной линии с учетом формулы (12.6) можно представить так:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.7)$$

Анализируя это выражение, находим, что в отличие от простого (прямого) изгиба при сложном изгибе нейтральная и силовая линии в общем случае (когда  $J_z \neq J_y$ ) не будут взаимно перпендикулярны.

При косом изгибе в соответствии с формулами (12.2) отношение изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  постоянно по всей длине бруса ( $\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{tg} \alpha$ ). Поэтому из выражения (12.7) следует, что и угол  $\beta$

наклона нейтральной линии также постоянен. Значит, поперечные сечения бруса, оставаясь плоскими, будут поворачиваться вокруг параллельных друг другу нейтральных линий, как и при простом плоском изгибе. Искривление оси бруса при этом будет происходить в одной плоскости  $n-n$ , нормальной к направлению нейтральной линии (рис. 321). Эта плоскость называется *плоскостью изгиба*.

Проверку прочности следует производить в тех сечениях, где изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  одновременно велики. Таких сечений в общем случае сложного изгиба может быть несколько.

Если опасное сечение известно, то в нем нужно отыскать опасные точки. Наглядное представление о распределении напряжений  $\sigma(M_y)$  и  $\sigma(M_z)$  по поперечному сечению бруса дают соответствующие эпюры, представленные на рис. 322, б. Для построения эпюры суммарных напряжений  $\sigma_x$  необходимо провести базис эпюры перпендикулярно к нейтральной линии. Так как из формулы (12.1) следует, что эпюра  $\sigma$  линейна, то для ее построения, кроме известной нулевой точки, достаточно вычислить какую-либо одну ординату, например для точки  $A$ . Очевидно, наиболее напряженными точками сечения будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии — точки  $A$  и  $B$  (рис. 322, б). В данном случае в точке  $A$  действует наибольшее растягивающее, а в точке  $B$  — наибольшее сжимающее напряжение.

Таким образом, условие прочности для опасных точек имеет вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{M_z y_A}{J_z} + \frac{M_y z_A}{J_y} \leq [\sigma_+]; \quad (12.8)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{M_z y_B}{J_z} - \frac{M_y z_B}{J_y} \leq [\sigma_-]. \quad (12.9)$$

В случае косоугольного изгиба (рис. 320, а) при указанных направлениях изгибающих моментов наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке  $B$ , а наибольшие сжимающие — в точке  $D$  (рис. 320, б). Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left( \frac{z_B \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_+]; \quad (12.10)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left( \frac{z_D \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (12.11)$$

В частности, для прямоугольного сечения

$$\frac{J_y}{z_D} = \frac{J_y}{z_B} = W_y; \quad \frac{J_z}{y_B} = \frac{J_z}{y_D} = W_z,$$

поэтому формулы (12.10), (12.11) можно упростить так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left( \frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_+]; \quad (12.12)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left( \frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (12.13)$$

Подбор сечений при неплоском изгибе является задачей более сложной, чем при простом поперечном изгибе. При ее решении необ-

ходим сначала задаться отношением моментов сопротивлений и находить сечения методом подбора.

Заметим, что, если нужно найти касательные напряжения при неплоском изгибе, последние можно определить по формулам

$$\tau_y = \frac{Q_y S_z}{J_z b}; \quad \tau_z = \frac{Q_z S_y}{J_y h}.$$

Определяя перемещения, также исходим из принципа независимости действия сил и вычисляем перемещения в каждой из главных плоскостей. Сохраняя прежнее обозначение прогиба в направлении главной

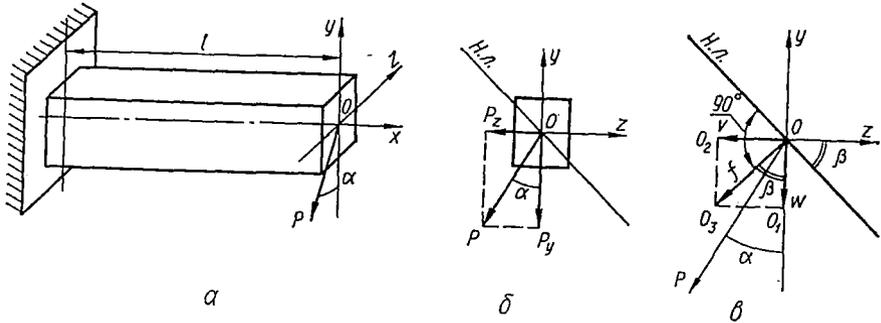


Рис. 323.

оси  $y$  через  $w$  и обозначая прогиб в направлении главной оси  $z$  через  $v$ , дифференциальные уравнения прогибов в плоскостях  $xz$  и  $xy$  запишем в виде

$$EJ_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M_y; \quad EJ_z \frac{d^2 w}{dx^2} = M_z.$$

Пользуясь указанными дифференциальными уравнениями, непосредственным их интегрированием или по методу начальных параметров можно получить перемещения. Кроме того, перемещения могут быть определены энергетическими методами, которые рассмотрим ниже.

Величина полного прогиба  $f$  сечения определится как геометрическая сумма прогибов  $v$  и  $w$ :

$$\boxed{f = \sqrt{v^2 + w^2}}. \quad (12.14)$$

В качестве примера вычислим прогиб свободного конца консоли, нагруженной силой  $P$  как показано на рис. 323. Раскладывая силу  $P$  по направлениям главных осей, получим составляющие

$$P_y = P \cos \alpha; \quad P_z = P \sin \alpha. \quad (12.15)$$

На основании формулы (10.54) определяем прогибы в главных плоскостях (рис. 323, в):

$$w = -\frac{P_y l^3}{3EJ_z}; \quad v = -\frac{P_z l^3}{3EJ_y}. \quad (12.16)$$

Полное перемещение

$$f = \sqrt{\bar{w}^2 + \bar{v}^2} = \frac{Pl^3}{3E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}. \quad (12.17)$$

Определим направление полного прогиба  $f$ , для чего найдем угол между отрезком  $OO_3$  и осью  $y$ :

$$\operatorname{tg} \angle O_1OO_3 = \frac{v}{w} = \frac{P_z J_z}{P_y J_y} = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}. \quad (12.18)$$

Сравнивая формулы (12.18) и (12.7), замечаем, что угол между плоскостью изгиба и осью  $y$  по абсолютной величине равен углу между нейтральной линией сечения и осью  $z$ . Отсюда следует, что полный прогиб при косом изгибе перпендикулярен к нейтральной линии сечения (рис. 323, в). Очевидно, отклонение полного прогиба от силовой плоскости будет тем больше, чем больше отношение  $\frac{J_z}{J_y}$ .

Заметим, что когда  $J_z = J_y$  (что имеет место для круглого сечения и любого правильного многоугольника), суммарный прогиб лежит в силовой плоскости. В этих случаях косоу изгиб невозможен.

*Пример 50.* Деревянный прогон сечения  $16 \times 20$  см (рис. 324, б) свободно опирается на стропильные фермы (рис. 324, а), расстояние между которыми 3 м. Прогон нагружен вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q = 400$  кг/м. Уклон верхнего пояса стропил фермы 1 : 2. Определить наибольшие напряжения сжатия и растяжения в сечении балки, указать точки сечения, где они имеют место, и найти полный прогиб среднего сечения балки.

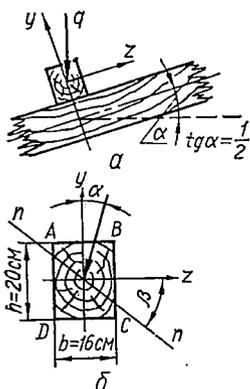


Рис. 324.

Максимальный изгибающий момент, который будет посредине балки,

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 300^2}{8} = 45\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Составляющие этого момента, действующие в главных плоскостях инерции (относительно осей  $z$  и  $y$ ), определим по формулам

$$M_z = -M_{\max} \cos \alpha = -45\,000 \cdot 0,894 = -40\,248 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$M_y = -M_{\max} \sin \alpha = -45\,000 \cdot 0,447 = -20\,115 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Угол наклона нейтральной линии  $nn$  определится из формулы (12.7) так:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{b^2} = -\frac{1 \cdot 20^2}{2 \cdot 16^2} = -0,7813 = -\operatorname{tg} 38^\circ.$$

Наибольшими будут напряжения сжатия в точке  $B$  и растяжения — в точке  $D$ , т. е. в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = -6 \left( \frac{M_z}{bh^2} + \frac{M_y}{b^2h} \right) = -\frac{6}{16 \cdot 20} \left( \frac{40\,248}{20} + \frac{20\,115}{16} \right) = -61,3 \text{ кг/см}^2.$$

В точке  $D$ , очевидно, будет такое же по величине напряжение растяжения:

$$\sigma_D = 61,3 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольший прогиб находится посредине пролета. Определился он по формуле

$$f = \frac{5ql^4}{384EJ},$$

в которую вместо интенсивности распределенной нагрузки должны подставляться ее составляющие в направлении главных осей:

$$q_y = q \cos \alpha = 400 \cdot 0,894 = 357,6 \text{ кг/м} = 3,576 \text{ кг/см};$$

$$q_z = q \sin \alpha = 400 \cdot 0,447 = 178,8 \text{ кг/м} = 1,788 \text{ кг/см}.$$

Составляющие прогиба тогда

$$w = -\frac{5q_y l^4}{384EJ_z} = -\frac{5 \cdot 3,576 \cdot 300^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 20^3} = -0,35 \text{ см};$$

$$v = -\frac{5q_z l^4}{384EJ_y} = -\frac{5 \cdot 1,788 \cdot 300^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^5 \cdot 16^3 \cdot 20} = -0,28 \text{ см},$$

а полный прогиб найдем как геометрическую сумму указанных составляющих прогиба:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{0,28^2 + 0,35^2} = 0,45 \text{ см}.$$

Прогиб  $f$  лежит в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии.

## § 76. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

Расчеты на совместное действие изгиба и растяжения можно свести к следующим двум основным видам:

- расчеты на действие продольно-поперечных нагрузок;
- расчеты на внецентренное растяжение (сжатие).

Отдельно должен быть рассмотрен изгиб с растяжением (сжатием) кривого бруса.

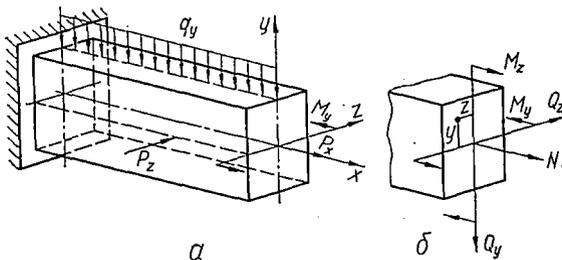


Рис. 325.

Сложный изгиб с растяжением (сжатием) прямого бруса. Если на балку действуют и продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса, то в общем случае (рис. 325, а) в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  в двух плоскостях, поперечные силы  $Q_z$  и  $Q_y$ , а также продольная сила  $N_x$  (рис. 325, б).

Таким образом, в этом случае будет сложный изгиб с растяжением или сжатием. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (12.19)$$

Изгибающие моменты, продольную силу и координаты точки, в которой вычисляют напряжения, подставляют сюда с их знаками.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что напряженное состояние в опасной точке будет линейным. Следовательно, условие прочности имеет простейший вид:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (12.20)$$

Если сечение имеет две оси симметрии и выступающие углы, то опасной будет одна из угловых точек. Напряжения в ней определяют по формуле (12.19) или же так<sup>1</sup>:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (12.21)$$

Знаки в этой формуле комбинируются по смыслу или на основе сопоставления с формулой (12.19).

В случае плоского изгиба в главной плоскости  $yOx$  с растяжением (сжатием) трехчленная формула превращается в двухчленную:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z}. \quad (12.22)$$

Эти формулы применяют при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. Опасными в этом случае являются те сечения, где действует наибольший изгибающий момент  $M_{\max}$ .

В случае расчета брусьев с поперечным сечением произвольной формы для определения опасной точки сечения необходимо прежде всего установить положение нейтральной линии. Способ определения положения нейтральной линии описан ниже при рассмотрении внецентренного растяжения.

*Пример 51.* Подобрать двутавровое сечение плоской стальной рамы (рис. 326, а) при  $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

Определив опорные реакции и построив эпюры  $M_z$  и  $N$  (рис. 326, б, в), обнаруживаем, что опасным является сечение  $D$  правой стойки, в котором

$$M_{\max} = 57 \cdot 10^4 \text{ кг}\cdot\text{см}; \quad N = -63,9 \cdot 10^2 \text{ кг}.$$

Опасные точки в этом сечении находятся слева (рис. 326, г), так как здесь арифметически складываются напряжения от  $M_z$  и  $N$ . В соответствии с формулой (12.22) условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{57 \cdot 10^4}{W_z} + \frac{63,9 \cdot 10^2}{F} \leq 1600 \text{ кг/см}^2. \quad (12.23)$$

<sup>1</sup> При изгибе со сжатием применять приведенные формулы можно лишь к коротким стержням большой жесткости, так как в случае тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости (см. гл. XIX).

Условие прочности содержит две неизвестные величины —  $W_z$  и  $F$ . В большинстве случаев напряжения  $\sigma_x$  от изгиба больше, чем от продольной силы, поэтому при подборе сечения можно вначале опустить второе слагаемое и найти приближенное значение  $W_z$  из расчета на изгиб:

$$W_z'' \geq \frac{57 \cdot 10^4}{1600} = 356 \text{ см}^3.$$

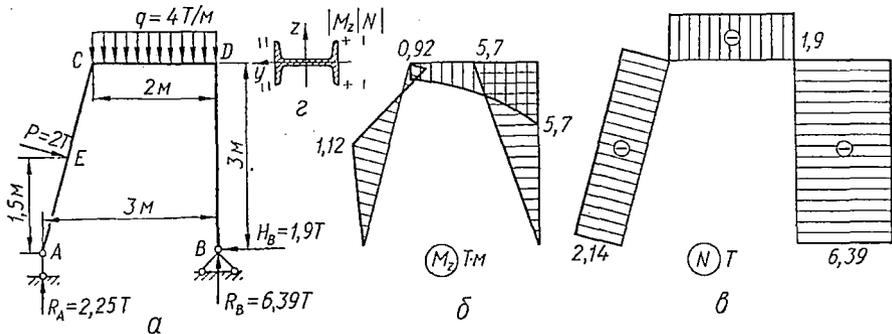


Рис. 326.

Затем по сортаменту (приложение 1) нужно выбрать двутавр с моментом сопротивления, несколько большим, чем  $W$ . Выбираем двутавр № 27, для которого  $W_z = 371 \text{ см}^3$ ,  $F = 40,2 \text{ см}^2$ .

Далее проверяем прочность выбранного сечения, вычисляя максимальные нормальные напряжения по формуле (12.22):

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{57 \cdot 10^4}{371} + \frac{63,9 \cdot 10^3}{40,2} = 1536 + 159 = 1695 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{1695 - 1600}{1600} \cdot 100\% \approx 6\% > 5\%.$$

поэтому необходимо увеличить размер сечения, приняв по сортаменту следующий больший номер двутавра — № 27 а, для которого

$$W_z = 407 \text{ см}^3; \quad F = 43,2 \text{ см}^2.$$

**Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса. Ядро сечения.** Внецентренное растяжение (сжатие) представляет собой частный случай сложного изгиба с растяжением (сжатием), при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса, так что их равнодействующая не совпадает с осью бруса (рис. 327), а проходит через точку  $p$ , называемую полюсом силы.

Пусть на брус произвольного сечения действует одна сила  $P$ , параллельная оси бруса и пересекающая любое поперечное сечение в точке  $p$  (рис. 327). Координаты этой точки в системе главных осей сечения обозначим через  $y_p$  и  $z_p$ , а расстояние этой точки до оси  $x$ , называемое эксцентриситетом, — через  $e$ .

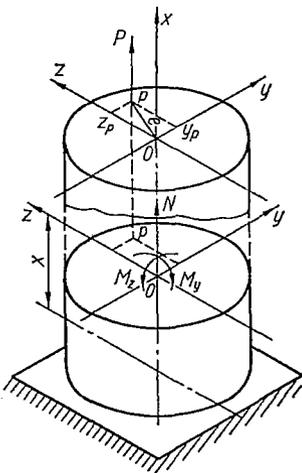


Рис. 327.

В любом поперечном сечении при такой нагрузке внутренние силовые факторы  $N = P$ ;  $M_y = Pz_p$ ;  $M_z = Py_p$ .

Таким образом, напряжения в произвольной точке сечения будут складываться из напряжений осевого растяжения силой  $N$  и напряжений от чистого изгиба моментами  $M_y$  и  $M_z$ :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (12.24)$$

Внеся сюда вместо  $N$ ,  $M_y$  и  $M_z$  их значения, получим:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_p F}{J_y} z + \frac{y_p F}{J_z} y \right). \quad (12.25)$$

Этой формуле можно придать несколько иной вид, выразив главные моменты инерции через радиусы инерции:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right). \quad (12.26)$$

Для определения опасной точки при сложном профиле целесообразно построить нейтральную линию сечения. Опасной в сечении будет точка, наиболее удаленная от нейтральной линии.

Уравнение нейтральной линии получим, приравняв нулю правую часть уравнения (12.26) и обозначив координаты точек на нейтральной линии через  $y_0$  и  $z_0$ :

$$\frac{z_p}{i_y^2} z_0 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 = -1. \quad (12.27)$$

Полагая в этом уравнении поочередно  $z_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ , найдем отрезки  $y_H$  и  $z_H$ , отсекаемые нейтральной линией на осях  $y$  и  $z$  (рис. 328):

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_H = -\frac{i_z^2}{y_p}. \quad (12.28)$$

Из зависимостей (12.28) следует, что нейтральная линия пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка  $p$ .

Теперь, проведя параллельно нейтральной линии касательные к контуру сечения, найдем наиболее напряженные точки  $A$  и  $B$  в растянутой и сжатой зонах сечения (рис. 328). Напряжения в этих точках и условия прочности имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_A &= \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) \leq [\sigma_+]; \\ \sigma_{\min} = \sigma_B &= \frac{P}{F} \left( 1 - \frac{z_p}{i_y^2} z_B - \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_-]. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Здесь  $z_A$ ,  $y_A$  и  $-z_B$ ,  $-y_B$  — координаты точек  $A$  и  $B$  соответственно.

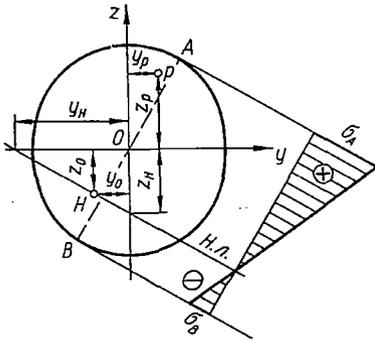


Рис. 328.

Эпюра напряжений  $\sigma_x$  приведена на рис. 328. Для прямоугольного сечения условие прочности удобнее представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12.30)$$

Формулы (12.29) и (12.30) справедливы и в случае действия сжимающей силы  $P$ , если нет опасности возникновения продольного изгиба.

**Ядро сечения.** Хотя до сих пор мы изображали нейтральную линию проходящей через сечение, она в общем случае может проходить

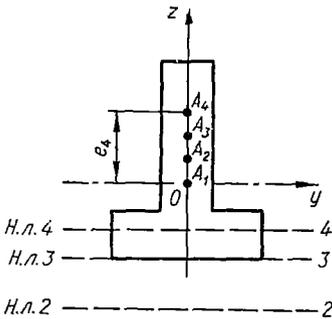


Рис. 329.

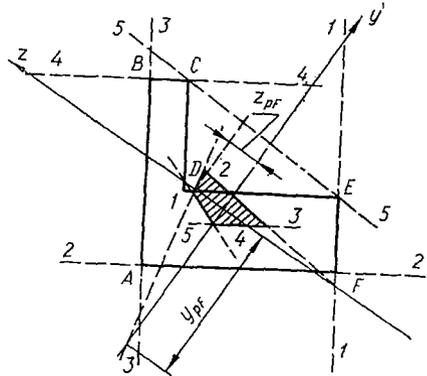


Рис. 330.

и вне его. Действительно, если сила  $P$  приложена в центре тяжести, то нейтральная линия проходит в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно.

По мере увеличения эксцентриситета  $e$  (рис. 329) нейтральная линия будет приближаться к сечению и при некотором положении силы  $P$  (на рис. 329, например, при положении  $A_3$ ) впервые коснется контура сечения. При дальнейшем увеличении эксцентриситета нейтральная линия пересечет сечение, причем нормальные напряжения в сечении будут обоих знаков: по одну сторону от нейтральной линии — растягивающими, а по другую — сжимающими.

Представляет интерес установить область таких удалений силы  $P$  от оси, при которых нормальные напряжения по всему поперечному сечению будут одного знака. Такая область называется ядром сечения. Это важно для брусков из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (например для кирпичной кладки, бетона и серого чугуна).

Итак, *ядром сечения называется область вокруг центра тяжести поперечного сечения, которая обладает следующим свойством: если внецентренно приложенная нагрузка расположена в области ядра, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения имеют один знак.*

Для построения ядра сечения будем задаваться различными положениями нейтральной линии (рис. 330) и вычислять координаты

соответствующих точек приложения силы  $P$  по следующим формулам, вытекающим из выражения (12.28):

$$y_p = -\frac{i_z^3}{y_n}; \quad z_p = -\frac{i_y^3}{z_n}. \quad (12.31)$$

Вычисленные координаты определяют точки, лежащие на границе ядра сечения.

Для облегчения построения ядра сечения воспользуемся следующим свойством нейтральной линии: при повороте нейтральной линии вокруг некоторой неподвижной точки  $A$  контура сечения точка приложения силы перемещается вдоль некоторой прямой.

Для обоснования этого свойства достаточно подставить в уравнение (12.27) координаты точки  $A$  ( $y_{OA}$ ,  $z_{OA}$ ), лежащей на нейтральной линии. Получим:

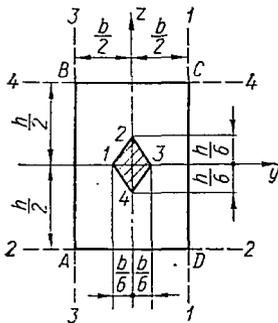


Рис. 331.

$$\frac{z_p z_{OA}}{i_y^2} + \frac{y_p y_{OA}}{i_z^2} = -1. \quad (12.32)$$

Действительно, уравнение (12.32) при  $z_{OA} = \text{const}$ ,  $y_{OA} = \text{const}$  является уравнением прямой относительно координат точек приложения силы  $P$  — ( $y_p$ ,  $z_p$ ).

Таким образом, для построения ядра сечения какой-либо фигуры нужно провести ряд положений нейтральной линии, совпадающих со сторонами сечения, а также касающихся выступающих точек его.

Построим, например, ядро сечения для прямоугольника  $ABCD$  (рис. 331). Совместим вначале нейтральную линию со стороной  $CD$  (положение 1—1). Очевидно, в этом случае

$$y_n = \frac{b}{2}; \quad z_n = \infty.$$

Тогда из выражений (12.31)

$$y_p = -\frac{i_z^3}{y_n} = -\frac{b}{6}; \quad z_p = -\frac{i_y^3}{z_n} = 0.$$

Здесь учтено, что

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^3}{12}; \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^3}{12}.$$

Таким образом, координаты точки 1 ядра сечения определены.

Совместим теперь нейтральную линию со стороной  $AD$  (положение 2—2). Имеем:

$$y_n = \infty; \quad z_n = \frac{h}{2}.$$

Тогда координаты точки 2 ядра

$$y_p = 0; \quad z_p = -\frac{h^3}{12\left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}.$$

Аналогично определяются координаты точек 3 и 4, соответствующих положениям нейтральной линии 3—3 и 4—4.

Так как при переходе нейтральной линии с одной стороны на другую она поворачивается вокруг угловой точки сечения, то точка приложения силы перемещается по прямой, образуя контур ядра. Таким образом, ядро сечения будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения.

*Пример 52.* Для круглого сечения построить ядро сечения (рис. 332).

В круге все центральные оси являются главными, а поэтому при касании нейтральной линии 1—1 в любой точке *A* точка 1 будет лежать на диаметре, также проходящем через точку *A*, и ее координаты будут следующими:

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_{II}} = -\frac{i_z^2}{-R} = \frac{R^3}{4R} = \frac{R}{4}; \quad z_p = 0.$$

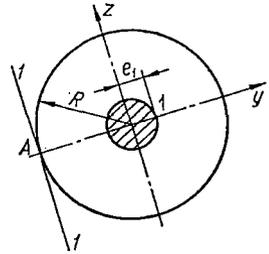


Рис. 332.

Можно, очевидно, сделать вывод, что благодаря симметрии сечения ядро сечения также будет кругом с радиусом  $e_1 = \frac{R}{4}$ .

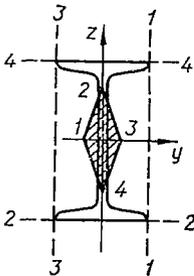


Рис. 333.

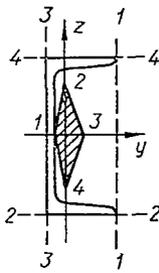


Рис. 334.

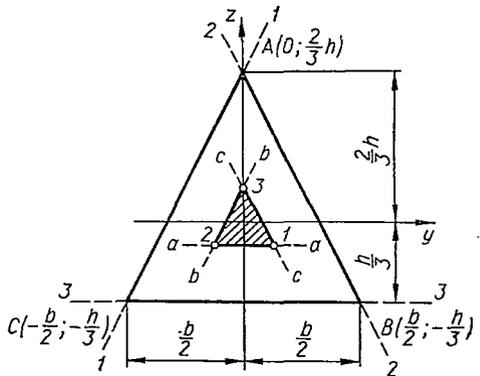


Рис. 335.

Построение ядра сечения для двутавра (рис. 333), швеллера (рис. 334) и треугольника (рис. 335) рекомендуем читателю выполнить самостоятельно.

## § 77. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

**Круглые валы.** Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т. п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы:  $M_{кр} = M_x$ ;  $M_y$ ;  $M_z$ ;  $Q_y$  и  $Q_z$ .

Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и изгиба. Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов  $M_y$ ,  $M_z$  и крутящего момента  $M_x$ .

Нагрузки, действующие на вал, разлагаем на составляющие вдоль координатных осей (рис. 336), а затем строим эпюры: от сил  $P_{1z}, P_{2z}, \dots, P_{nz}$  — эпюру  $M_y$ , от сил  $P_{1y}, P_{2y}, \dots, P_{ny}$  — эпюру  $M_z$  (рис. 336, б и в).

При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (12.33)$$

Вектор момента  $M$  в разных сечениях может иметь различные направления (рис. 336, г), в силу чего даже при отсутствии распределенных нагрузок эпюра  $M$  может быть криволинейной (рис. 336, д). Для общего случая это легко показать аналитически.

Пусть  $M_y = a + bx$ ;  $M_z = c + dx$  ( $a, b, c$  и  $d$  — постоянные коэффициенты), тогда

$$M = \sqrt{(a + bx)^2 + (c + dx)^2}.$$

Выражение, стоящее под радикалом, лишь в некоторых частных случаях является полным квадратом (например, при

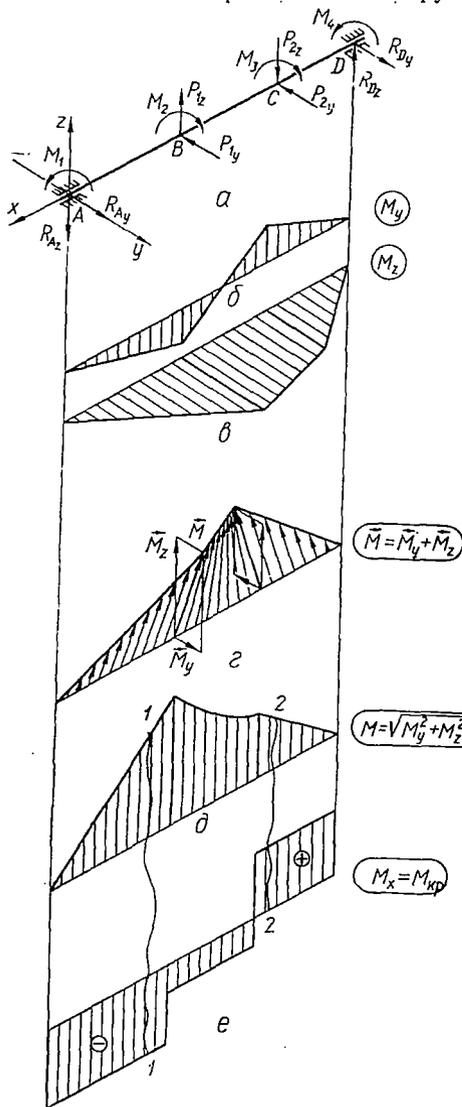


Рис. 336.

$a = c = 0$ ), а в большинстве случаев эпюра криволинейна, причем

$$M \leq \sqrt{a^2 + c^2} + (\sqrt{b^2 + d^2})x.$$

Это позволяет строить эпюры  $M$  упрощенным способом, несколько завышая значения суммарного изгибающего момента  $M$  на участках

между переломами эпюры: величины суммарного изгибающего момента  $M$  вычисляют лишь для тех сечений, в которых на эпюрах  $M_y$  и  $M_z$  есть переломы. Эти величины откладывают в масштабе по одну сторону на эпюре  $M$  и соединяют прямой линией.

Далее строим эпюру  $M_{кр} = M_x$  (рис. 336, е) и отыскиваем опасные сечения, в которых одновременно велики  $M$  и  $M_{кр}$ . Сопоставляя эпюры, построенные в одном масштабе, находим, что опасными будут сечения 1—1 и 2—2.

Теперь в опасном сечении нужно найти опасные точки. Легко определяем положение нейтральной линии ( $\beta = \alpha$ ) и строим эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  от результирующего изгибающего момента  $M$  (рис. 337), которые изменяются пропорционально расстоянию точек

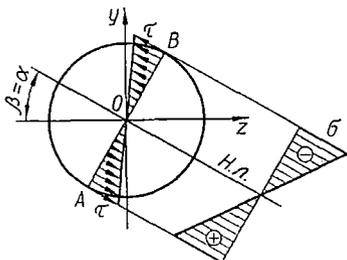


Рис. 337.

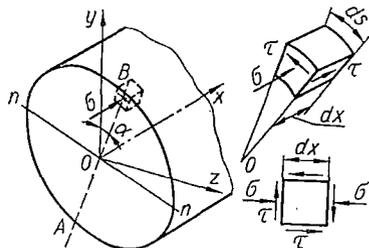


Рис. 338.

от нейтральной линии. Очевидно, опасными являются точки  $A$  и  $B$ , наиболее удаленные от нейтральной линии, — в них одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}; \quad (12.34)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (12.35)$$

У наиболее опасной точки  $B$  выделим элемент (рис. 338). По четырем граням его действуют касательные напряжения, а к двум из этих граней приложены еще и нормальные напряжения. Остальные две грани свободны от напряжений. Таким образом, при изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии. Совершенно аналогичные напряжения на гранях мы имели при изучении главных напряжений в изгибаемом брусе (гл. X), поэтому здесь главные напряжения нужно определять по тем же формулам:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \quad (12.36)$$

Разница между выражениями (10.30) и (12.36) лишь в том, что в последнем случае касательные напряжения вызываются крутящим моментом, а при изгибе они вызывались поперечной силой.

Заметим, что в данном случае сложного напряженного состояния влиянием касательных напряжений от поперечных сил пренебрегаем, так как они значительно меньше касательных напряжений, вызванных кручением.

Для проверки прочности элемента, выделенного у опасной точки, нужно, выбрав соответствующую теорию прочности, воспользоваться одной из формул § 62, например формулами (10.35), (10.34):

по теории Мора

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (12.37)$$

по IV теории

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (12.38)$$

Напомним, что в выражении (12.37)  $m$  — это отношение временных сопротивлений материала при растяжении и при сжатии. Если  $m < 1$ , то формула применима для хрупких материалов, а если  $m = 1$ , то для пластичных. Формула (12.38) применима только к пластичным материалам.

Подставляя в формулы (12.37), (12.38) выражения (12.34), (12.35) для напряжений и учитывая, что  $W_p = 2W$ , получим:

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{\frac{1-m}{2} \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]; \quad (12.39)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{\sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (12.40)$$

Числители этих формул представляют собой приведенные моменты, действие которых эквивалентно совместному действию трех моментов (согласно принятой теории прочности). Следовательно,

$$M_{\text{прМ}} = \frac{1-m}{2} \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad (12.41)$$

$$M_{\text{прIV}} = \sqrt{0,75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}. \quad (12.42)$$

В случае необходимости подобным же образом можно получить формулы для приведенных моментов и по другим теориям прочности.

Нетрудно заметить, что теперь условия прочности (12.37), (12.38) можно заменить одной простой формулой

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (12.43)$$

Таким образом, при совместном действии изгиба с кручением стержни круглого сечения рассчитывают на изгиб от приведенного момента  $M_{пр}$ .

Решая неравенство (12.43) относительно  $W$ , получаем формулу для определения момента сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{пр}}{[\sigma]} \quad (12.44)$$

и диаметра круглого вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{пр}}{\pi [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{10M_{пр}}{[\sigma]}}. \quad (12.45)$$

Заметим, что приведенные формулы полностью применимы и к стержням кольцевого сечения.

Рассмотрим простейший пример расчета вала на изгиб с кручением. Более подробно этот вопрос изучается в курсе «Детали машин».

*Пример 53.* На вал (рис. 339) насажены три зубчатых колеса. Колеса нагружены силами  $P_1 = 400 \text{ кг}$ ,  $P_2 = 300 \text{ кг}$ ,  $P_3 = 200 \text{ кг}$ , причем сила  $P_1$  вертикальна, а силы  $P_2$  и  $P_3$  — горизонтальные. Диаметры зубчатых колес следующие:  $D_1 = 100 \text{ мм}$ ,  $D_2 = 300 \text{ мм}$ ,  $D_3 = 250 \text{ мм}$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 600 \text{ кг/см}^2$ . Подобрать диаметр вала по четвертой теории прочности.

Заменяем действующую нагрузку статически эквивалентной системой сил.

Перенесем силы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  на ось вала, заменяя каждую из них силой, приложенной в точке  $B$ ,  $C$  или  $D$  соответственно, и скручивающей парой сил  $M_1 = \frac{1}{2} P_1 D_1$ ;  $M_2 = \frac{1}{2} P_2 D_2$ ;  $M_3 = \frac{1}{2} P_3 D_3$  соответственно. Таким образом, получаем расчетную схему (рис. 339). На схеме сразу указаны как значения приложенных внешних нагрузок ( $P_i$ ,  $M_{ki}$ ), так и величины вызванных ими опорных реакций.

Рассматривая отдельно силы в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 340, а и б), строим эпюры изгибающих моментов. Для построения суммарной эпюры моментов  $M$  вычисляем ординаты в характерных точках по формуле (12.33):

в сечении  $B$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1600^2 + 500^2} = \sqrt{2\,810\,000} = 1676 \text{ кг}\cdot\text{см};$$

в сечении  $C$

$$M = \sqrt{4400^2 + 5625^2} = \sqrt{51\,000\,625} = 7142 \text{ кг}\cdot\text{см};$$

в сечении  $D$

$$M = \sqrt{6400^2 + 2500^2} = \sqrt{47\,210\,000} = 6871 \text{ кг}\cdot\text{см}.$$

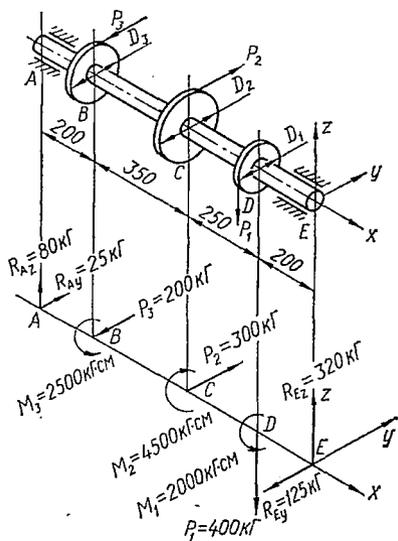


Рис. 339.

Эпюра  $M$ , построенная по этим данным, приведена на рис. 340, а. Как указывалось выше, на участках  $BC$  и  $CD$  такая эпюра имеет завышенные значения ординат (действительные значения показаны штриховой линией).

Рассматривая действующие на вал моменты, строим эпюру крутящих моментов (рис. 340, з).

Сопоставляя эпюры  $M$  и  $M_{кр}$ , находим, что опасным является сечение  $I-I$ , расположенное слева от точки  $C$ , где одновременно действуют  $M = 7142 \text{ кг}\cdot\text{см}$  и  $M_{кр} = 2500 \text{ кг}\cdot\text{см}$ .

Согласно IV теории прочности приведенный момент вычислим по формуле (12.42). Получим:

$$M_{пр} = \sqrt{0,75 \cdot 2500^2 + 7142^2} = \sqrt{55\,688\,125} = 7463 \text{ кг}\cdot\text{см}.$$

Подставляя приведенный момент в формулу (12.44), находим требуемый осевой момент сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{пр}}{[\sigma]} = \frac{7463 \text{ кг}\cdot\text{см}}{600 \text{ кг}/\text{см}^2} = 12,44 \text{ см}^3$$

и, положив  $W \approx 0,1 d^3$ , вычисляем необходимый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 12,44} = \sqrt[3]{124,4} = 4,99 \text{ см}.$$

Округлив до ближайшего стандартного диаметра, принимаем  $d = 50 \text{ мм}$ .

**Брус прямоугольного сечения.** На практике часто встречаются стержни некруглого сечения, подверженные действию крутящих и изгибающих моментов. В качестве примера рассмотрим брус прямоугольного сечения (рис. 341, а), нагруженный силами  $P_1$  и  $P_2$ , вызывающими в поперечных сечениях изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , а также крутящий момент  $M_x$ . Расчет выполняем в такой последовательности.

Раскладываемые заданные нагрузки (силы  $P_1$  и  $P_2$ ) на составляющие вдоль координатных осей и приводим их к оси вала; при этом получаем в поперечных сечениях, в плоскостях которых находятся точки приложения сил, внешние скручивающие моменты  $M_{к1} = M_{1x}$  и  $M_{к2} = M_{2x}$ .

Полученная таким образом расчетная схема представлена на рис. 341, б.

Для того чтобы установить положение опасного сечения, строим эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ , а также эпюру крутящих моментов (рис. 341, в).

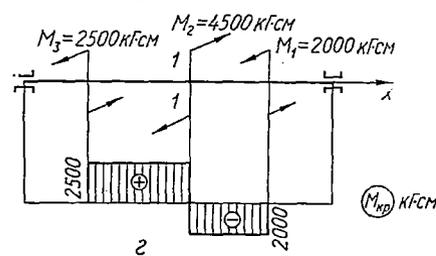
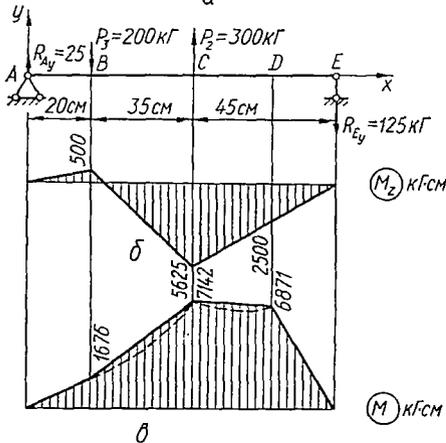
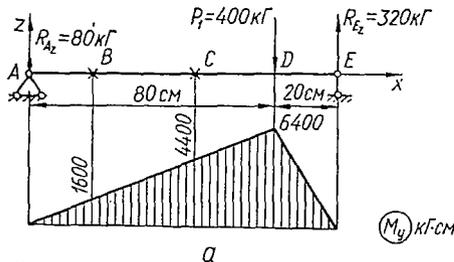


Рис. 340.

Сопоставление эпюр показывает, что наиболее опасным является сечение 1—1 бруса, расположенное левее точки приложения силы  $P_2$ . В этом сечении действуют наибольшие изгибающие моменты  $M_z$ ,  $M_y$  и максимальный крутящий момент  $M_{кр}$ . Чтобы проверить прочность бруса, нужно в опасном сечении найти опасную точку, вычислить для нее эквивалентное напряжение (по одной из теорий прочности) и сопоставить его с допускаемым напряжением.

Для нахождения опасной точки сечения строим эпюры напряжений от всех силовых факторов (рис. 342, б—е):  $\sigma_x(M_z)$ ;  $\sigma_x(M_y)$ ;  $\tau_{zx}(Q_z)$ ;  $\tau_{yx}(Q_y)$ ;  $\tau(M_{кр})$ .

Эпюра  $\tau(M_{кр})$  для длинной стороны контура имеет максимум, который обозначим  $\tau_{\max}(M_{кр})$ . Наибольшую ординату эпюры  $\tau(M_{кр})$  на короткой стороне обозначим  $\tau'(M_{кр})$ . Эти напряжения можно рассчитать по известным формулам кручения брусьев прямоугольного сечения (гл. IX):

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(M_{кр}) &= \tau_L = \tau_N = \frac{M_x}{\alpha h b^3}; \\ \tau'(M_{кр}) &= \tau_M = \tau_K = \gamma \tau_{\max}(M_x). \end{aligned} \quad (12.46)$$

Эпюры нормальных и касательных напряжений наглядно показывают, что в отличие от круглого сечения в рассматриваемом случае наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_x$  и наибольшие касательные напряжения  $\tau(Q)$  и  $\tau(M_{кр})$  имеют место не в одной и той же точке.

Следовательно, для выявления самой опасной точки в сечении нужно сопоставить эквивалентные напряжения в нескольких опасных точках. Обычно считают достаточным рассмотреть три точки сечения: одну угловую точку (А или С), одну точку посередине длинной стороны прямоугольника (L или N) и одну точку посередине короткой стороны прямоугольника (М или К).

Элемент, выделенный в окрестности точки С (при принятых на рис. 342, а направлениях  $M_y$  и  $M_z$ ), находится в условиях простого растяжения напряжениями, равными сумме нормальных напряжений от  $M_y$  и  $M_z$ . Поэтому условие прочности для этой точки должно быть записано как для случая линейного напряженного состояния:

$$\sigma_c = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12.47)$$

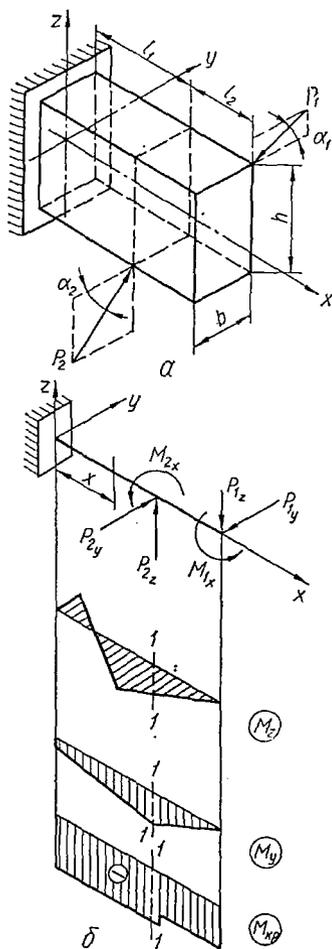


Рис. 341.

Элемент в окрестности точки  $A$  также находится в условиях линейного напряженного состояния — простого сжатия, так как  $\sigma_A$  отличается от  $\sigma_C$  только знаком. Если материал бруса имеет разные допускаемые напряжения для растяжения и для сжатия, то проверять прочность по формуле (12.47) необходимо в каждой из этих точек.

Элементы в окрестности точек  $L$  и  $K$  находятся в плоском напряженном состоянии и, следовательно, главные напряжения в них, как

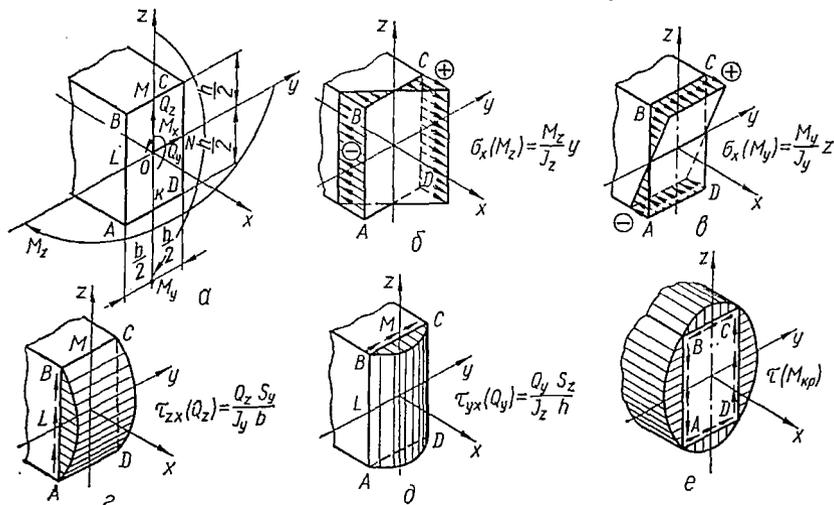


Рис. 342.

и в круглом брус, можно вычислить по формуле (12.36). В общем случае касательные напряжения, входящие в формулу (12.36), следует вычислять как от действия крутящего момента  $M_{кр}$ , так и от действия поперечных сил:

$$\begin{aligned} \tau_L &= \frac{M_{кр}}{ahb^2} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{bh}; \\ \tau_K &= \gamma \frac{M_{кр}}{ahb^2} \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh}. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Однако касательные напряжения от поперечных сил  $Q_y$  и  $Q_z$ , как указывалось, обычно бывают малы, а поэтому в большинстве случаев влиянием их можно пренебречь.

Для вычисления эквивалентных напряжений в точках  $L$  и  $K$  подставляем значения нормальных и касательных напряжений в формулы (12.37) и (12.38). Одновременно получим и соответствующие условия прочности (по IV теории и по теории Мора):

в точке  $L$

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{ahb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.49)$$

$$\sigma_{эквM} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{M_z}{W_z} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{ahb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.50)$$

в точке  $K$

$$\sigma_{\text{экв}V} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{\text{кр}}}{ahb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.51)$$

$$\sigma_{\text{экв}M} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_{\text{кр}}}{ahb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.52)$$

Знаки моментов при подстановке их в уравнения (12.49) — (12.52) не имеют значения, так как в эти формулы входят квадраты моментов.

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках ( $C$ ,  $L$  и  $K$ ) по формулам (12.47) и (12.49)—(12.52), причем в каждом отдельном случае положение наиболее опасной точки зависит от конкретного соотношения величин моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Для иллюстрации методики расчета рассмотрим числовой пример.

*Пример 54.* Проверить прочность бруса (рис. 341, а) по IV теории прочности, если силы, действующие на брус, таковы:  $P_1 = 721 \text{ кг}$ ;  $P_2 = 1340 \text{ кг}$ ; с осью  $y$  они составляют углы  $\alpha_1 = 33^\circ 41'$  и  $\alpha_2 = 26^\circ 34'$ ; размеры поперечного сечения  $h = 12 \text{ см}$ ;  $b = 8 \text{ см}$ ; длины участков  $l_1 = 300 \text{ см}$ ,  $l_2 = 200 \text{ см}$ . Сила  $P_1$  приложена к рычагу, прикрепленному в торцевом сечении бруса. Длина рычага  $d = 100 \text{ см}$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ .

Расчетная схема почти совпадает с рассмотренной выше (рис. 341, б).

Вычисляем составляющие нагрузок вдоль координатных осей:

$$P_{1y} = P_1 \cos \alpha_1 = 721 \cdot 0,832 = 0,6T;$$

$$P_{2y} = P_2 \cos \alpha_2 = 1340 \cdot 0,894 = 1,2T;$$

$$P_{1z} = P_1 \sin \alpha_1 = 721 \cdot 0,555 = 0,4T;$$

$$P_{2z} = P_2 \sin \alpha_2 = 1340 \cdot 0,447 = 0,6T.$$

Приведя нагрузки к оси, получаем скручивающие моменты

$$M_{\text{кр}1} = -P_{1y} \left(d + \frac{h}{2}\right) + P_{1z} \frac{b}{2} = -600 \cdot 106 + 400 \cdot 4 = -62\,000 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$M_{\text{кр}2} = -P_{2y} \frac{h}{2} + P_{2z} \frac{b}{2} = -1200 \cdot 6 + 600 \cdot 4 = -4800 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Эпюры крутящих и изгибающих моментов построены на рис. 343.

Сопоставление эпюр показывает, что опасным является сечение с абсциссой  $x = l_1 = 300 \text{ см}$ ; действующие в этом сечении моменты

$$M_{\text{кр}} = 66\,800 \text{ кг} \cdot \text{см}; \quad M_y = 80\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}; \quad M_z = 120\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

В соответствии с формулами (12.47), (12.49) и (12.51) составим условия прочности для трех опасных точек  $C$ ,  $L$  и  $K$  сечения (значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\gamma$  приведены в табл. 14 — с. 217). Получим:

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{80\,000}{192} + \frac{120\,000}{128} = 417 + 938 = \\ &= 1355 \text{ кг/см}^2 < 1400 \text{ кг/см}^2; \end{aligned}$$

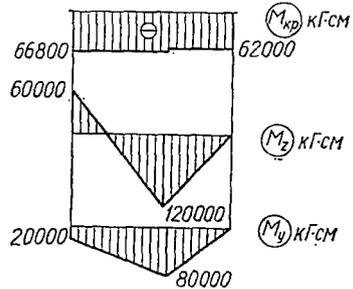


Рис. 343.



на прочность. Принять допускаемые напряжения  $[\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2$ . Расчет вести по IV теории прочности.

От заданной конструкции переходим к расчетной схеме. Прежде всего необходимо определить реакцию в подшипниках, а также вращающий момент на маховике. Для этого разложим силу  $P_2$  на горизонтальную и вертикальную составляющие ( $P_{2y}$  и  $P_{2z}$ ):

$$P_{2y} = P_2 \cos \alpha = 1 \cdot 0,966 = 0,966T;$$

$$P_{2z} = P_2 \sin \alpha = 1 \cdot 0,259 = 0,259T.$$

Реакции в опорах также можно представить в виде двух проекций—  $R_{A_y}$ ,  $R_{A_z}$  и  $R_{B_y}$ ,  $R_{B_z}$ . Их величины находим из уравнений равновесия:

$$\sum M_A^{(xOy)} = 0, \quad 66 \cdot 16 - R_{B_y} \cdot 43 = 0; \quad R_{B_y} = 0,359T;$$

$$\sum M_B^{(xOy)} = -0,966 \cdot 27 + R_{A_y} \cdot 43 = 0; \quad R_{A_y} = 0,607T;$$

$$\sum M_A^{(xOz)} = 0,5 \cdot 12 + 0,259 \cdot 16 - R_{B_z} \cdot 43 = 0; \quad R_{B_z} = 0,236T;$$

$$\sum M_B^{(xOz)} = 0,5 \cdot 55 - R_{A_z} \cdot 43 - 0,259 \cdot 27 = 0; \quad R_{A_z} = 0,477T;$$

$$\sum M_x = -M + 0,966 \cdot 9 = 0; \quad M = 8,69T \cdot \text{см}.$$

Переходим к построению эпюр изгибающих моментов. Вычислим ординаты эпюры моментов  $M_y$  (в плоскости  $xOz$ ):

для I участка ( $0 \leq x \leq 12 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,5x; \quad M_y(0) = 0; \quad M_y(12) = -6T \cdot \text{см};$$

для II участка ( $12 \text{ см} \leq x \leq 23,5 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,5x + 0,477(x - 12); \quad M_y(12) = -6T \cdot \text{см};$$

$$M_y(23,5) = -6,26T \cdot \text{см};$$

для III участка ( $0 \leq x \leq 9 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,5 \cdot 23,5 + 0,477 \cdot 11,5 = -6,26T \cdot \text{см};$$

для IV участка ( $23,5 \text{ см} \leq x \leq 28 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,5x + 0,477(x - 12); \quad M_y(23,5) = -6,26T \cdot \text{см};$$

$$M_y(28) = -6,37T \cdot \text{см};$$

для V участка ( $28 \text{ см} \leq x \leq 32,5 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,236(55 - x); \quad M_y(28) = -6,37T \cdot \text{см};$$

$$M_y(32,5) = -5,31T \cdot \text{см};$$

для VI участка ( $0 \leq x \leq 9 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,236 \cdot 22,5 = -5,31T \cdot \text{см};$$

для VII участка ( $32,5 \text{ см} \leq x \leq 55 \text{ см}$ )

$$M_y(x) = -0,236(55 - x); \quad M_y(32,5) = -5,31T \cdot \text{см}; \quad M_y(55) = 0.$$

Откладывая вычисленные ординаты, строим эпюру  $M_y$  (рис. 344, б).

Аналогично вычисляем ординаты и строим эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_x$ , действующих в плоскостях  $xOy$  и  $yOz$ , а также эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$ .

В результате сопоставления эпюр устанавливаем, что опасными являются следующие сечения:

для вала — сечение у нижнего конца левой щеки (рис. 345), причем

$$M_{кр} = 8,69 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_y = 6,26 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_z = 6,98 \text{ Т} \cdot \text{см};$$

для щек — нижнее сечение левой щеки (рис. 346), причем

$$M_z = 8,69 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_y = 6,26 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_{кр} = 6,98 \text{ Т} \cdot \text{см};$$

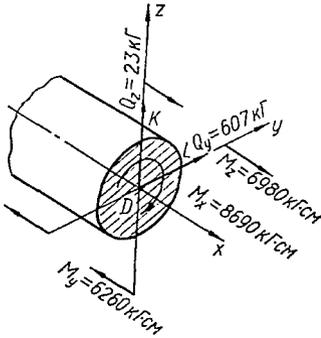


Рис. 345.

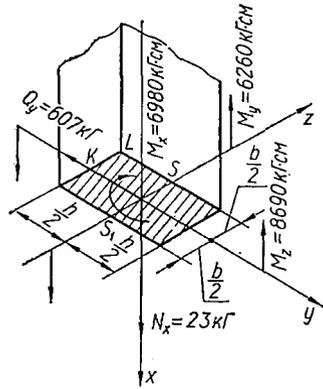


Рис. 346.

для шатунной шейки — среднее ее сечение, причем

$$M_{кр} = 3,23 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_y = 6,37 \text{ Т} \cdot \text{см}; M_z = 9,71 \text{ Т} \cdot \text{см}.$$

Определение диаметров вала и шатунной шейки. Расчет на прочность круглого бруса при изгибе с кручением по IV теории производится по формуле (12.40), откуда

$$W \geq \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 M_x^2}}{[\sigma]} = \frac{M_{пр}}{[\sigma]}. \quad (12.53)$$

При  $[\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2 = 0,8 \text{ Т/см}^2$  вал должен иметь момент сопротивления

$$W = \frac{\sqrt{6,26^2 + 6,98^2 + 0,75 \cdot 8,69^2}}{0,8} = \frac{\sqrt{144,54}}{0,8} \approx \frac{12}{0,8} = 15 \text{ см}^3.$$

Приняв приближенно  $W \approx 0,1 D^3$ , найдем диаметр вала:

$$D \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 15} = \sqrt[3]{150} \approx 5,31 \text{ см}.$$

Шатунная шейка должна иметь момент сопротивления

$$W \geq \frac{\sqrt{6,37^2 + 9,71^2 + 0,75 \cdot 3,23^2}}{0,8} \approx 14,95 \text{ см}^3,$$

тогда ее диаметр

$$d \geq \sqrt[3]{10 \cdot 14,92} \approx 5,31 \text{ см.}$$

Назначаем для шатунной шейки и вала одинаковый диаметр сечения:  $d = D = 54 \text{ мм.}$

Проверочный расчет щеки. В соответствии с условием задачи подбираем размеры сечения щеки такими:  $h = 1,25 D = 1,25 \times 54 = 67,5 \approx 68 \text{ мм}$ ;  $b = 0,6h \approx 41 \text{ мм}$ . Переходя к проверке прочности принятого сечения щеки, вычислим его геометрические характеристики:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,1 \cdot 6,8^3}{12} = 107,4 \text{ см}^4; W_z = 31,6 \text{ см}^3;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6,8 \cdot 4,1^3}{12} = 39,0 \text{ см}^4; W_y = 19,0 \text{ см}^3.$$

Проверять на прочность в опасном сечении прямоугольную щеку, работающую на изгиб с кручением (рис. 346), следует в нескольких точках —  $K$ ,  $S$  и  $L$ .

В точке  $K$  по формуле (12.51)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3 \left(\gamma \frac{M_x}{hb^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{8690}{31,6}\right)^2 + 3 \left(0,839 \cdot \frac{6980}{0,234 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2}\right)^2} = \sqrt{214\,558} = \\ &= 464 \text{ кг/см}^2 < [\sigma]. \end{aligned}$$

В точке  $S$  по формуле (12.49)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_x}{ahb^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{6260}{19,0}\right)^2 + 3 \left(\frac{6980}{0,234 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2}\right)^2} = \sqrt{312\,604} = 559 \text{ кг/см}^2 < [\sigma]. \end{aligned}$$

В точке  $L$  по формуле (12.47)

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{8690}{31,6} + \frac{6260}{19,0} \approx 275 + 328 = 603 \text{ кг/см}^2 < [\sigma].$$

Таким образом, самой опасной является точка  $L$ , но и в ней наибольшее нормальное напряжение меньше допустимого.

Оценка влияния поперечных и продольных сил. Учет продольных и поперечных сил при подборе сечения чрезвычайно усложнил бы расчет. Так как дополнительные напряжения от действия поперечных сил обычно невелики, то при подборе сечения ими пренебрегаем. Наиболее просто оценить влияние их, проверяя сечение после его подбора.

В опасном сечении вала (рис. 345), кроме учтенных при подборе сечения моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ , действуют еще поперечные силы

$Q_y = 607 \text{ кг}$  и  $Q_z = 23 \text{ кг}$ . Наибольшие касательные напряжения от этих сил будут соответственно в точках  $K$  и  $L$ :

в точке  $K$

$$\tau_{y\text{макс}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{607}{3,14 \cdot 2,7^2} = 35,4 \text{ кг/см}^2;$$

в точке  $L$

$$\tau_{z\text{макс}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_z}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{23}{3,14 \cdot 2,7^2} = 1,34 \text{ кг/см}^2.$$

Опасную точку сечения найдем, определив положение нейтральной линии. Последняя перпендикулярна к плоскости действия результирующего изгибающего момента

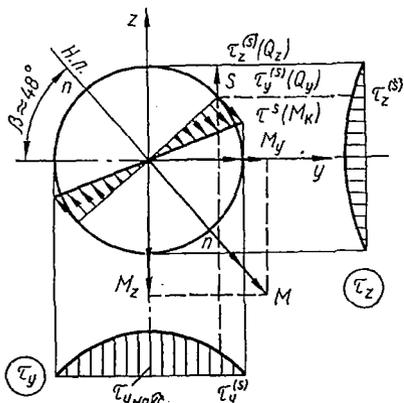


Рис. 347.

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} =$$

$$= \sqrt{6260^2 + 6980^2} = 9375 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Направление нейтральной линии легко определить графически (рис. 347), так как оно совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ .

Опасной точкой в сечении является точка  $S$  (рис. 347). Естественно, что в этой точке касательные напряжения  $\tau_y^{(S)}$  и  $\tau_z^{(S)}$  будут значительно меньше вычисленных выше максимальных значений. Примем приближенно и с некоторым

запасом, что в опасной точке  $S$  к касательным напряжениям  $\tau_S$  от крутящего момента  $M_K$

$$\tau'_S = \frac{M_K}{W_p} = \frac{8690 \cdot 16}{3,14 \cdot 5,4^3} = 282 \text{ кг/см}^2$$

добавляется следующее касательное напряжение  $\tau''_S$  от поперечных сил  $Q_y$  и  $Q_z$ :

$$\tau''_S \approx 0,7 (\tau_{y\text{макс}} - \tau_{z\text{макс}}) \approx 24 \text{ кг/см}^2.$$

Вычислим эквивалентное напряжение в точке  $S$  по IV теории:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3(\tau'_S + \tau''_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{9375}{15,45}\right)^2 + 3(282 + 24)^2} = \\ &= \sqrt{606^2 + 3 \cdot 306^2} = 804 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Эквивалентное напряжение в той же точке без учета влияния поперечных сил

$$\sigma'_S = \sqrt{606^2 + 3 \cdot 282^2} \approx 779 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, если учесть действие поперечных сил, то напряжения увеличатся на

$$\frac{804 - 779}{804} \cdot 100\% \approx 3\%.$$

В опасном сечении щеки (рис. 346) действует только поперечная сила  $Q_y = 607 \text{ кг}$ ; поперечная сила  $Q_z = 0$ . Поперечная сила  $Q_y$  не дает касательных напряжений в наиболее опасной точке сечения  $L$ . Поэтому рассмотрим ее влияние в точке  $S_1$ , где вызванные ею касательные напряжения достигают наибольшей величины

$$\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{607}{6,8 \cdot 4,1} = 32,7 \text{ кг/см}^2$$

и совпадают по направлению с касательными напряжениями от воздействия крутящего момента  $M_x$ . Величина последних

$$\tau_{y\text{макс}} = \frac{M_x}{\alpha hb^2} = \frac{6980}{0,236 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2} = 257 \text{ кг/см}^2.$$

Вычислим эквивалентное напряжение по IV теории прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_y + \tau_{y\text{макс}})^2} = \sqrt{328^2 + 3(32,7 + 257)^2} = \\ &= \sqrt{359\,700} = 600 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

В той же точке напряжения без учета  $Q_y$  нами уже вычислены:

$$\sigma'_{\text{нр}} = 559 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, поперечные силы увеличивают напряжения в точке  $S_1$  на

$$\frac{605 - 559}{605} \cdot 100\% = 7,6\%.$$

Если в сечении действует осевая сила, изгибающие моменты в главных плоскостях и крутящий момент, то условие прочности, например по IV теории, в точке  $K$  (рис. 346) имеет вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{N_x}{F}\right)^2 + 3\left(\tau \frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.54)$$

Аналогично в точке  $S$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_x}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.55)$$

В рассматриваемом опасном сечении щеки действует продольная растягивающая сила  $N_x = 23 \text{ кг}$ . Вызываемое ею нормальное растягивающее напряжение

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} = \frac{23}{6,8 \cdot 4,1} \approx 0,83 \text{ кг/см}^2$$

настолько мало, что им можно пренебречь.

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### § 78. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Одной из важнейших задач сопротивления материалов является оценка жесткости конструкции, т. е. степени ее искажения под действием нагрузки, смещения связей, изменения температуры. Для решения этой задачи необходимо определить перемещения (линейные и угловые) любым образом нагруженной упругой системы (балки, рамы, криволинейного стержня, фермы и т. д.). Та же задача возникает при расчете конструкций на динамические нагрузки и при раскрытии статической неопределимости системы. В последнем случае, как уже отмечалось, составляются так называемые уравнения совместности деформаций, содержащие перемещения определенных сечений.

В предыдущих разделах рассматривались некоторые частные способы определения перемещений, удобные при решении простейших задач. Ниже излагается общий метод определения перемещений в стержневых системах, в основе которого лежат два основных принципа механики: начало возможных перемещений и закон сохранения энергии.

Как известно из теоретической механики, работа постоянной силы  $P$  на перемещении  $\Delta$  по ее направлению равна произведению величины силы на указанное перемещение:

$$A = P \Delta.$$

В задачах сопротивления материалов и строительной механики внешняя нагрузка отличается большим разнообразием и обычно представляет собой группы сил. Выражение для работы группы постоянных сил также можно представить в виде произведения двух величин:

$$A = P \Delta_P, \quad (13.1)$$

в котором множитель  $P$  зависит только от сил группы и называется *обобщенной силой*, а  $\Delta_P$  зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, под обобщенной силой будем понимать любую нагрузку (сосредоточенные силы, сосредоточенные пары, распределенную нагрузку), а под обобщенным перемещением — тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу.

Рассмотрим некоторые примеры часто встречающихся обобщенных сил и перемещений.

1. На рис. 348 показана обобщенная сила, состоящая из двух равных по величине противоположных сил  $P$ , приложенных в точках  $A$  и  $B$  и направленных по одной прямой. Предположим, что точки приложения сил переместились в направлении  $BA$  на отрезки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Очевидно, работа системы постоянных сил на этих перемещениях

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P, \quad (13.2)$$

где  $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$  — изменение расстояния  $l$  между точками приложения сил.

Следовательно, в данном примере  $P$  — обобщенная сила, а изменение  $\Delta l$  длины отрезка  $AB$  — обобщенное перемещение.

2. Пусть группа сил состоит из пары сил, момент которой  $M = Pa$  (рис. 349). Допустим, что элемент  $AB$  повернулся на угол  $d\theta$ . Пути, пройденные силами пары по направлению их действия,

$$AA_1 = OAd\theta; \quad BB_1 = OBd\theta.$$

Суммарная работа обеих сил

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB)d\theta = Pad\theta = Md\theta. \quad (13.3)$$

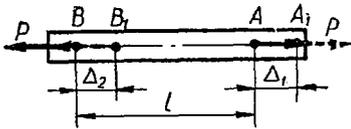


Рис. 348.

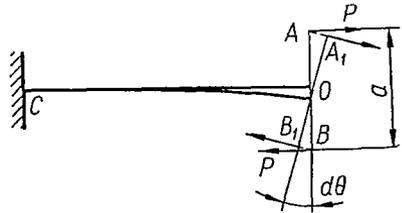


Рис. 349.

Следовательно, если обобщенной силой является момент  $M$  пары, то обобщенным перемещением будет угол поворота  $d\theta$ .

Легко также показать, что при действии на элементы  $AB$  и  $CD$  (рис. 350) двух равных и противоположно направленных пар с мо-

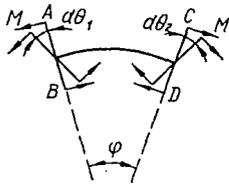


Рис. 350.

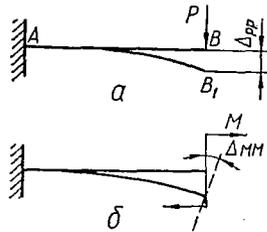


Рис. 351.

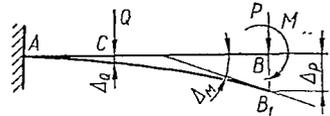


Рис. 352.

ментом  $M$  обобщенной силой является момент пары  $M$ , а обобщенным перемещением — изменение угла  $\varphi$  между элементами  $AB$  и  $CD$ . Иначе:

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

Условимся в дальнейшем обобщенные перемещения (как линейные, так и угловые) какого-либо сечения стержня обозначать буквами  $\Delta$  или  $\delta$  с двумя индексами. Первый индекс отмечает точку и направление перемещения, второй — указывает причину, вызвавшую искомое перемещение. Например,  $\Delta_{PP}$  обозначает перемещение точки приложения силы  $P$  по направлению ее действия, вызванное этой же силой (рис. 351, а).

На рис. 351, б изображена консоль, нагруженная на свободном конце сосредоточенным моментом. Очевидно, угол поворота сечения, где приложен момент, следует обозначить через  $\Delta_{MM}$ . Здесь первый индекс указывает перемещение по направлению момента  $M$ , т. е. угол поворота.

Для обозначения полного перемещения точки, вызванного несколькими усилиями, при  $\Delta$  сохраняется только первый индекс. Так, полный прогиб и угол поворота сечения  $B$  балки, показанной на рис. 352, следует обозначить соответственно через  $\Delta_P$  и  $\Delta_M$ , прогиб сечения  $C$  — через  $\Delta_Q$ .

Рассматривая достаточно жесткие линейно деформируемые конструкции (т. е. системы, деформации которых следуют закону Гука), можно на основании принципа независимости действия сил определять полные перемещения точек как сумму перемещений, вызванных отдельными нагрузками.

Для показанной на рис. 352 балки прогиб и угол поворота сечения  $B$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta_P &= \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \\ \Delta_M &= \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM},\end{aligned}\quad (13.4)$$

где  $\Delta_{PP}$  — перемещение точки  $B$  по направлению силы  $P$  от силы  $P$ ;

$\Delta_{PQ}$  — то же от силы  $Q$ ;

$\Delta_{PM}$  — то же от момента  $M$ ;

$\Delta_{MP}$  — перемещение сечения  $B$  по направлению пары  $M$  (угол поворота) от силы  $P$ ;

$\Delta_{MQ}$  — то же от силы  $Q$ ;

$\Delta_{MM}$  — то же от пары  $M$ .

Перемещение, вызванное единичной силой ( $\bar{P} = 1$ ) или единичной парой ( $\bar{M} = 1$ ), будем обозначать буквой  $\delta$  и называть *удельным*. При этом условимся считать единичные силы или пары, вызывающие перемещение  $\delta$ , безразмерными.

Если единичная сила  $\bar{P} = 1$  вызвала перемещение  $\delta_P$ , то на основании принципа независимости действия сил полное перемещение, вызванное силой  $P$ ,

$$\Delta_P = P\delta_P.\quad (13.5)$$

Из выражения (13.5) легко установить размерность удельного перемещения:

$$[\delta_P] = \frac{\text{размерность обобщенного перемещения}}{\text{размерность обобщенной силы}}.\quad (13.6)$$

Заметим, что нагрузку, действующую на сооружение, обычно обозначают буквами  $P$ ,  $M$ ,  $X$  и т. д. с числовыми индексами (например,  $X_1$ ,  $X_2$ , ...). В этих случаях буквенные индексы при  $\Delta$  или  $\delta$  заменяют соответствующими числовыми, т. е. вместо  $\Delta_{X_1}$  пишут  $\Delta_1$ , ( $\Delta_2$ ,  $\delta_{12}$ , ...).

На рис. 353 показаны обозначения перемещений свободного конца рамы под действием различных усилий ( $P$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ). Полные перемещения сечения  $C$  в горизонтальном и вертикальном направлениях (т. е. в направлениях сил  $X_1$  и  $X_2$ ), а также угол поворота (перемещение по направлению  $X_3$ ) соответственно можно представить в виде

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 = \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 = \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}. \end{cases} \quad (13.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \quad \dots; \\ X_i\delta_{mi} = \Delta_{mi}. \end{aligned}$$

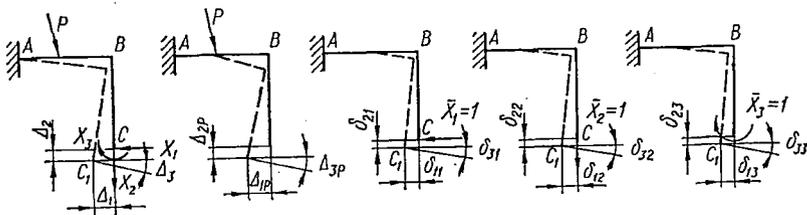


Рис. 353.

Для оценки размерности перемещений  $\delta_{mi}$  умножим последнее равенство на  $X_m$ . Тогда выражение

$$X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$$

имеет размерность работы ( $\kappa\Gamma \cdot \text{см}$ ). Отсюда

$$[\delta_{mi}] = \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{см}}{[X_m][X_i]}$$

Например, в формуле (13.7) размерность

$$[\delta_{13}] = \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{см}}{[X_1][X_3]} = \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{см}}{\kappa\Gamma \cdot \kappa\Gamma \cdot \text{см}} = \frac{1}{\kappa\Gamma}.$$

## § 79. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ

При деформировании конструкции различные точки ее перемещаются. Перемещаются также точки приложения внешних сил. В результате этого внешние силы совершают работу.

Вычислим работу некоторой обобщенной силы  $P$ , приложенной к любой упругой линейно деформируемой системе (рис. 354, а). Предполагается, что нагрузка возрастает от нуля до заданной величины достаточно медленно, чтобы при этом можно было пренебречь силами инерции перемещаемых масс. Такая нагрузка в дальнейшем именуется статической.

Пусть в данный момент силе  $P$  соответствует обобщенное перемещение  $\Delta$ . Бесконечно малое приращение силы на величину  $dP$  вызовет бесконечно малое приращение перемещения  $d\Delta$ . Очевидно, элементарная работа внешней силы, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка,

$$dA = (P + dP) d\Delta \approx Pd\Delta.$$

Полная работа, совершенная статически приложенной обобщенной силой  $P$ , вызвавшей обобщенное перемещение  $\Delta$ ,

$$A = \int_{\Delta} Pd\Delta. \quad (13.8)$$

Интеграл (13.8) представляет собой площадь диаграммы  $P - \Delta$  для данной конструкции (рис. 354, б).

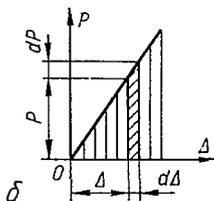
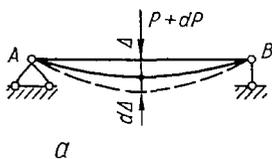


Рис. 354.

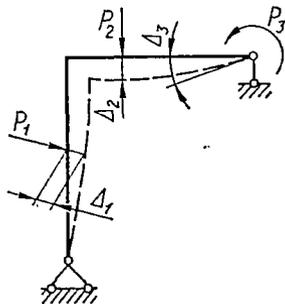


Рис. 355.

В линейно деформируемых системах перемещения пропорциональны величине силы (закон Гука):

$$\Delta = P\delta_{PP}, \quad (13.9)$$

где  $\delta_{PP}$  — перемещение, вызванное силой  $\bar{P} = 1$ .

Дифференцируем выражение (13.9):

$$d\Delta = dP\delta_{PP}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (13.8), найдем:

$$A = \delta_{PP} \int_0^P PdP = \frac{\delta_{PP}P^2}{2}.$$

Учитывая выражение (13.9), окончательно получим:

$$A = \frac{\delta_{PP}P^2}{2} = \frac{P\Delta}{2}. \quad (13.10)$$

Таким образом, действительная работа при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего ей обобщенного перемещения (теорема Клапейрона).

В случае статического действия на упругую систему нескольких обобщенных сил (рис. 355)  $P_1, P_2, \dots, P_n$  работа деформации равна,

полусумме произведений окончательного значения каждой силы на окончательное значение соответствующего суммарного перемещения:

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \quad (13.11)$$

и не зависит от порядка нагружения системы.

### § 80. РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ

При упругой деформации тела во всех деформируемых элементах развиваются *внутренние силы* — *силы упругого сопротивления*. Они также совершают работу. Вначале определим работу внутренних сил упругости при деформировании плоской стержневой системы.

Двумя смежными сечениями выделим из стержня элемент длиной  $ds$  (рис. 356). В общем случае для плоского изгиба действие удаленных частей стержня на оставленный элемент выражается равнодействующими осевыми силами  $N$ , поперечными  $Q$  и изгибающими моментами  $M$ . Эти

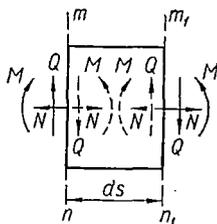


Рис. 356.

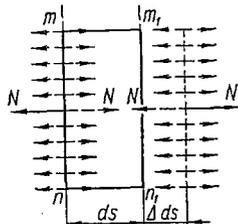


Рис. 357.

усилия, показанные на чертеже сплошными линиями, по отношению к выделенному элементу являются внешними.

Внутренние силы препятствуют развитию деформации, вызываемой внешними силами, равны им по величине и обратны по направлению. На рис. 356 равнодействующие внутренних сил показаны штриховыми линиями.

Учитывая направления внутренних сил по отношению к деформации, вызванной внешними силами, можно утверждать, что при нагружении тела суммарная работа внутренних сил всегда отрицательна.

Вначале вычислим работу, совершенную отдельно внутренними осевыми силами, поперечными силами и изгибающими моментами. Пусть элемент испытывает действие только осевых сил  $N$ , равномерно распределенных по сечению (рис. 357). Удлинение элемента в результате этого

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF},$$

где  $EF$  — жесткость поперечного сечения на растяжение — сжатие.

Работа постепенно возрастающих от нуля до величины  $N$  внутренних сил на этом перемещении выразится формулой

$$dW_N = -\frac{1}{2} N \Delta ds = -\frac{N^2 ds}{2EF} \quad (13.12)$$

Как указывалось, работа внутренних сил отрицательна, поэтому в формуле (13.12) поставлен знак минус.

Рассмотрим теперь элемент, находящийся под действием изгибающих моментов (рис. 358). В результате изгиба сечения  $mn$  и  $m_1n_1$  повернутся на углы  $d\theta$ . Моменты внутренних сил (показанные штриховыми линиями) на указанных перемещениях совершат работу

$$dW_M = -\frac{1}{2}Md\theta - \frac{1}{2}Md\theta = -\frac{1}{2}Md\varphi, \quad (13.13)$$

где  $d\varphi = 2d\theta$  — взаимный угол поворота сечений элемента. Как было показано в гл. X,

$$d\varphi = ds \frac{1}{\rho} = ds \frac{M}{EJ} = \frac{Mds}{EJ}.$$

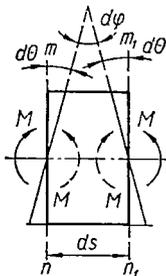


Рис. 358.

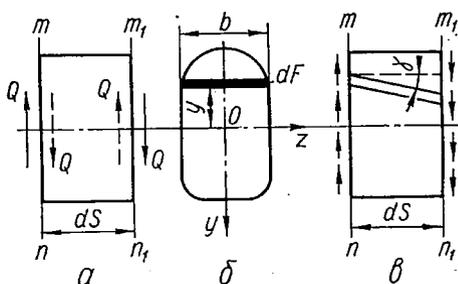


Рис. 359.

Таким образом,

$$dW_M = -\frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (13.14)$$

Вычислим, наконец, работу постепенно возрастающих внутренних поперечных сил  $Q$  (рис. 359, а). Как указывалось, поперечные силы являются равнодействующими распределенных в точках сечения касательных напряжений  $\tau$ . Последние в любой элементарной площадке  $dF$ , параллельной нейтральной линии (рис. 359, б), согласно формуле Журавского таковы:

$$\tau = \frac{QS}{J_z b},$$

где  $S$  — статический момент относительно нейтральной оси  $z$  части сечения, заключенной между уровнем полоски и краем сечения.

На основании закона Гука взаимный сдвиг двух соответствующих площадок  $dF$ , взятых на торцах  $mn$  и  $m_1n_1$  (рис. 359, в),

$$\gamma ds = \frac{\tau}{G} ds.$$

Следовательно, работа внутренних элементарных сил  $\tau dF$  при их нарастании от нуля до окончательного значения

$$-\frac{1}{2}\tau dF \gamma ds = -\frac{\tau^2 ds}{2G} dF.$$

Интегрируя в пределах сечения  $F$ , получим работу сил сдвига:

$$\begin{aligned} dW_Q &= - \int_F \frac{1}{2} \tau \gamma ds dF = - \int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF = \\ &= - \frac{Q^2 ds}{2GJ_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF = - k_y \frac{Q^2 ds}{2GF}, \end{aligned} \quad (13.15)$$

где  $k_y = \frac{F}{J_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;

$GF$  — жесткость поперечного сечения стержня при сдвиге.

Для прямоугольного сечения  $b \times h$

$$\begin{aligned} F &= bh; \quad J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad S_z = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right); \\ k_y &= \frac{9}{2h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 dy = 1,2. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Аналогично определяются значения коэффициента  $k$  и для других сечений. Например, для кругового сечения  $k = \frac{32}{27}$ , для прокатных профилей приближенно  $k = \frac{F}{F_c}$ , где  $F_c$  — площадь стенки.

В случае чистого сдвига касательные напряжения распределяются равномерно в точках сечения:

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Следовательно,

$$dW_Q = - \frac{1}{2} \int_F \tau \gamma ds dF = - \frac{1}{2} \tau F \gamma ds = - \frac{Q \gamma ds}{2} = - \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.17)$$

При одновременном действии осевых и поперечных сил, а также изгибающих моментов полную работу можно получить как сумму работ отдельных составляющих. Это объясняется тем, что работа каждого из этих усилий на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Например, при удлинении, вызванном силами  $N$ , поперечные сечения остаются плоскими и параллельными, а потому пары  $M$  и силы  $Q$  работы не производят. Аналогично силы  $N$  не производят работы на перемещениях, вызванных силами  $Q$  и парами  $M$ .

Таким образом, в рассмотренном случае полная элементарная работа внутренних сил

$$dW = - \frac{M^2 ds}{2EJ} - \frac{N^2 ds}{2EF} - k \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.18)$$

Интегрируя выражение (13.18) в пределах всего стержня и суммируя по всем стержням системы, получим формулу для работы внутренних сил в случае плоского изгиба:

$$W = -\sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.19)$$

Когда стержень подвергается деформации кручения, в сечениях, ограничивающих выделенный элемент длиной  $ds$ , действуют крутящие моменты  $M_{кр}$  (рис. 360), являющиеся по отношению к элементу внешними. Моменты сил упругости равны по величине моментам  $M_{кр}$  и направлены в противоположные стороны. Взаимный угол поворота сечений  $m_n$  и  $m_{n_1}$

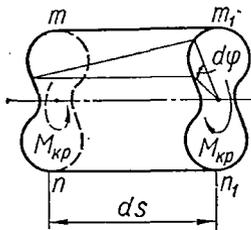


Рис. 360.

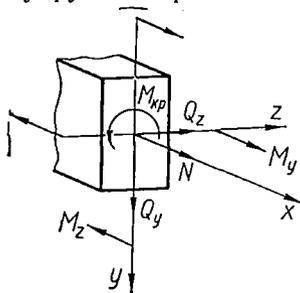


Рис. 361.

и направлены в противоположные стороны. Взаимный угол поворота сечений  $m_n$  и  $m_{n_1}$

$$d\varphi = \frac{M_{кр} ds}{GJ_k},$$

где  $GJ_k$  — жесткость поперечного сечения стержня при кручении.

Таким образом, при кручении элементарная

работа постепенно возрастающих внутренних сил

$$dW_{кр} = -\frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = -\frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k}. \quad (13.20)$$

Полная работа внутренних сил при кручении стержня

$$W_{кр} = -\int_s \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = -\int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k}. \quad (13.21)$$

Наконец, в общем случае действия сил на брус в сечениях имеем шесть силовых факторов (рис. 361): осевую силу  $N$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , крутящий момент  $M_{кр}$ , изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ .

Учитывая, что работа каждого из этих усилий на перемещениях, вызванных остальными усилиями, равна нулю, получаем следующую формулу для работы внутренних сил (сил упругости):

$$W = -\int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \int_s \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} - \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k} - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{2GF} - \int_s k_z \frac{Q_z^2 ds}{2GF}. \quad (13.22)$$

Заметим, что выражение (13.22) справедливо также и для криволинейных стержней малой кривизны.

## § 81. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К УПРУГИМ СИСТЕМАМ

Начало возможных перемещений, являясь общим принципом механики, имеет важнейшее значение для теории упругих систем. Применительно к ним этот принцип можно сформулировать следующим образом: *если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равна нулю*, т. е.

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \quad (13.23)$$

где  $P_i$  — внешние силы;  
 $\Delta_{im}$  — возможные перемещения этих сил;  
 $\sum P_i \Delta_{im}$  — работа внешних сил;  
 $W_{im}$  — работа внутренних сил.

Заметим, что в процессе совершения системой возможного перемещения величина и направление внешних и внутренних сил остаются неизменными. Поэтому при вычислении работ следует брать не половину, а полную величину произведения соответствующих сил и перемещений.

Учитывая малость деформаций и их линейную зависимость от нагрузок, *в качестве возможных перемещений можно принимать упругие перемещения, вызванные любым сист.м нагрузкой и происходящие без нарушения связей*. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется *возможной*, или *виртуальной*, работой.

Покажем, как определяется возможная работа внешних и внутренних сил, на примере плоской системы. Рассмотрим два состояния какой-либо системы, находящейся в равновесии (рис. 362). В состоянии  $a$  система деформируется обобщенной силой  $P_a$  (рис. 362, а), в состоянии  $b$  — силой  $P_b$  (рис. 362, б).

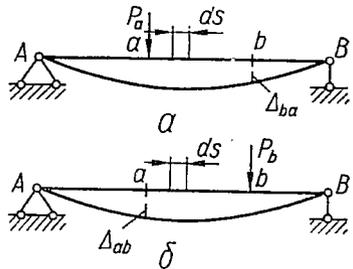


Рис. 362.

Очевидно, перемещения состояния  $b$  можно рассматривать как возможные для состояния  $a$ , и наоборот, перемещения состояния  $a$  являются возможными для состояния  $b$ .

Поэтому работа сил состояния  $a$  на перемещениях состояния  $b$  ( $A_{ab}$ ), равно как и работа сил состояния  $b$  на перемещениях состояния  $a$  ( $A_{ba}$ ), будет возможной. Указанные работы внешних сил соответственно

$$\begin{aligned} A_{ab} &= P_a \Delta_{ab}; \\ A_{ba} &= P_b \Delta_{ba}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Вычислим теперь возможную работу внутренних сил состояния  $a$  на перемещениях, вызванных нагрузкой состояния  $b$ . С этой целью рассмотрим произвольный элемент стержня длиной  $ds$  в обоих состо-

яниях. Для плоского изгиба действие удаленных частей на элемент выражается системой усилий  $N_a, Q_a, M_a$  (рис. 363, а). Внутренние усилия, действующие на элемент, имеют направления, противоположные внешним, и показаны штриховыми линиями.

На рис. 363, б показаны внешние усилия  $N_b, Q_b, M_b$ , действующие на элемент  $ds$  в состоянии  $b$ . Деформации элемента, вызванные этими усилиями, показаны на рис. 364.

Очевидно, удлинение элемента  $ds$ , вызванное силами  $N_b$ ,

$$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}.$$

Работа внутренних осевых сил  $N_a$  на этом возможном перемещении

$$-N_a (\Delta ds)_b = -\frac{N_a N_b ds}{EF}. \quad (13.25)$$

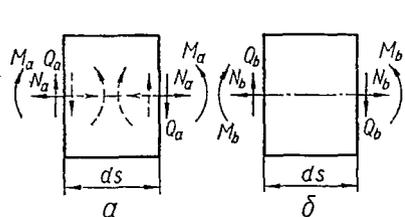


Рис. 363.

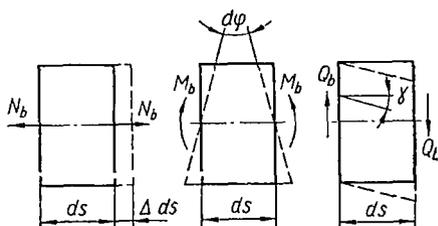


Рис. 364.

Взаимный угол поворота граней элемента, вызванный парами  $M_b$ ,

$$(d\varphi)_b = \frac{M_b ds}{EJ}.$$

Работа внутренних изгибающих моментов  $M_a$  на этом перемещении

$$-M_a (d\varphi)_b = -\frac{M_a M_b ds}{EJ}. \quad (13.26)$$

Взаимный сдвиг граней элемента, вызванный поперечными силами  $Q_b$ ,

$$(\gamma ds)_b = k \frac{Q_b ds}{GF}.$$

Работа внутренних поперечных сил  $Q_a$  на этом перемещении

$$-Q_a (\gamma ds)_b = -k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (13.27)$$

Суммируя выражения (13.25), (13.26) и (13.27), получаем возможную работу внутренних сил, приложенных к элементу  $ds$  стержня, на перемещениях, вызванных другой, вполне произвольной нагрузкой, отмеченной индексом  $b$ :

$$dW_{ab} = -M_a (d\varphi)_b - N_a (\Delta ds)_b - Q_a (\gamma ds)_b, \quad (13.28)$$

или

$$dW_{ab} = -\frac{M_a M_b ds}{EJ} - \frac{N_a N_b ds}{EF} - k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (13.29)$$

Просуммировав элементарные работы в пределах стержня, а затем по всем стержням системы, получим полное значение возможной работы внутренних сил:

$$W_{ab} = -\left[ \sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b \right]. \quad (13.30)$$

Запишем его в более удобном виде:

$$\boxed{W_{ab} = -\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} - \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}}. \quad (13.31)$$

Внеся теперь в уравнение (13.23) выражения для возможной работы внешних сил [первая из формул (13.24)] и внутренних сил [формула (13.30) или (13.31)], получим общее выражение начала возможных перемещений для плоской упругой стержневой системы:

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[ \sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b \right] = 0, \quad (13.32)$$

или

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[ \sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.33)$$

Иными словами, если упругая система находится в равновесии, то работа внешних и внутренних сил в состоянии  $a$  на возможных перемещениях, вызванных другой, вполне произвольной нагрузкой, отмеченной индексом  $b$ , равна нулю. Выражения (13.32) и (13.33) применимы и для стержня малой кривизны. Аналогичные выражения легко составить и для общего случая нагружения стержня.

Если в качестве возможных принять действительные перемещения  $\Delta_a$ , вызванные заданной нагрузкой  $P_a$ , то выражение (13.33) примет вид

$$\sum P_a \Delta_a - \left[ \sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.34)$$

Нетрудно видеть, что, разделив выражение (13.34) на два, получим

$$\frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a = A, \quad (13.35)$$

т. е.  $A$  представляет собой действительную работу внешних сил в процессе статической деформации [см. формулу (13.11)], а

$$-\frac{1}{2} \left[ \sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = W \quad (13.36)$$

— работу внутренних сил [см. формулы (13.19)].

Таким образом,

$$\boxed{A + W = 0}, \quad (13.37)$$

т. е. суммарная работа внешних и внутренних сил при статическом деформировании упругой системы равна нулю. Отсюда следует, что действительные значения работы внешних и внутренних сил равны по величине и обратны по знаку.

## § 82. ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим произвольную упругую систему, например балку, в двух состояниях. В первом состоянии (рис. 365, а) пусть действует обобщенная нагрузка, отмеченная индексом 1; перемещения соответствующих точек системы будут  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{21}$ , ...,  $\Delta_{i1}$ .

Во втором состоянии (рис. 365, б) система нагружается обобщенной нагрузкой, отмеченной индексом 2, а перемещения соответствующих точек системы от этой нагрузки будут  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{22}$ , ...,  $\Delta_{i2}$ .

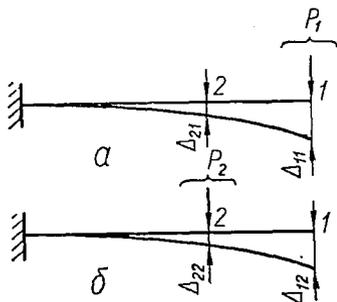


Рис. 365.

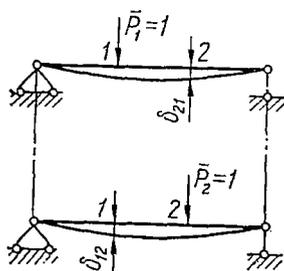


Рис. 366.

Напишем выражение возможных работ внешних и внутренних сил для обоих состояний системы, взяв для первого состояния в качестве возможных перемещения, вызванные силами второго состояния, а для второго — перемещения, вызванные силами первого. На основании формулы (13.33) для первого состояния

$$P_1 \Delta_{12} - \sum_s \left[ \int \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} + \int \frac{N_1 N_2 ds}{EF} + \int k \frac{Q_1 Q_2 ds}{GF} \right] = 0, \quad (13.38)$$

для второго состояния

$$P_2 \Delta_{21} - \sum_s \left[ \int \frac{M_2 M_1 ds}{EJ} + \int \frac{N_2 N_1 ds}{EF} + \int k \frac{Q_2 Q_1 ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.39)$$

Так как выражения для работ внутренних сил одинаковы, то на основании уравнений (13.38) и (13.39) приходим к равенству

$$\boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}.} \quad (13.40)$$

Выражение (13.40) носит название *теоремы о взаимности работ* (теоремы Бетти). Она формулируется следующим образом: *возможная работа внешних (или внутренних) сил состояния I на перемещениях*

состояния 2 равна возможной работе внешних (или внутренних) сил состояния 2 на перемещениях состояния 1.

Применим теорему о взаимности работ к частному случаю нагружения, когда в обоих состояниях системы приложено по одной единичной обобщенной силе  $\bar{P}_1 = 1$  и  $\bar{P}_2 = 1$  в точках 1 и 2 (рис. 366). На основании формулы (13.40)

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

а так как  $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 1$ , то

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

(13.41)

Выражение (13.41) носит название *теоремы о взаимности перемещений* (теоремы Максвелла). Формулируется она так: *перемещение точки приложения первой силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй силы по ее направлению, вызванному действием первой единичной силы.*

Теоремы о взаимности работ и перемещений имеют большое значение в общей теории исследования напряженного и деформированного состояния стержней, пластинок, оболочек и других расчетных объектов. Их применение существенно упрощает решение многих задач строительной механики, а также производство опытов по определению перемещений.

Пользуясь теоремой о взаимности работ, определим прогиб  $\Delta_{21}$  балки посредине пролета при действии на опоре момента  $M$  (рис. 367, а).

Используя второе состояние балки — действие в точке 2 сосредоточенной силы  $P$  (рис. 367, б) — по формуле (10.65) при  $a = b = \frac{l}{2}$  и  $x = 0$  найдем угол поворота опорного сечения:

$$\Delta_{12} = -\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Согласно теореме о взаимности работ

$$M\Delta_{12} = P\Delta_{21},$$

откуда

$$\Delta_{21} = M \frac{\Delta_{12}}{P} = -\frac{Ml^2}{16EJ}. \quad (13.42)$$

*Пример 55.* Определить прогибы точек 1, 2 и 3 вала, нагруженного силой  $P$  в точке С (рис. 368).

Не устанавливая прогибомеры в указанных точках (рис. 368, а), на основании теоремы о взаимности перемещений достаточно установить прогибомер в точке С, а силу последовательно прикладывать в точках 1, 2 и 3 (рис. 368, б). Измеренные при этом в точке С прогибы равны искомому.

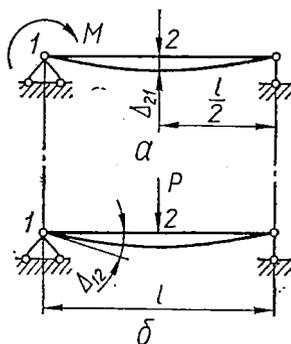


Рис. 367.

**Пример 56.** Показать, что при нагружении балки с консолью (рис. 369, а) моментом  $M$ , приложенным на расстоянии  $\frac{l}{\sqrt{3}}$  от левой опоры  $A$ , консоль  $BC$  остается неподвижной.

Как известно (см. § 67), если нагрузить балку в опорном сечении  $B$  моментом  $M$  (рис. 369, б), то максимальный прогиб на участке  $AB$  будет в сечении  $D$ , находящемся на расстоянии  $\frac{l}{\sqrt{3}}$  от опоры  $A$ . Следовательно, угол поворота этого сечения равен нулю ( $\theta_D = 0$ ).

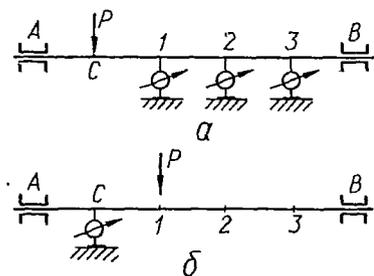


Рис. 368.

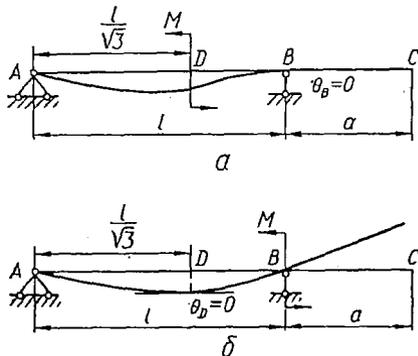


Рис. 369.

Если момент  $M$  приложить в сечении  $D$  (рис. 369, б), то на основании теоремы о взаимности перемещений на опоре  $B$  угол поворота сечения будет равен нулю ( $\theta_B = 0$ ). Консоль  $BC$  остается неподвижной, так как ее перемещение, очевидно, может произойти только в результате поворота опорного сечения  $B$ , а он отсутствует.

### § 83. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. МЕТОД МОРА

Рассмотрим вначале произвольную плоскую стержневую систему (балку, раму, ферму и т. п.), нагруженную заданными силами  $P$  (рис. 370, а). Усилия в произвольном сечении системы обозначим через  $M_P$ ,  $Q_P$ ,  $N_P$ . Пусть требуется определить перемещение (обобщенное) любой точки  $t$  системы по направлению  $i-i$ .

Введем вспомогательное состояние (рис. 370, б), представляющее собой заданную систему, нагруженную лишь одной единичной силой (обобщенной)  $\bar{X}_i = 1$ , приложенной в той же точке  $t$  и по тому же направлению, по которому надлежит разыскать перемещение  $\Delta_{iP}$ . Усилия в произвольном сечении вспомогательного состояния, вызванные действием единичной силы  $\bar{X}_i = 1$ , обозначим через  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$ .

Применим начало возможных перемещений для вспомогательного состояния, принимая в качестве возможных действительные перемещения заданной системы. Согласно формуле (13.33)

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}. \quad (13.43)$$

Выражение (13.43) является общей формулой для упругого перемещения плоской стержневой системы.

Если исходить из выражения начала возможных перемещений в форме (13.32), то общую формулу для упругого перемещения можно записать в виде

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \bar{M}_i (d\varphi)_P + \sum_s \int \bar{N}_i (\Delta ds)_P + \sum_s \int k \bar{Q}_i (\gamma ds)_P. \quad (13.44)$$

В общем случае действия сил (рис. 361) формула для перемещения содержит шесть слагаемых:

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \left( \frac{\bar{M}_i^y M_P^y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_i^z M_P^z}{EJ_z} + \frac{\bar{M}_i^{кР} M_P^{кР}}{GJ_k} + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_P^y}{GF} + k_z \frac{\bar{Q}_i^z Q_P^z}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) ds. \quad (13.45)$$

Индексы  $y, z$  в формуле (13.45) обозначают главные оси, индекс «кр» — крутящий момент.

Заметим, что общая формула (13.45) применима и для кривых стержней малой кривизны.

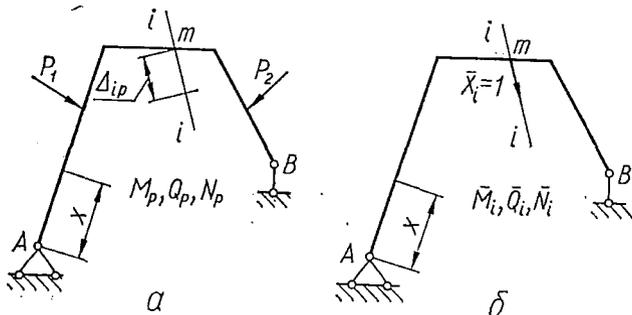


Рис. 370.

Формулы (13.43) и (13.45) впервые были получены Мором. Определение перемещений по этим формулам часто называют методом Мора, или методом перемножения эпюр.

Отметим, что метод Мора является самым общим методом определения перемещений стержневых систем. Его значение особенно велико при расчете статически неопределимых систем.

В большинстве случаев при определении перемещений в балках, рамах и арках можно пренебречь влиянием продольных деформаций и деформаций сдвига, учитывая лишь перемещения, которые вызываются изгибом и кручением. Тогда формула (13.43) для плоской системы принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (13.46)$$

При пространственном нагружении, согласно формуле (13.45).

$$\Delta_{iP} = \sum_s \left[ \int \frac{\bar{M}_i^y M_P^y ds}{EJ_y} + \int \frac{\bar{M}_i^z M_P^z ds}{EJ_z} + \int \frac{\bar{M}_i^{KP} M_P^{KP} ds}{GJ_K} \right] \quad (13.47)$$

Если рассчитываются шарнирные фермы, образованные прямыми стержнями, то в формуле Мора сохраняется лишь член, содержащий продольную силу:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} l. \quad (13.48)$$

Формула (13.48) носит название *формулы Максвелла*.

Можно указать следующий порядок определения перемещений по методу Мора:

1. Строят вспомогательную систему, которую нагружают единичной нагрузкой в точке, где требуется определить перемещение. Определяя линейные перемещения, в заданном направлении прикладывают единичную силу, определяя угловые перемещения, — единичный момент.

2. Для каждого участка системы выписывают выражения силовых факторов в произвольном сечении заданной ( $M_P, N_P, Q_P$ ) и вспомогательной ( $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ ) систем.

3. Вычисляют интегралы Мора (по участкам в пределах всей системы). В соответствии с указанным, при расчете плоских балок, рам и арок исходят из формулы (13.46), при расчете ферм — из формулы (13.48).

4. Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичной силы. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичной силы.

Рассмотрим примеры применения метода Мора для определения перемещений в стержневых системах.

Пусть требуется определить прогиб по середине пролета и угол поворота на опоре шарнирно опертой балки ( $EJ = \text{const}$ ), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 371, а), а также исследовать влияние поперечных сил на максимальный прогиб.

1. Для определения прогиба посередине пролета нагружаем в этом месте вспомогательную балку (рис. 371, б) единичной сосредоточенной

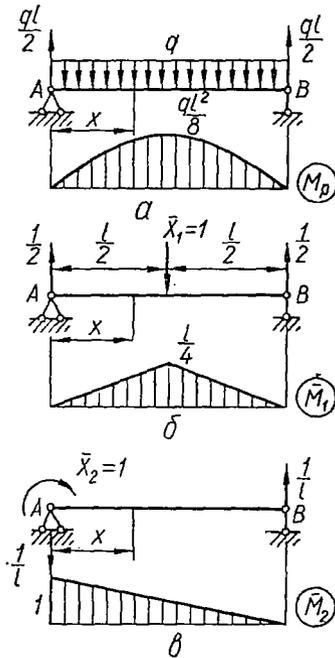


Рис. 371.

силой. В произвольном сечении первого участка балки ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ )

$$\bar{M}_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$\bar{M}_1(x) = \frac{1}{2}x.$$

Учитывая симметрию, получим:

$$\Delta_{1P} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x) dx}{EJ} = \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} x \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}.$$

Учтем влияние касательных напряжений на искомый прогиб, предполагая, что балка имеет прямоугольное сечение. Очевидно, при

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$Q_P(x) = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$\bar{Q}_1(x) = \frac{1}{2}.$$

На основании равенства (13.43) прогиб, вызванный действием поперечных сил,

$$\Delta_{1P}^Q = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} k \frac{\bar{Q}_1 Q_P dx}{GF} = \frac{2k}{GF} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \left( \frac{ql}{2} - qx \right) dx = k \frac{ql^2}{8GF} = \frac{2}{5} \cdot \frac{ql^2}{EF}.$$

При этом учтено, что коэффициент формы для прямоугольного сечения

$$k = 1,2; \text{ а } G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{3}{8} E.$$

Суммируя выражения для перемещений, находим, что

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} + \frac{2}{5} \cdot \frac{ql^2}{EF} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \left( 1 + 2,6 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Второй член в скобках, отражающий влияние поперечной силы, при  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  равен 0,026. Следовательно, прогиб, вызванный поперечной силой, составляет менее 3% прогиба, вызванного изгибающими моментами.

2. Для определения угла поворота опорного сечения вспомогательную балку нагружаем единичным моментом (рис. 371, в). При  $0 \leq x \leq l$  имеем:

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$\bar{M}_2(x) = 1 - \frac{x}{l};$$

Итак

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{ql^3}{24EJ}. \quad (13.49)$$

Положительный знак указывает на то, что поворот совпадает с направлением единичного момента.

Определим вертикальное перемещение узла  $B$  шарнирно-стержневой системы (рис. 372, а), состоящей из двух одинаковых стержней  $AB$  и  $BC$  постоянного поперечного сечения. Вспомогательная система показана на рис. 372, б.

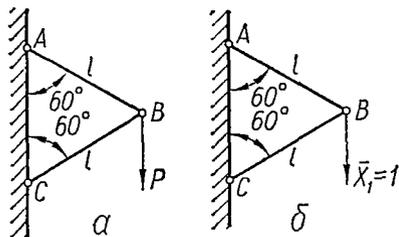


Рис. 372.

Вырезая узел  $B$  и рассматривая его равновесие, легко находим усилия в стержнях для обоих состояний:

Стержень	$N_P$	$\bar{N}_1$
$AB$	$P$	$1$
$BC$	$-P$	$-1$

На основании формулы (13.48)

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_1 N_P l}{EF} = 2 \frac{Pl}{EF}. \quad (13.50)$$

**Пример 57.** Расположенная в горизонтальной плоскости рама  $ABC$  (рис. 373, а) состоит из двух стержней одинакового круглого поперечного сечения. Определим вертикальное перемещение точки  $C$ . Вспомогательная система показана на рис. 373, б.

Перемещение  $\Delta_{1P}$  определим, исходя из формулы (13.45). Для произвольных сечений двух участков имеем:

для I участка ( $0 \leq x \leq a$ )

$$M_P = Px; \quad M_P^{KP} = 0;$$

$$\bar{M}_1 = x; \quad \bar{M}_1^{KP} = 0;$$

для II участка ( $0 \leq x \leq l$ )

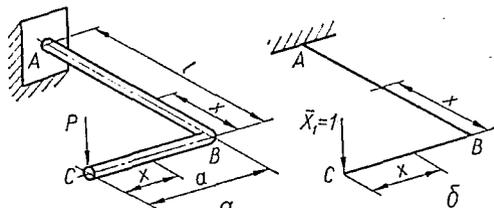


Рис. 373.

$$M_P = Px; \quad M_P^{KP} = Pa;$$

$$\bar{M}_1 = x; \quad \bar{M}_1^{KP} = a;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_s \frac{\bar{M}_1^{KP} M_P^{KP} dx}{GJ_P} = \int_0^a \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Pa^2 dx}{GJ_P} = \\ &= \frac{P(a^3 + l^3)}{3EJ} + \frac{Pa^2 l}{GJ_P}. \end{aligned} \quad (13.51)$$

## § 84. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Допустим, что произвольный элемент  $ds$  стержня нагрет внизу до температуры  $T_n$ , а сверху — до  $T_b$  (рис. 374, а, б). Обычно предполагается, что по высоте сечения температура изменяется по линейному закону, тогда сечения бруса перемещаются, оставаясь плоскими.

Удлинения нижнего и верхнего волокон (рис. 374, б) соответственно

$$\begin{aligned}\Delta ds_n &= \alpha T_n ds; \\ \Delta ds_b &= \alpha T_b ds,\end{aligned}\tag{13.52}$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения.

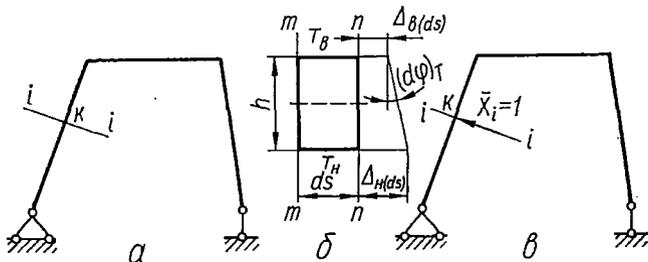


Рис. 374.

Удлинение по оси бруса (среднее удлинение)

$$\Delta ds_c = \alpha \frac{T_n + T_b}{2} ds.\tag{13.53}$$

Взаимный угол поворота сечений элемента  $ds$ , вызванный неравномерным нагревом элемента,

$$(d\varphi)_T = \frac{\Delta ds_n - \Delta ds_b}{h} = \alpha \frac{T_n - T_b}{h} ds.\tag{13.54}$$

Пусть теперь требуется определить перемещение (обобщенное) произвольной точки  $k$  системы в любом направлении  $i-i$ , вызванное действием температуры. С этой целью нагружаем вспомогательное состояние системы единичной силой (обобщенной)  $\bar{X}_i = 1$  (рис. 374, в). Применяя начало возможных перемещений для вспомогательного состояния и считая возможными действительные перемещения, вызванные действием температуры, на основании формулы (13.44) находим:

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \bar{M}_i (d\varphi)_T + \sum_s \int \bar{N}_i \Delta ds_c.\tag{13.55}$$

После подстановки формул (13.53) и (13.54) получим:

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_n - T_b}{h} ds + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_n + T_b}{2} ds.\tag{13.56}$$

Формула (13.56) применима и для брусьев малой кривизны. В фермах, где действуют только продольные усилия, температурные перемещения определяются по формуле

$$\Delta_{iT} = \sum \bar{N}_i \alpha T l, \quad (13.57)$$

где  $T = \frac{T_H + T_B}{2}$  — температура на оси стержня, постоянная по его длине.

Суммирование производится по всем стержням фермы.

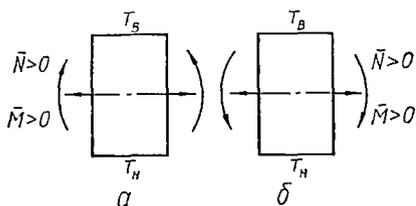


Рис. 375.

Знак перед вторым членом в формуле (13.56) зависит от выбора правила знаков для изгибающего момента. Если считать изгибающий момент положительным, когда он направлен так, как показано на рис. 375, а, то перед вторым членом в формуле (13.56) сохраняется знак плюс. Иногда изгибающий момент считают положительным,

если он направлен, как показано на рис. 375, б. Тогда перед вторым членом в формуле (13.56) берут знак минус.

Напомним, что в статически определимых системах температурные перемещения не вызывают усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в элементах системы.

В случае действия нагрузки и температуры на плоскую систему общая формула для перемещений представляет собой сумму членов формул (13.43) и (13.56):

$$\Delta_i = \Delta_{iP} + \Delta_{iT} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M P ds}{EJ} + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds. \quad (13.58)$$

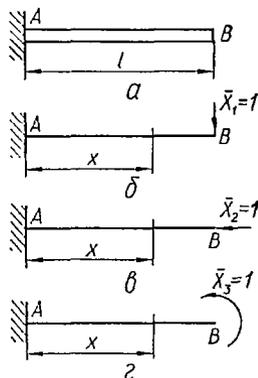


Рис. 376.

**Пример 58.** Определить горизонтальное и вертикальное перемещения, а также угол поворота свободного конца стальной консоли (рис. 376, а), вызванные неравномерным нагревом. Длина балки  $l = 2$  м, высота сечения  $h = 10$  см,  $\alpha = 118 \cdot 10^{-7}$ . Начальная температура балки  $T_0 = 5^\circ$ ; затем нижнее волокно нагрето до температуры  $55^\circ$ , а верхнее охлаждено до температуры  $-5^\circ$ .

Очевидно, расчетные температуры волокон следующие:

$$T_H = 55 - 5 = 50^\circ;$$

$$T_B = -5 - 5 = -10^\circ.$$

Вспомогательные состояния для определения вертикального и горизонтального перемещений и угла поворота показаны на рис. 376, б — г. Имеем:

$$\bar{M}_1 = -(l - x); \quad \bar{N}_1 = 0;$$

$$\bar{M}_2 = 0; \quad \bar{N}_2 = -1;$$

$$\bar{M}_3 = 1; \quad \bar{N}_3 = 0.$$

Следовательно, на основании формулы (13.56)

а) прогиб

$$\Delta_{1T} = \int_0^l \bar{M}_1 \alpha \frac{T_H - T_B}{h} dx = -\alpha \frac{T_H - T_B}{h} \int_0^l (l - x) dx = -\alpha \frac{T_H - T_B}{2h} l^2,$$

или после подстановки значений,

$$\Delta_{1T} = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10} = -1,42 \text{ см};$$

б) горизонтальное перемещение

$$\Delta_{2T} = \int_0^l \bar{N}_2 \alpha \frac{T_H + T_B}{2} dx = -\alpha \frac{T_H + T_B}{2} l = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 200}{2} = -0,047 \text{ см};$$

в) угол поворота

$$\Delta_{3T} = \int_0^l \bar{M}_3 \alpha \frac{T_H - T_B}{h} dx = \alpha \frac{T_H - T_B}{h} \int_0^l dx = \frac{\alpha (T_H - T_B)}{h} l;$$

$$\Delta_{3T} = \frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 200}{10} = 0,0142 \text{ рад}.$$

## § 85. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МОРА ПО СПОСОБУ ВЕРЕЩАГИНА

Вычисление интегралов Мора существенно упрощается, если одна из эпюр (в действительном состоянии или единичном) прямолинейна. Такое условие всегда выполняется для систем, состоящих из прямых брусьев, так как при этом эпюры от единичной нагрузки (сосредоточенной силы или пары) всегда ограничены прямыми линиями.

Вычислим интеграл  $\int \bar{M}_i M_P dx$  для случая, когда эпюра от заданной нагрузки имеет произвольное очертание, а от единичной — прямолинейна (рис. 377). Обозначим через  $\Omega$  площадь эпюры  $M_P$ ;  $c$  — ее центр тяжести,  $\bar{M}_c$  — ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры  $M_P$ . Очевидно, что  $M_P dx = d\Omega$  представляет собой дифференциал площади эпюры  $M_P$ , а

$$\bar{M}_i = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда искомый интеграл

$$\int \bar{M}_i M_P dx = \operatorname{tg} \alpha \int x d\Omega. \quad (13.59)$$

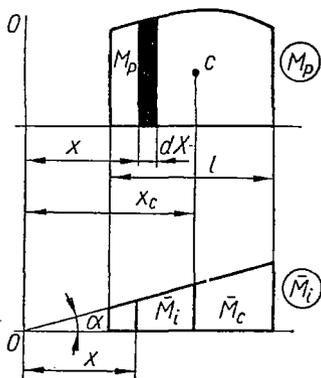


Рис. 377.

Интеграл в правой части равенства (13.59) представляет собой статический момент площади эпюры  $M_P$  относительно оси  $O-O$ :

$$\int_l x d\Omega = x_c \Omega,$$

где  $x_c$  — абсцисса центра тяжести эпюры  $M_P$ .

В таком случае

$$\int \bar{M}_i M_P dx = \text{tg } \alpha x_c \Omega = \Omega \bar{M}_c, \quad (13.60)$$

так как

$$x_c \text{tg } \alpha = \bar{M}_c.$$

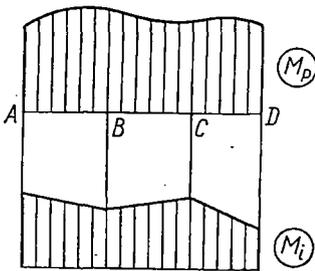


Рис. 378.

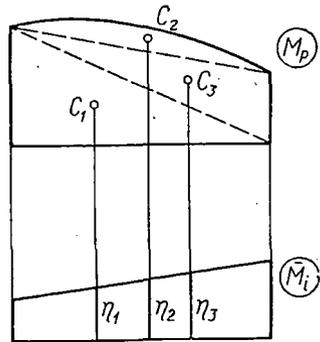


Рис. 379.

Следовательно, интеграл Мора равен произведению площади эпюры от внешней нагрузки на ординату прямолинейной эпюры от единичной нагрузки, расположенную под центром тяжести эпюры от заданной внешней нагрузки.

Общая формула (13.46) перемещений для систем из прямолинейных элементов принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_c}{EJ}. \quad (13.61)$$

Описанный графоаналитический способ вычисления интеграла Мора был предложен А. Н. Верещагиным и носит название *способа Верещагина*. Вычисления по этой формуле производят по участкам, на каждом из которых эпюра должна быть прямолинейной (рис. 378). В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножать площадь любой из них на ординату другой под центром тяжести первой.

Если эпюра  $M_P$  имеет сложный вид, то ее нужно разбить на простые фигуры (рис. 379), для которых легко определить площадь и положение центра тяжести. При этом каждую из площадей умножают на ординату единичной эпюры под центром тяжести соответ-

ствующей площадн. Ординаты в этом случае удобно обозначать вместо  $\bar{M}_{ck}$  буквами  $\eta_k$ , где  $k = 1; 2; \dots$

Таким образом,

$$\Delta_{IP} = \sum_{k=1, \dots} \frac{\Omega_k \eta_k}{EJ}. \quad (13.62)$$

При учете крутящих моментов в общем случае нагружения знаменатель формулы (13.61) в соответствующем члене содержит жесткость на кручение  $GJ_k$ .

Если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_i$  противоположны по знаку, то результат умножения эпюр имеет знак минус.

Способ перемножения эпюр по Верещагину широко применяют при расчете рамных конструкций (конструкций, у которых углы в месте сопряжения отдельных стержней, жесткие до деформации, остаются жесткими после нее).

Рассмотрим некоторые примеры применения способа Верещагина для определения перемещений в различных стержневых системах.

Определим прогиб в точке  $D$  и угол поворота сечения  $B$  консоли (рис. 380, а). Соответствующие вспомогательные (единичные) состояния показаны на рис. 380, б, в.

Строим эпюры изгибающих моментов  $M_P$  и  $\bar{M}_i$ . Прогиб в точке  $D$  по Верещагину

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_{c1}}{EJ}.$$

На участке  $AB$  площадь  $\Omega = \frac{1}{6} qa^3$ . Центр тяжести этой площади, ограниченной квадратичной параболой вида  $\frac{q(a-x)^2}{2}$  (рис. 380, а), находится на расстоянии  $\frac{3}{4}a$  от точки  $B$ , в чем легко убедиться, применив формулу (2.3). Ордината вспомогательной эпюры  $\bar{M}_{c1} = \frac{7}{4}a$ . На участке  $BD$   $\Omega = 0$ . Итак,

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^3}{6} \cdot \frac{7}{4}a = \frac{7}{24} \cdot \frac{qa^4}{EJ}.$$

Для определения угла поворота вспомогательную систему нагружаем единичной парой. Очевидно,  $\bar{M}_{c2} = 1$ . Следовательно, угол поворота сечения  $B$

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_{c2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^3}{6} \cdot 1 = \frac{qa^3}{6EJ}.$$

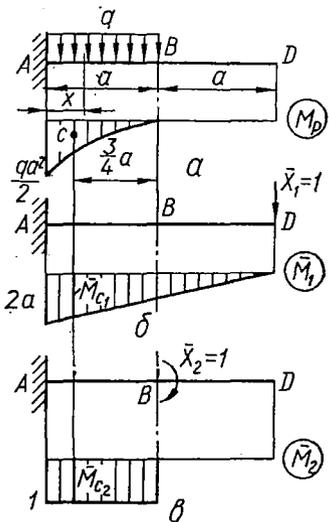


Рис. 380.

Определим полное перемещение точки  $C$  рамы, изображенной на рис. 381,  $a$ , приняв, что  $EJ = \text{const}$ .

Для определения полного перемещения  $\Delta = CC_1$  вычислим предварительно перемещения указанной точки в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Чтобы определить вертикальное перемещение точки  $C$ , раму во вспомогательном состоянии нагружаем силой  $\bar{X}_1 = 1$ , направленной вертикально (рис. 381,  $b$ ). Основная эпюра  $M_P$  показана на рис. 381,  $g$ , вспомогательная  $\bar{M}_1$  — на рис. 381,  $d$ . Имеем:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega_k \tau_k}{EJ}.$$

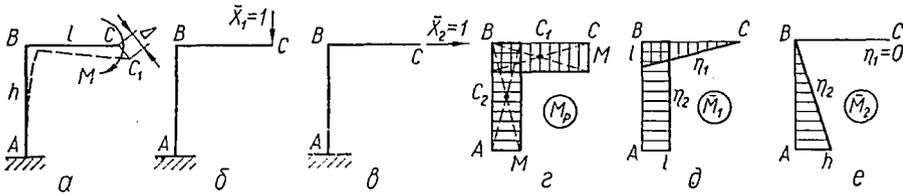


Рис. 381.

Вычисления проводим по участкам:

для участка  $CB$

$$\Omega_1 = Ml; \tau_1 = \frac{l}{2};$$

для участка  $AB$

$$\Omega_2 = Mh; \tau_2 = l.$$

Следовательно,

$$\Delta_{1P} = \frac{Ml \cdot \frac{l}{2}}{EJ} + \frac{Mh \cdot l}{EJ} = \frac{Ml}{EJ} \left( \frac{l}{2} + h \right).$$

Для определения горизонтального перемещения вспомогательную систему нагружаем в точке  $C$  горизонтальной силой  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 381,  $c$ ). Эпюры  $\bar{M}_2$  показаны на рис. 381,  $e$ .

Очевидно, на участке  $CB$  ордината  $\tau_1 = 0$ , а на участке  $AB$  ордината  $\tau_2 = \frac{h}{2}$ . Следовательно,

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_2 \tau_2}{EJ} = \frac{Mh^2}{2EJ}.$$

Полное перемещение точки  $C$  рамы

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{1P}^2 + \Delta_{2P}^2}.$$

Определим изменение расстояния между точками  $A$  и  $B$  для рамы, показанной на рис. 382,  $a$ . Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_P$  показана на рис. 382,  $b$ . Во вспомогательном состоянии

нагружаем систему обобщенной нагрузкой, соответствующей искомому перемещению (рис. 382, в)<sup>1</sup>. Такой нагрузкой являются единичные сосредоточенные силы, приложенные в указанных точках. Эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_1$  построены на сжатых волокнах. Имеем:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} l = \frac{Pl^2}{8};$$

$$\bar{M}_c = a.$$

Следовательно,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega \bar{M}_c}{EJ} = \frac{Pl^2 a}{8EJ}.$$

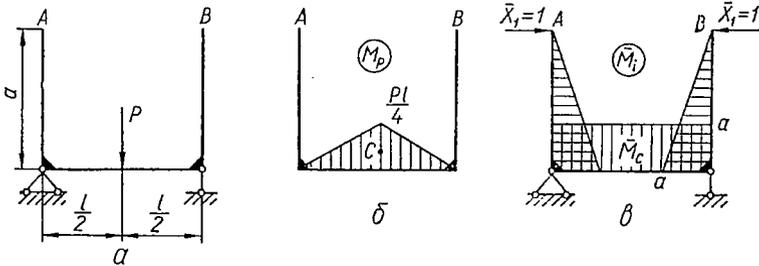


Рис. 382.

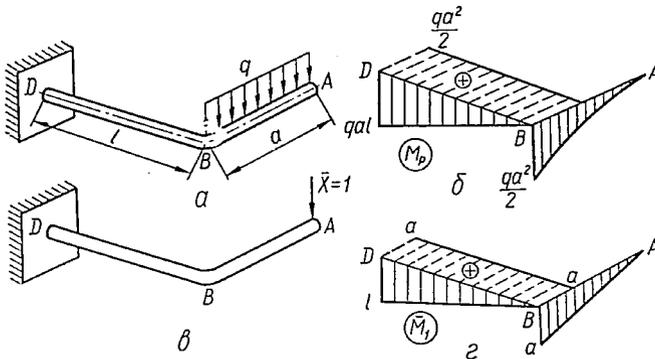


Рис. 383.

Определим опускание свободного конца ломаной консоли круглого поперечного сечения, нагруженной на участке  $AB$  вертикальной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 383, а). Эпюры изгибающих и крутящих моментов для основного и вспомогательного состояний изображены на рис. 383, б, г. Эпюры крутящих моментов заштрихованы штриховыми линиями и расположены в горизонтальной плоскости.

<sup>1</sup> Для сокращения количества рисунков здесь и в некоторых примерах в дальнейшем эпюры строим непосредственно на осях стержней, т. е. схемы нагрузочных состояний и эпюры совмещаем на одном рисунке.

Вычисления производим по участкам:

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^3}{6} \cdot \frac{3}{4} a + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} qal^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{GJ_p} \cdot \frac{qa^2}{2} la = \\ &= \frac{qa}{EJ} \left( \frac{a^3}{8} + \frac{l^3}{3} \right) + \frac{qa^3 l}{2GJ_p}. \end{aligned}$$

### § 86. ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ВЕРЕЩАГИНА К СТЕРЖНЯМ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Чтобы применить метод Мора для определения перемещений в стержнях переменного сечения, преобразуем формулу (13.46) следующим образом:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ(x)} = \sum \int \frac{M_P \frac{J_0}{J(x)} \bar{M}_i dx}{EJ_0} \quad (13.63)$$

где  $J(x)$  — момент инерции произвольного сечения;

$J_0$  — момент инерции определенного (характерного) сечения.

Обозначим  $M_P \frac{J_0}{J(x)} = M_{np}$  и назовем эту величину *приведенным изгибающим моментом в текущем сечении*. Тогда интеграл Мора можно записать в виде

$$\Delta_{iP} = \int \frac{\bar{M}_i M_{np}}{EJ_0} dx. \quad (13.64)$$

Применяя к формуле (13.64) способ Верещагина, находим:

$$\Delta_{iP} = \frac{\Omega_{np} \bar{M}_c}{EJ_0}, \quad (13.65)$$

где  $\Omega_{np}$  — площадь эпюры  $M_{np}$ , т. е. площадь приведенной эпюры;

$\bar{M}_c$  — ордината единичной эпюры под центром тяжести приведенной эпюры.

Определим прогиб свободного конца и угол поворота сечения  $B$  консоли переменного сечения (рис. 384), если

$$J(x) = J_0 \frac{l-x}{l},$$

где  $J_0$  — момент инерции сечения в месте заземления.

Текущая ордината эпюры  $M_P$  равна  $-P(l-x)$ . Приведенные ординаты постоянны, так как

$$M_{np} = M_P \frac{J_0}{J(x)} = -Pl.$$

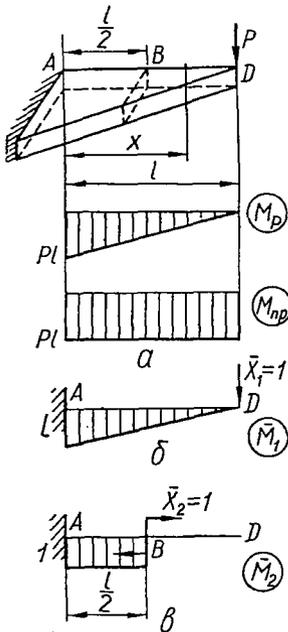


Рис. 384.

Для определения прогиба строим вспомогательное состояние (рис. 384, б). Очевидно,

$$\Omega_{\text{пр}} = Pl^2; \quad \bar{M}_1 = \frac{l}{2};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_{\text{пр}} \bar{M}_1}{EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}.$$

Чтобы определить угол поворота сечения  $B$ , нагружаем балку во вспомогательном состоянии сосредоточенным моментом  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 384, в). Учитывая, что эпюра  $\bar{M}_2$  имеет два участка, получаем:

$$\Omega_{\text{пр}} = Pl \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{2}; \quad \bar{M}_2 = 1;$$

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_{\text{пр}} \bar{M}_2}{EJ_0} = \frac{Pl^2}{2EJ_0}.$$

### § 87. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Согласно закону сохранения энергии работа внешних сил не исчезает, а трансформируется в потенциальную энергию, накапливаемую в упругом теле. Следовательно, величина накопленной потенциальной энергии деформации определяется величиной работы внешних сил. Эта энергия проявляется в виде работы, совершаемой при разгрузке внутренними силами. Снимая, например, часть гирь, приложенных к балке (рис. 385), заметим, что балка несколько выпрямится и поднимет оставшиеся гири.

Таким образом, упругое тело способно аккумулировать механическую энергию, которую можно вернуть при разгрузке.

Пренебрегая при статическом нагружении изменениями кинетической энергии системы, а также потерями энергии на внутренние трения, изменение температуры, магнитные и электрические явления, которые имеют место при деформации, можно утверждать, что уменьшение потенциальной энергии грузов равно потенциальной энергии деформации, накопленной упругой конструкцией, т. е.

$$U = U_P, \quad (13.66)$$

где  $U$  — приращение потенциальной энергии деформации;

$U_P$  — уменьшение потенциальной энергии грузов.

Уменьшение потенциальной энергии грузов численно равно работе внешних сил при нагружении тела. Следовательно, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении системы или работе внутренних сил, совершенной в процессе разгрузки.

На основании формулы (13.22) потенциальная энергия деформации в общем случае нагружения бруса

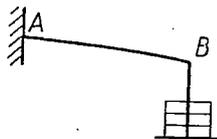


Рис. 385.

$$U = A = \frac{1}{2} \int_s M_y^2 ds + \frac{1}{2} \int_s M_z^2 ds + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_{\text{кр}}^2 ds}{GJ_{\text{к}}} + \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{GF} + \frac{1}{2} \int_s k_z \frac{Q_z^2 ds}{GF}. \quad (13.67)$$

Как видно из приведенной формулы, потенциальная энергия деформации является квадратичной функцией обобщенных сил или обобщенных перемещений, так как последние линейно связаны с обобщенными силами. Следовательно, потенциальная энергия деформации всегда положительна. Ее величина не зависит от порядка нагружения и целиком определяется окончательными значениями усилий и перемещений. Отметим также, что потенциальная энергия как квадратичная функция обобщенных нагрузок не подчиняется принципу независимости действия сил. Это значит, что потенциальная энергия, накопленная в результате действия группы сил, не равна сумме потенциальных энергий, вызванных действием каждой нагрузки в отдельности. Закон независимости действия сил при вычислении потенциальной энергии применим лишь в тех случаях, когда перемещение по направлению одной обобщенной силы, вызванное действием другой силы, равно нулю.

*Пример 59.* Определить величину потенциальной энергии деформации, накопленную в шарнирно-стержневой системе (рис. 386), нагруженной в узле В вертикальной силой P. Стержни АВ и ВС имеют одинаковые размеры и изготовлены из одного материала.

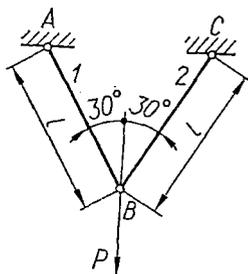


Рис. 386.

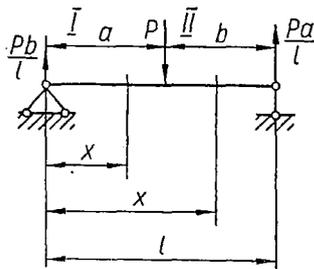


Рис. 387.

Рассматривая равновесие узла В, легко находим, что стержни растягиваются одинаковыми силами:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}}. \quad (13.68)$$

Следовательно, потенциальная энергия деформации системы

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 l}{2EF} = \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{EF} = \frac{P^2 l}{3EF}. \quad (13.69)$$

С другой стороны, на основании формулы (13.10) потенциальную энергию деформации можно представить как половину произведения силы, приложенной в узле, на вертикальное перемещение узла  $\Delta_P$ , т. е.

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P. \quad (13.70)$$

Заметим, что, сравнивая формулы (13.69) и (13.70), можно найти перемещение точки  $B$  по направлению силы:

$$\Delta_P = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{EF}.$$

*Пример 60.* Определить потенциальную энергию, накопленную при деформации балки постоянного прямоугольного сечения  $b \times h$ , нагруженной, как показано на рис. 387.

Будем исходить из формулы (13.67), сохранив члены, соответствующие плоскому изгибу. Получим:

$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} + k \int_l \frac{Q^2(x) dx}{2GF}. \quad (13.71)$$

Вычисления проводим по участкам. Выражения для изгибающих моментов и поперечных сил в произвольных сечениях участков имеют следующий вид: для I участка ( $0 \leq x \leq a$ )

$$M(x) = \frac{Pb}{l} x; \quad Q(x) = \frac{Pb}{l};$$

для II участка ( $a \leq x \leq l$ )

$$M(x) = \frac{Pa}{l} (l - x); \quad Q(x) = -\frac{Pa}{l}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l} x\right)^2 dx}{2EJ} + k \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l}\right)^2 dx}{2GF} + \int_a^l \frac{\left[\frac{Pa}{l} (l - x)\right]^2 dx}{2EJ} + k \int_a^l \frac{\left(\frac{Pa}{l}\right)^2 dx}{2GF} = \\ &= \frac{P^2 a^2 b^3}{6EJl} + k \frac{P^2 ab}{2GF} = \frac{P^2 a^2 b^3}{6EJl} + \frac{3}{5} \cdot \frac{P^2 ab}{GF}, \end{aligned} \quad (13.72)$$

так как для прямоугольного сечения  $k = 1,2$ . Подставив в формулу (13.72)

$$G = 0,4 E; \quad J = \frac{bh^3}{12}; \quad F = bh,$$

найдем, что

$$U = \frac{2P^2 a^2 b^3}{Eb h^3 l} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{h^2}{ab}\right).$$

Последний член в скобках, выражающий влияние поперечной силы, при обычных размерах балок не превышает 2-3%. В связи с этим при изгибе балки влиянием поперечной силы при вычислении потенциальной энергии обычно пренебрегают.

Желая вычислить прогиб балки в месте приложения нагрузки, представим потенциальную энергию деформации балки в виде

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P \quad (13.73)$$

и, сравнивая выражения (13.73) и (13.72), пренебрегая в последнем влиянием поперечной силы, найдем прогиб в сечении  $B$ :

$$\Delta_P = \frac{P a^2 b^3}{3EJl}. \quad (13.74)$$

§ 88. ТЕОРЕМА КАСТИЛЬЯНО. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Пусть упругая система статически нагружена произвольной нагрузкой  $Q$  и некоторой обобщенной силой  $P$  (рис. 388). Вычислим потенциальную энергию, накопленную при деформации системы. С этой целью для удобства примем следующий порядок нагружения. Вначале нагружаем систему силой  $P$ . Перемещение точки приложения силы по ее направлению и от ее действия обозначим  $\Delta_{PP}$ . Затем прикладываем нагрузку  $Q$ . В результате дополнительной деформации сила  $P$  получит перемещение  $\Delta_{PQ}$ . Полное (обобщенное) перемещение точки приложения силы

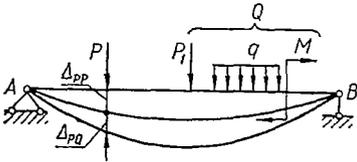


Рис. 388.

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}. \quad (13.75)$$

Очевидно, накопленная потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил:

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}, \quad (13.76)$$

где  $U_{QQ}$  — энергия, накопленная в результате деформирования системы только силами  $Q$ , численно равная работе сил  $Q$  на вызванных ими перемещениях.

Второй член в формуле (13.76) не содержит  $1/2$ , так как на перемещении  $\Delta_{PQ}$  сила  $P$ , выполняя работу, не изменяла своего значения. Так как  $\Delta_{PP} = P \delta_{PP}$ , то формулу (13.76) можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} P^2 \delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}. \quad (13.77)$$

Продифференцируем выражение (13.77) по силе  $P$  с учетом равенства (13.75):

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}}. \quad (13.78)$$

*Перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии по этой силе (теорема Кастильяно).*

Заметим, что согласно формуле (13.77) вторая производная от потенциальной энергии по обобщенной силе

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP} \quad (13.79)$$

и имеет существенно положительную величину.

Для плоской стержневой системы, исходя из общей формулы (13.67), потенциальную энергию деформации запишем в виде

$$U = \int_s \frac{M^2(s) ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s) ds}{2EF} + \int_s k \frac{Q^2(s) ds}{2GF}, \quad (13.80)$$

где  $M(s)$ ,  $N(s)$ ,  $Q(s)$  — усилия в сечении стержня.

Применяя правило дифференцирования по параметру, находим:

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s) ds}{EF} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial P} + \int_s k \frac{Q(s) ds}{GF} \cdot \frac{\partial Q(s)}{\partial P}, \quad (13.81)$$

или, если пренебречь влиянием осевых и поперечных сил на величину перемещения:

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P}. \quad (13.82)$$

Чтобы определить линейное или угловое перемещение в точке, где по условию задачи сила отсутствует, в этой точке следует приложить соответствующую фиктивную обобщенную силу. Далее, написав выражение для потенциальной энергии от системы сил, включая указанную фиктивную силу, следует взять его производную по этой фиктивной силе и в полученном выражении для перемещения положить фиктивную нагрузку равной нулю.

*Пример 61.* Определить по способу Кастильяно угол поворота свободного конца консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 389, а).

В указанном сечении балки в качестве фиктивной нагрузки прикладываем момент  $M^0$  (рис. 389, б). Угол поворота сечения А согласно формуле (13.78)

$$\theta_A = \Delta_{M^0} = \frac{\partial U}{\partial M^0} = \int_l \frac{M(x) dx}{EJ} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M^0}.$$

Имеем:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - M^0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M^0} = -1;$$

$$\theta_A = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[ \frac{qx^2}{2} + M^0 \right] dx.$$

Принимая  $M^0 = 0$ , получаем:

$$\theta_A = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

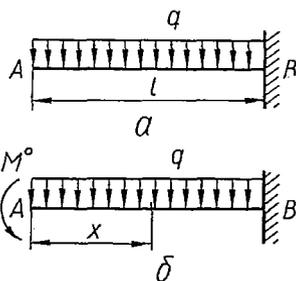


Рис. 389.

Отметим, что общая формула (13.45) для вычисления перемещений в стержневых системах, не требующая написания выражений потенциальной энергии и их дифференцирования, вытеснила из расчетной практики способ Кастильяно. Однако последний является общим способом определения перемещений в нестержневых системах (пластинках, оболочках и деталях, все три измерения которых имеют один порядок).

Выразив потенциальную энергию деформации в функции независимых перемещений  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , можно показать, что частная производная от потенциальной энергии по любому перемещению равна силе, действующей по направлению перемещения, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \quad (13.83)$$

Эта теорема была установлена Лагранжем.

**Пример 62.** Симметричная шарнирно-стержневая система нагружена в узле  $B$  вертикальной силой  $P$  (рис. 390). Определить величину силы  $P$ , если опускание узла равно  $\Delta_p$ .

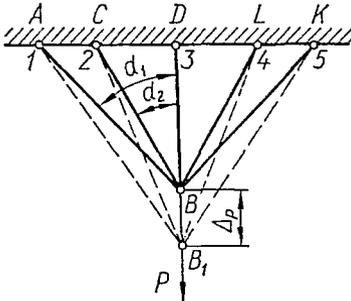


Рис. 390.

Введем обозначения:  $\alpha_i$  — угол наклона стержня к вертикали;  $l_i$  — длина стержня;  $E_i F_i$  — жесткость поперечного сечения стержня. Стержни, равно наклоненные к вертикали, имеют одинаковые жесткости.

Легко видеть, что удлинение  $i$ -го стержня

$$\Delta l_i = \Delta_p \cos \alpha_i,$$

а усилие в нем

$$P_i = \frac{\Delta l_i E_i F_i}{l_i}.$$

Потенциальная энергия деформации системы

$$U = \sum \frac{P_i \Delta l_i}{2} = \sum \frac{\Delta l_i^2 E_i F_i}{2 l_i} = \Delta_p^2 \sum \frac{\cos^2 \alpha_i E_i F_i}{2 l_i}.$$

Дифференцируя по  $\Delta_p$ , находим:

$$P = \frac{\partial U}{\partial \Delta_p} = \Delta_p \sum \frac{\cos^2 \alpha_i E_i F_i}{l_i}.$$

### § 89. ТЕОРЕМА О МИНИМУМЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим произвольную статически неопределимую систему (рис. 391, *a*), усилия в элементах которой только из уравнений равновесия определить нельзя. Так, опорные закрепления изображенной балки дают шесть реакций; из уравнений равновесия для плоской системы сил можно определить лишь три из них. Превратим систему в статически определимую, удалив соответствующее число связей. В данном примере (рис. 391, *b*) отброшены три связи — шарнирно-подвижные опоры  $B, C$  и  $D$ . Действие отброшенных связей заменим соответствующими реакциями  $X_1, X_2, X_3$ , и т. д., которые будем рассматривать как независимые друг от друга внешние нагрузки.

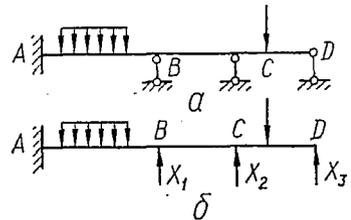


Рис. 391.

Вычислим по способу Кастильяно перемещения  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  точек приложения сил  $X_1, X_2, X_3$  по направлению их действия. Очевидно,

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2}; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3}; \quad \dots,$$

где  $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots, P)$  — потенциальная энергия деформации системы.

Так как эти перемещения равны нулю, то

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \quad \dots \quad (13.84)$$

Уравнения (13.84) являются необходимым условием экстремума функции  $U$ . Легко видеть, что этот экстремум является минимумом. В самом деле, согласно формуле (13.79) вторые производные функции  $U$  по  $X_1, X_2, X_3$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}; \quad \dots \quad (13.85)$$

Перемещения  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$  — существенно положительные величины, а положительный знак вторых производных свидетельствует о том, что условия (13.84) являются условиями минимума функции  $U$ .

Таким образом, приходим к теореме о минимуме потенциальной энергии: *в статически неопределимых системах лишние неизвестные усилия принимают такие значения, при которых потенциальная энергия деформации имеет наименьшее значение* (теорема Менабреа).

Эта теорема известна также как теорема о наименьшей работе, так как вместо потенциальной энергии можно говорить о численно равной ей работе внешних сил.

На основании изложенной теоремы можно заключить, что при добавлении каких-либо связей потенциальная энергия всегда уменьшается.

*Пример 63.* Пользуясь теоремой о минимуме потенциальной энергии, определить реакцию шарнирно-подвижной опоры бруса малой кривизны, изображенного на рис. 392. Брус нагружен сосредоточенным моментом в опорном сечении  $B$ .

Обозначим неизвестную реакцию через  $X$ . Тогда на основании теоремы о минимуме потенциальной энергии деформации

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (13.86)$$

Так как  $U = \int_s \frac{M^2(\varphi) ds}{2EJ}$ , то формула (13.86) принимает вид

$$\int_s \frac{M(\varphi) ds}{EJ} \cdot \frac{dM(\varphi)}{dX} = 0. \quad (13.87)$$

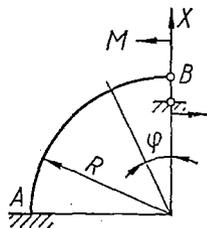


Рис. 392.

Имеем:

$$M(\varphi) = M + XR \sin \varphi; \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial X} = R \sin \varphi; \quad ds = R d\varphi.$$

Внеся эти значения в формулу (13.87), получим уравнения для определения реакции  $X$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(M + XR \sin \varphi) R \sin \varphi R d\varphi}{EJ} = 0;$$

$$M + XR \frac{\pi}{4} = 0; \quad X = -\frac{4M}{\pi R}.$$

Знак минус в выражении для  $X$  указывает, что первоначально выбранное направление для реакции следует изменить на противоположное.

## Глава XIV

### СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 90. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЭТАПЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Как уже указывалось, статически неопределимыми называются системы, силовые факторы в элементах которых только из уравнений равновесия твердого тела определить нельзя. В таких системах больше связей, чем необходимо для равновесия. Таким образом, некоторые связи оказываются в этом смысле как бы *лишними*, а усилия в них — *лишними неизвестными*. По числу лишних связей или лишних неизвестных усилий устанавливается степень статической неопределимости системы.

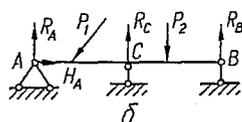
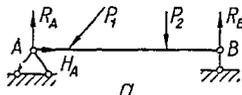


Рис. 393.

В § 37 были рассмотрены простейшие случаи статически неопределимых систем, элементы которых испытывали лишь осевое растяжение или сжатие. В настоящей главе рассмотрим более общие случаи, причем основное внимание будем уделять статически неопределимым балкам и рамам.

На рис. 393, *а* показана шарнирно опертая балка — система статически определимая и геометрически неизменяемая. Все три реакции ( $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ) определяются из трех условий равновесия плоской системы сил. Используя метод сечений, легко найти силовые факторы  $Q$ ,  $M$  в любом сечении балки.

Добавим еще одну связь, например шарнирно-подвижную опору в сечении  $C$  (рис. 393, *б*). Хотя в результате этого система стала более прочной и жесткой, однако с точки зрения геометрической неизменяемости эта связь лишняя. Теперь из трех уравнений равновесия четыре реакции ( $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ) определить нельзя. Таким

образом, балка, изображенная на рис. 393, б, один раз статически неопределима.

На рис. 394, а показана дважды статически неопределимая балка. Для определения пяти реакций есть лишь три уравнения равновесия. Следовательно, система содержит две лишние связи. Она может быть образована, например, из консоли (рис. 394, б) постановкой шарнирно-подвижных опор в сечениях *B* и *C*.

В конструкциях часто встречаются статически неопределимые балки с ломаной осью — рамы. В отличие от ферм, где стержни соединены между собой шарнирами и нагружены силами, приложенными в уз-

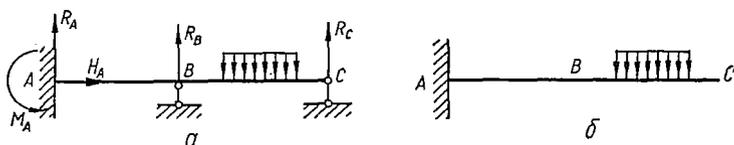


Рис. 394.

лах, рамы имеют один или несколько жестких узлов. В жестком узле торцы соединяемых стержней не имеют относительных поступательных перемещений, а также относительных поворотов.

Рамные конструкции могут состоять как из прямолинейных, так и из криволинейных элементов. На рис. 395 показана дважды статически неопределимая плоская рама. В этом случае, как и в предыдущем, для определения пяти реакций внешних связей имеем только три уравнения равновесия.

Рамы могут быть нагружены вполне произвольной нагрузкой, любым образом ориентированной.

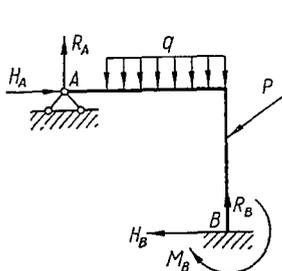


Рис. 395.

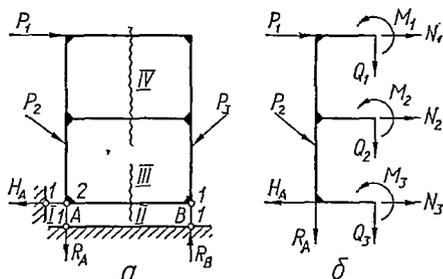


Рис. 396.

Статическая неопределимость может быть результатом не только введения дополнительных внешних связей, но также и условий образования системы. Рассмотрим раму, показанную на рис. 396, а. Очевидно, реакции  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  внешних связей опор легко определить из уравнений равновесия. Однако после этого условия равновесия не позволяют определить все силовые факторы в ее элементах.

Разрежем раму на две части и рассмотрим равновесие одной из ее частей (рис. 396, б). Действие отброшенной части на оставленную заменено в каждом сечении разреза тремя силовыми факторами:

осевой силой  $N$ , поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ . Таким образом, из трех уравнений равновесия надлежит определить девять неизвестных усилий. Система, следовательно, шесть раз статически неопределима. Поскольку она состоит из двух замкнутых (бесшарнирных) контуров, то каждый трижды статически неопределим.

Отметим, что постановка шарнира на оси стержня (рис. 397, а) обращает в нуль изгибающий момент в данном сечении и, следовательно, снижает степень статической неопределимости на единицу. Такой шарнир называют *одиночным*. Очевидно, рама, показанная на рис. 397, а, пять раз статически неопределима.

Шарнир, включенный в узел, где сходятся  $n$  стержней (рис. 397, б), снижает степень статической неопределимости на  $n - 1$ , так как заменяет собой столько же одиночных шарниров (рис. 397, в). Такой шарнир называется *общим*. Рама, изображенная на рис. 397, б, четыре раза статически неопределима.

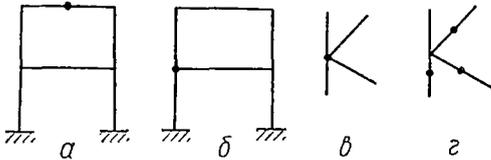


Рис. 397.

Для определения степени статической неопределимости плоских систем можно пользоваться формулой

$$s = 3k - m, \quad (14.1)$$

где  $s$  — степень статической неопределимости;

$k$  — число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;

$m$  — число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень. Так, например, рама, приведенная на рис. 396, имеет четыре замкнутых контура; у каждого шарнира указано соответствующее число одиночных шарниров, при этом группа стержней, жестко связанных между собой (не разделенных шарнирами), принимается за один стержень.

Итак, в рассматриваемом случае  $k = 4$ ,  $m = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$ . Следовательно,  $s = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ .

Как уже отмечалось в § 37, для определения усилий в статически неопределимых системах дополнительно к уравнениям статики составляют так называемые уравнения совместности деформаций. В самом деле, лишние связи накладывают определенные ограничения на перемещения тех сечений, к которым они приложены. Это обстоятельство и используют для составления дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями статики позволяют определить все силовые факторы в элементах системы.

Рассмотрим основные этапы расчета статически неопределимой системы:

1. Устанавливаем степень статической неопределимости, т. е. число лишних связей или лишних усилий.

2. Удаляя лишние связи, заменяем исходную систему статически определимой, которая называется основной системой. Выбор лишних связей зависит от желания расчетчика, так что для одной и той

же статически неопределимой исходной системы возможны различные варианты основных систем. Однако нужно следить за тем, чтобы каждая из них была геометрически неизменяемой. Рациональный выбор системы упрощает расчет.

Таким образом, *основной системой* называется любой из статически определимых вариантов рассматриваемой системы, полученный освобождением ее от лишних связей.

3. Загружаем основную систему заданной нагрузкой и лишними неизвестными усилиями, заменяющими действие удаленных связей. Такая система называется *эквивалентной системой*.

4. Для эквивалентности основной системы с исходной неизвестные усилия должны быть подобраны так, чтобы деформация основной системы не отличалась от деформации исходной статически неопределимой. Для этого приравнивают нулю перемещения точек приложения неизвестных усилий по направлению их действия. Из полученных таким образом уравнений определяют значения лишних неизвестных.

Определять перемещения соответствующих точек основной системы можно любым способом, однако лучше всего общими методами — методом Мора или способом Верещагина.

Найдя лишние неизвестные усилия, определение реакций и построение эпюр внутренних силовых факторов, а также подбор сечений и проверку прочности производим обычными способами.

Указанная схема расчета носит название *метода сил*, поскольку в качестве основных неизвестных здесь выбирают усилия лишних связей.

## § 91. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

В качестве примера рассчитаем балку, один конец которой защемлен, а другой оперт на шарнирно-подвижную опору (рис. 398, а).

Защемление левого конца, эквивалентное трем стержням, дает три реакции, шарнирно-подвижная опора — одну реакцию. Всего требуется определить четыре реакции. Следовательно, балка один раз статически неопределима. Для построения основной системы нужно устранить одну связь.

В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору. Основная система, полученная в результате удаления лишней связи, представляет собой консоль.

Нагружаем основную систему заданной распределенной нагрузкой, а вместо отброшенной опоры прикладываем неизвестную реакцию  $R_B = X_1$  (рис. 398, б). В дальнейшем лишние усилия будем обозначать буквой  $X$  независимо от того, сила это или момент.

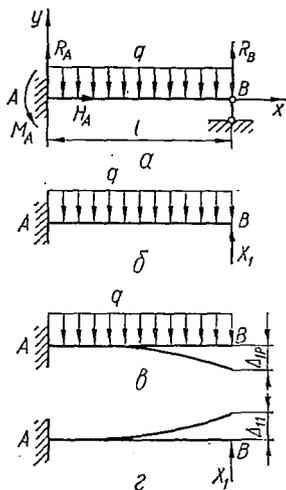


Рис. 398.

Полное перемещение точки  $B$  основной системы (от заданной нагрузки и лишнего неизвестного усилия) по направлению  $X_1$ , т. е. по направлению удаленной связи (рис. 398, б), должно быть равно нулю, так как в точке  $B$  исходная балка не имеет прогиба.

Таким образом, дополнительное уравнение перемещений имеет вид

$$\Delta_1 = 0. \quad (14.2)$$

Полный прогиб  $\Delta_1$  можно представить как сумму прогибов от внешней нагрузки  $\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EJ}$  (рис. 398, в) и неизвестной реакции  $\Delta_{11} =$

$= \frac{X_1 l^3}{3EJ}$  (рис. 398, з). (Методы определения  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{11}$  были приведены в гл. X и XIII). Тогда уравнение (14.2)

запишется в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0,$$

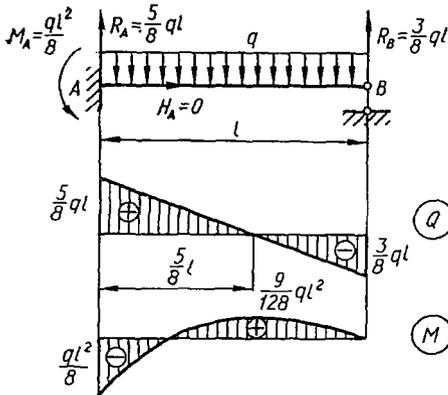


Рис. 399.

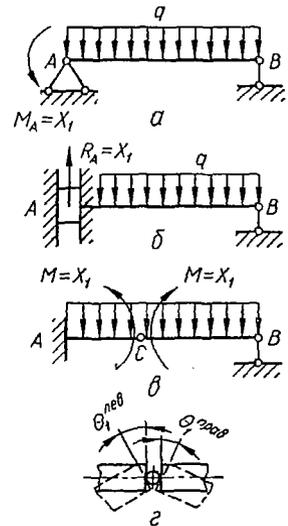


Рис. 400.

или

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

Отсюда искомая реакция

$$X_1 = \frac{3}{8} ql.$$

Теперь из уравнений статики легко вычислить остальные реакции, а затем обычным способом построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

На рис. 399 приведены эпюры  $Q$  и  $M$ , а также значения реакций опор. Проверка прочности или подбор сечения производятся обычным путем.

Напомним, что вид основной системы зависит от того, какие связи (усилия) выбраны в качестве лишних. Так, выбрав в качестве лишнего усилия опорный момент  $M_A$ , получим основную систему, заменив защемление шарнирно-неподвижной опорой (рис. 400, а). Здесь

основная система, кроме заданной нагрузки, загружается неизвестным моментом  $M_A = X_1$ , величина которого определится на основании уравнения перемещений (14.2). Под  $\Delta_1$  в этом случае следует понимать полный угол поворота сечения  $A$ .

На рис. 400, б показана основная система, полученная в предположении, что в качестве лишней неизвестной принята реакция  $R_A$ . Такое устройство опоры препятствует повороту и горизонтальному перемещению, но допускает вертикальное перемещение. В этом случае уравнение перемещений (14.2) выражает равенство нулю в основной системе вертикального перемещения (прогиба) точки  $A$ .

Наконец, основную систему можно получить и постановкой промежуточного шарнира в каком-либо сечении (рис. 400, в). Таким путем получаем статически определимую шарнирную балку. Здесь уже удалена не внешняя, а внутренняя связь.

Так как постановкой шарнира ликвидируется изгибающий момент в данном сечении балки, то для восстановления утраченных связей прикладываем два равных и противоположно направленных момента  $M = X_1$ , представляющих собой действие друг на друга отделенных шарниром частей балки.

Уравнение перемещений (14.2) в этом случае представляет собой равенство нулю взаимного угла поворота сечений правой и левой частей балки, примыкающих к шарниру (рис. 400, з):

$$\Delta_1 = \Theta_1^{\text{лев}} + \Theta_1^{\text{пр}} = 0, \quad (14.3)$$

поскольку в исходной балке эти сечения образуют одно сечение.

Отметим, что при построении основной системы в качестве лишних связей нельзя принимать элементы, реакции которых могут быть определены непосредственно из уравнений равновесия, например горизонтальную реакцию  $H_A$  опоры на рис. 399.

*Пример 64.* Балка  $AB$ , нагруженная равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 401, а), опирается по концам на шарнирные опоры, а посередине пролета подпирается пружиной (упругой опорой). Определить усилия, сжимающее пружину; построить эпюру изгибающих моментов, если податливость пружины, т. е. ее осадка от единичной силы (см. § 58),

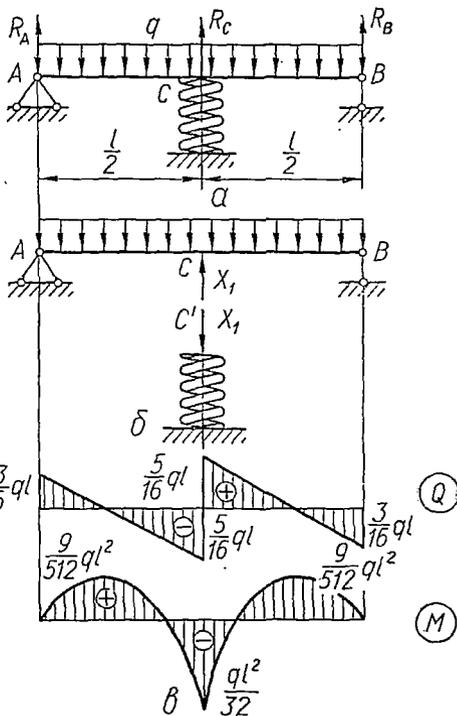


Рис. 401.

$$\alpha = \frac{64R^3n}{Gd^4}.$$

Рассматриваемая система один раз статически неопределима. В качестве лишнего неизвестного усилия примем реакцию пружины  $R_c = X_1$ . В соответствии с этим на рис. 401, б построена основная система. Чтобы она деформировалась как заданная балка, прогиб точки  $C$  балки должен быть равен осадке точки  $C'$  пружины. Другими словами, взаимное перемещение точек  $C$  и  $C'$ , т. е.  $\Delta_1$ , должно быть равно нулю.

Уравнение перемещения, следовательно, можно записать в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{1P} = 0,$$

где  $\Delta_{1P} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$  — перемещение точки  $C$  основной системы от заданной нагрузки  $q$ ;

$\Delta_{11} = \frac{X_1 l^3}{48EJ} + \lambda$  — взаимное перемещение точки  $C$  балки и точки  $C'$  пружины только от сил  $X_1$ , причем перемещение точки  $C'$  пружины

$$\lambda = \alpha X_1.$$

Положительные направления перемещений соответствуют направлениям сил  $X_1$ . Таким образом,

$$\frac{X_1 l^3}{48EJ} + \alpha X_1 - \frac{5ql^4}{384EJ} = 0.$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{\frac{5}{8} ql}{1 + \frac{48EJ\alpha}{l^3}}.$$

При абсолютно жесткой пружине  $\alpha = 0$  и

$$X_1 = \frac{5}{8} ql.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на рис. 401, в построены для последнего случая.

## § 92. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных, удобно составлять в так называемой *канонической форме*, т. е. по определенной закономерности.

Вначале рассмотрим систему, один раз статически неопределимую (рис. 402, а). В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору  $B$ . Тогда, нагрузив основную систему заданной нагрузкой и лишней неизвестной силой  $X_1$  (рис. 402, б), мы должны приравнять нулю полное перемещение точки  $B$  основной системы по направлению  $X_1$ :

$$\Delta_1 = \Delta_1(P, X_1) = 0. \quad (14.4)$$

Вычисляя  $\Delta_1$ , применим принцип независимости действия сил:

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11},$$

где  $\Delta_{1P}$  — перемещение от заданной нагрузки (рис. 402, в);

$\Delta_{11}$  — перемещение от силы  $X_1$ .

Если  $\delta_{11}$  — перемещение по направлению  $X_1$  от силы  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 402,  $\delta$ ), то

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1$$

и уравнение перемещений (14.4) примет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (14.5)$$

Это каноническая форма уравнения перемещений для один раз статически неопределимой системы. Из формулы (14.5) имеем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (14.6)$$

Для системы, имеющей две лишние связи, как, например, на рис. 403,  $a$ , дополнительные уравнения перемещений сечения  $A$  основной системы (рис. 403,  $b$ ) имеют вид

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0,$$

где  $\Delta_1 = \Delta_1(P, X_1, X_2)$  — полное перемещение точки  $A$  по направлению  $X_1$  от заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий  $X_1, X_2$ ;  $\Delta_2 = \Delta_2(P, X_1, X_2)$  — полное перемещение точки  $A$  по направлению  $X_2$  от указанных нагрузок.

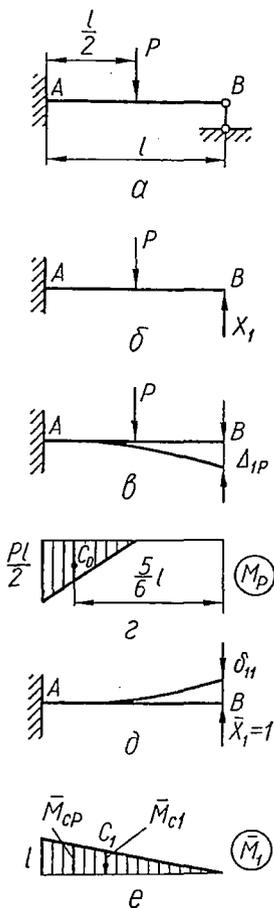


Рис. 402.

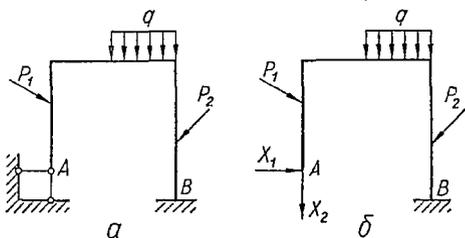


Рис. 403.

Исходя из принципа независимости действия сил, запишем перемещения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  в виде сумм перемещений, вызванных отдельно каждой из неизвестных сил  $X_1, X_2$  и заданной нагрузкой  $P$ . Используя введенные ранее (см. § 78) обозначения перемещений, находим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Полное перемещение  $\Delta_{ik}$  можно записать как произведение удельного перемещения  $\delta_{ik}$ , вызванного действием единичной силы, на величину соответствующей обобщенной силы:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1; \quad \Delta_{12} = \delta_{12}X_2; \quad \dots; \quad \Delta_{ik} = \delta_{ik}X_k.$$

Таким образом, уравнения (14.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Это каноническая форма уравнений перемещений для системы, два раза статически неопределимой.

По аналогии можно записать в канонической форме уравнения перемещений для любой  $n$  раз статически неопределимой системы:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Перемещения  $\Delta_{iP}$  и  $\delta_{ik}$ , входящие в канонические уравнения, чаще всего определяют по методу Мора или по способу Верещагина. При этом для балок и рам влиянием поперечных и нормальных сил обычно пренебрегают и учитывают лишь изгибающие моменты. Однако, определяя перемещения в балках прямоугольного поперечного сечения, для которых отношение высоты сечения к длине пролета  $\frac{h}{l} \geq \frac{1}{5}$ , поперечные силы учитывать обязательно. При расчете статически неопределимых рам с большими значениями указанного отношения ( $\frac{h}{l} > \frac{1}{5}$ ) ошибка, вызванная учетом интегралов продольных и поперечных сил, также становится существенной, особенно для высокой рамы. Следует иметь в виду, что в реальных балочных, рамных и арочных конструкциях отношение  $\frac{h}{l}$  обычно меньше  $\frac{1}{10}$ . Поэтому при определении перемещений в общей формуле Мора вполне допустимо сохранять интеграл, учитывающий лишь изгибающие моменты.

Для определения перемещений строим эпюры изгибающих моментов (см., например, рис. 402) в основной системе отдельно от заданной нагрузки (состояние  $P$ ) и от каждой единичной силы:  $\bar{X}_1 = 1$  (состояние 1);  $\bar{X}_2 = 1$  (состояние 2);  $\dots$ ;  $\bar{X}_n = 1$  (состояние  $n$ ). Ординаты соответствующих эпюр обозначим, как обычно, через  $M_P, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ .

Тогда на основании формулы (13.46) находим:

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \Delta_{nP} = \int_s \frac{\bar{M}_n M_P ds}{EJ}.$$



Определив коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta_{iP}$  и  $\Delta_{iT}$  из системы линейных уравнений (14.10) находим значения лишних неизвестных усилий  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Далее обычным способом строим эпюры внутренних усилий  $N, Q, M$  в элементах системы. Иногда построение эпюр удобно производить методом сложения эпюр  $M_P$  с эпюрами  $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$ , предварительно умноженными на значения  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$\begin{aligned} M &= M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_P; \\ Q &= Q_1 X_1 + Q_2 X_2 + \dots + Q_P; \\ N &= N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_P. \end{aligned}$$

Существенно отметить, что буквенный вид канонических уравнений остается неизменным при любом возможном варианте основной системы. Изменяется лишь смысл лишних неизвестных и геометрический смысл перемещений. Например, при выборе в качестве лишних неизвестных внутренних сил в каких-либо сечениях коэффициенты в канонических уравнениях представляют собой соответствующие взаимные перемещения сечений по направлению лишних неизвестных усилий.

На рис. 404 показана трижды статически неопределимая плоская рама (а) и два варианта основной системы (б и в).

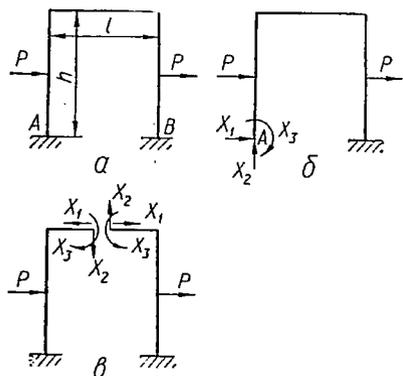


Рис. 404.

Для любой трижды статически неопределимой системы канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

При выборе основной системы по первому варианту (рис. 404, б) уравнения (14.11) выражают требование равенства нулю перемещений сечения A по направлениям  $X_1, X_2$  и  $X_3$ .

Второй вариант основной системы (рис. 404, в) образован разрезом. Так как в плоской системе в сечениях действуют, вообще говоря, три силовых фактора (осевая сила, поперечная сила и изгибающий момент), то к сторонам разреза следует приложить в качестве лишних неизвестных указанные силовые факторы  $X_1, X_2, X_3$ , выражающие взаимное действие обеих частей системы друг на друга в данном сечении. При таком выборе основной системы уравнения (14.11) выражают равенство нулю полных взаимных перемещений сторон разреза по направлениям лишних неизвестных. Например, третье уравнение системы (14.11) означает равенство нулю перемещения по направлению  $X_3$ , т. е. взаимного угла поворота сторон разреза под действием заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий.

Принимая в качестве лишних неизвестных внутренние усилия, во многих случаях можем значительно упростить расчет. Например, если исходная система симметрична (по конфигурации и расположению жесткостей), то основную систему выгодно строить также симметричной, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю.

Так, при расчете симметричной рамы, показанной на рис. 404, а, основную систему целесообразнее получить разрезом горизонтального стержня (ригеля) по середине (рис. 405, а). При этом основная система будет также симметричной. Тогда в числе лишних неизвестных будем иметь симметричные усилия  $X_1$ ,  $X_3$  и кососимметричные  $X_2$ . Эпюры изгибающих моментов от усилий  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$  и  $\bar{X}_3 = 1$  показаны на рис. 405, б—г.

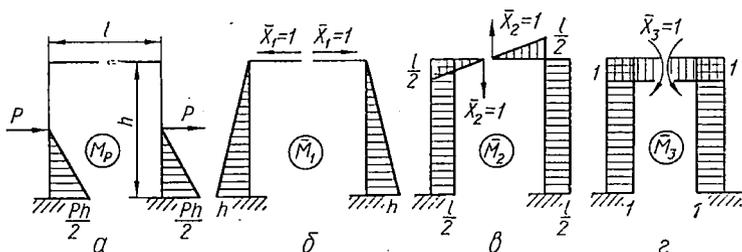


Рис. 405.

Заметим, что эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_3$  симметричные, а эпюра  $\bar{M}_2$  кососимметричная. Перемножение симметричной эпюры на кососимметричную дает в результате нуль.

Определим перемещение  $\delta_{12} = \delta_{21}$ . Пользуясь способом Верещагина, получим:

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{h^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = 0. \quad (14.12)$$

Аналогично

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Таким образом, система уравнений (14.11) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Если при этом заданная нагрузка  $P$  кососимметрична (рис. 404, а), то эпюра  $M_P$  также кососимметрична (рис. 405, а) и перемещение  $\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$ . Тогда из первого и третьего уравнений (14.13) следует, что симметричные усилия в месте разреза равны нулю:

$$X_1 = 0; \quad X_3 = 0.$$

Заметим, что когда нагрузка симметрична, то эпюра  $M_P$  также симметрична и  $\Delta_{2P} = 0$ . Тогда из второго уравнения (14.13) следует, что кососимметричное усилие  $X_2 = 0$ .

Пример 65. Построить эпюры силовых факторов в элементах рамы, показанной на рис. 406, а. Рама нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , приложенной к горизонтальному стержню (ригелю). Для простоты принято, что  $h = l$  и жесткости стержней на изгиб одинаковы:  $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$ .

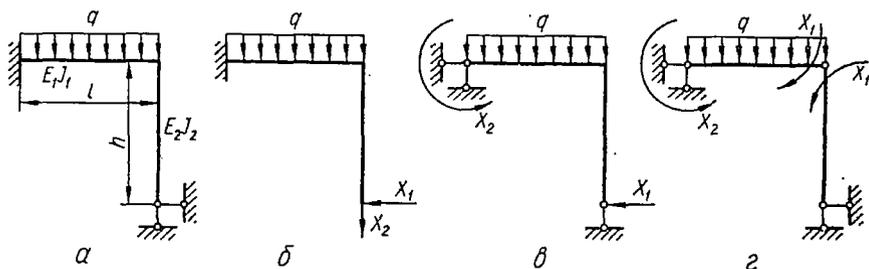


Рис. 406.

Легко видеть, что система дважды статически неопределима. На рис. 406, б—г показаны некоторые возможные варианты эквивалентной системы. Для расчета примем вариант, показанный на рис. 406, б. Чтобы определить два лишних неизвестных усилия  $X_1$  и  $X_2$ , воспользуемся каноническими уравнениями (14.8):

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

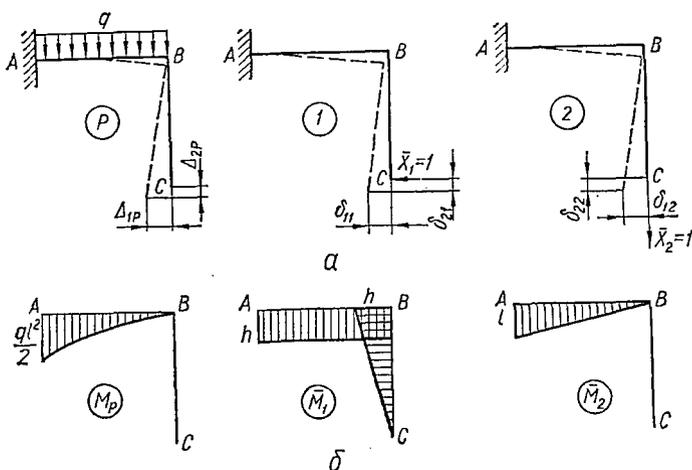


Рис. 407.

Для определения перемещений  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{iP}$  рассматриваем основную систему, отдельно нагруженную заданной нагрузкой и каждой единичной силой  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 407, а). Так как стержни прямолинейные, то удобно применить для определения перемещений способ Верещагина. Эпюры изгибающих моментов  $M_P$ ,  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  показаны на рис. 407, б.

Для определения  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{2P}$  площади эпюр  $M_P$  перемножаем на ординаты эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ , взятые под центрами тяжести эпюр  $M_P$ :

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E_1 J_1} \cdot \frac{ql^3}{6} \cdot h = \frac{ql^4}{6EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E_1 J_1} \cdot \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Перемещения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{22}$  получаем аналогичным умножением эпюр  $\bar{M}_1$  на  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на  $\bar{M}_2$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_1 J_1} \cdot hl \cdot h + \frac{1}{E_2 J_2} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{4}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E_1 J_1} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Наконец,  $\delta_{12}$  определяем перемножением эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E_1 J_1} \cdot hl \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{2EJ}.$$

Подставляя значения перемещений в канонические уравнения, получаем:

$$\frac{4}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = -\frac{ql}{6};$$

$$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 = -\frac{ql}{8}.$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{ql}{28}; \quad X_2 = -\frac{3}{7} ql.$$

Знак минус в выражении для  $X_2$  показывает, что первоначально выбранное направление этой силы (рис. 406, б) следует изменить на противоположное.

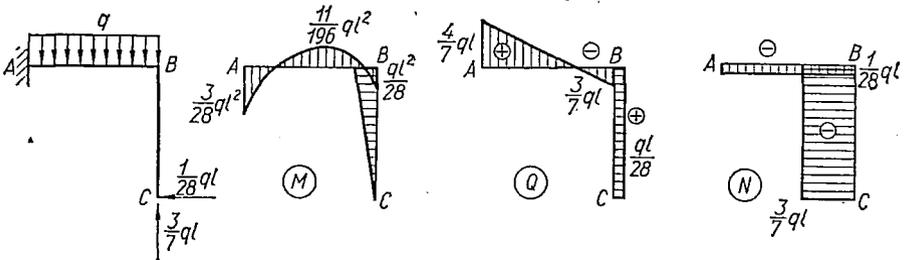


Рис. 408.

Рассматривая теперь эквивалентную систему, т. е. статически определимую основную систему под действием заданной нагрузки и найденных сил  $X_1$  и  $X_2$ , легко построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов и составить условия прочности элементов рамы.

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и осевых сил приведены на рис. 408.

Подберем прямоугольное сечение для стержней рамы, если  $q = 1 \text{ Т/м}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ . Материал стержней Ст. 2,  $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ ,  $[\tau] = 900 \text{ кг/см}^2$ . Отношение высоты  $a$  к ширине  $b$  сечения составляет 2 : 1.

Как видно из эпюр внутренних усилий (рис. 408), в опасном сечении

$$M_{\max} = \frac{3}{28} ql^2 = 43 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{см}; \quad Q_{\max} = \frac{4}{7} ql = 1143 \text{ кг};$$

$$N = \frac{ql}{28} = 71,5 \text{ кг}.$$

Так как осевая сила незначительна, то размеры сечения подбираем только из условия прочности на изгиб:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{43 \cdot 10^3}{1400} = 30,6 \text{ см}^3.$$

Поскольку

$$W = \frac{a^2 b}{6} = \frac{a^3}{12},$$

то, округляя, получаем:

$$a \geq \sqrt[3]{12 \cdot 30,6} \approx 7,2 \text{ см}; \quad b = \frac{a}{2} = 3,6 \text{ см}; \quad W = 31,1 \text{ см}^3.$$

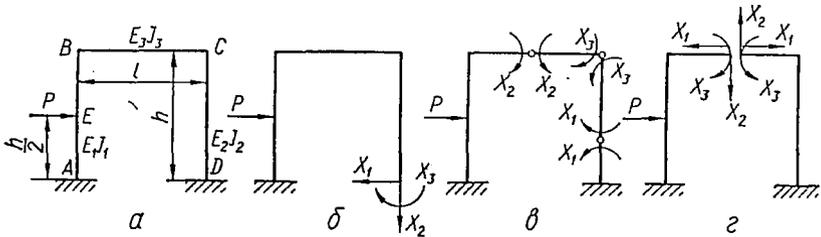


Рис. 409.

Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении определится как сумма напряжений от действия изгибающего момента и осевой силы:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{F} = \frac{43000}{31,1} + \frac{71,5}{7,2 \cdot 3,6} = 1380 + 2,76 \approx 1383 \text{ кг/см}^2 < 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{F} = \frac{3 \cdot 1143}{2 \cdot 7,2 \cdot 3,6} = 65,5 \text{ кг/см}^2 < 900 \text{ кг/см}^2.$$

*Пример 66.* Рассчитать однопролетную раму (рис. 409), нагруженную горизонтальной силой  $P$  посредине левой стойки. Для простоты вычислений принимаем, что  $h = l$ ;  $E_1 J_1 = E_2 J_2 = E_3 J_3 = EJ$ .

Система, представляющая собой один замкнутый контур, трижды статически неопределима. Для образования основной системы следует удалить три связи. Различные варианты эквивалентной системы показаны на рис. 409 б—г. Принимая во внимание симметрию рамы, в качестве основной системы целесообразно принять симметричный вариант, показанный на рис. 409, г. В этом случае лишними неизвестными будут усилия в разрезе.

Для определения лишних неизвестных воспользуемся каноническими уравнениями (14.11):

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях перемещения  $\delta$  и  $\Delta$  представляют собой соответствующие взаимные перемещения сторон разреза.

Чтобы определить эти перемещения, применим способ Верещагина. На рис. 410 показаны эпюры изгибающих моментов для основной системы от заданной нагрузки и от единичных обобщенных сил  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$ ,  $\bar{X}_3 = 1$ .

Отметим, что эпюры  $M_1$  и  $M_3$  симметричные, а эпюра  $M_2$  — косимметричная. Как указывалось, побочные коэффициенты, определяющиеся перемножением симметричной эпюры на косимметричную, равны нулю. В силу этого  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ;  $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ .

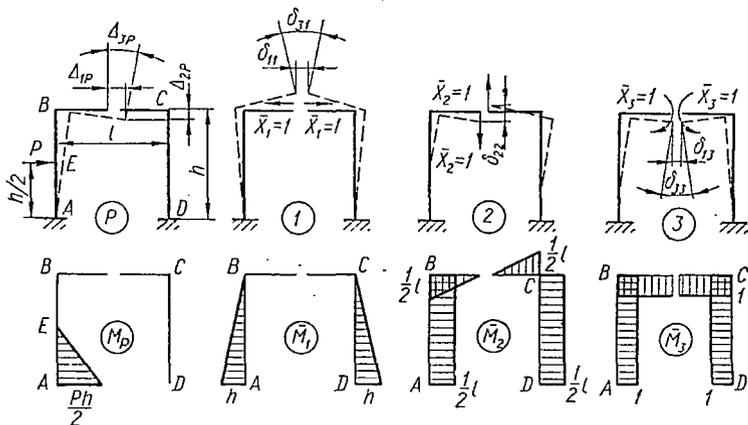


Рис. 410.

Канонические уравнения принимают вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \quad (14.14)$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \quad (14.15)$$

Перемножая соответствующие эпюры, находим:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{E_1J_1} \cdot \frac{Ph^2}{8} \cdot \frac{5}{6}h = -\frac{5}{48} \cdot \frac{Ph^3}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E_1J_1} \cdot \frac{Ph^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Ph^3}{16EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{1}{E_1J_1} \cdot \frac{Ph^2}{8} \cdot 1 = \frac{Ph^2}{8EJ};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_1J_1} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h + \frac{1}{E_3J_3} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2h^3}{3EJ};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{1}{E_1J_1} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{E_3J_3} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot 1 = -\frac{h^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E_1J_1} \cdot h \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{E_2J_2} \cdot h \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{E_3J_3} \cdot 2 \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{l}{3} = \frac{7}{12} \cdot \frac{h^3}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \frac{h}{E_1J_1} + \frac{l}{E_2J_2} + \frac{h}{E_3J_3} = \frac{3h}{EJ};$$

Подставив в уравнения (14.15) и (14.14) найденные значения  $\delta$  и  $\Delta$ , получим:

$$\frac{2}{3} hX_1 - X_3 = \frac{5}{48} Ph; \quad -\frac{1}{3} hX_1 + X_3 = -\frac{1}{24} Ph;$$

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{h^3}{EJ} X_2 + \frac{Ph^3}{16EJ} = 0.$$

Отсюда  $X_1 = 0,187P$ ;  $X_2 = -0,107P$ ;  $X_3 = 0,021Ph$ .

На рис. 411 показана эквивалентная система и построены эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

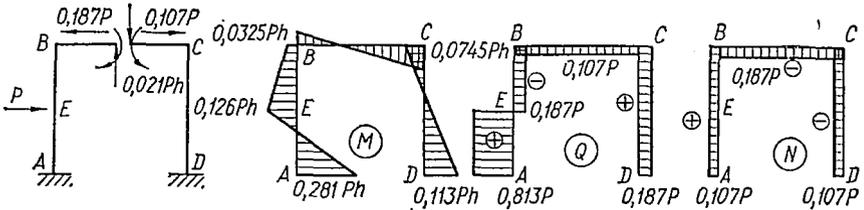


Рис. 411.

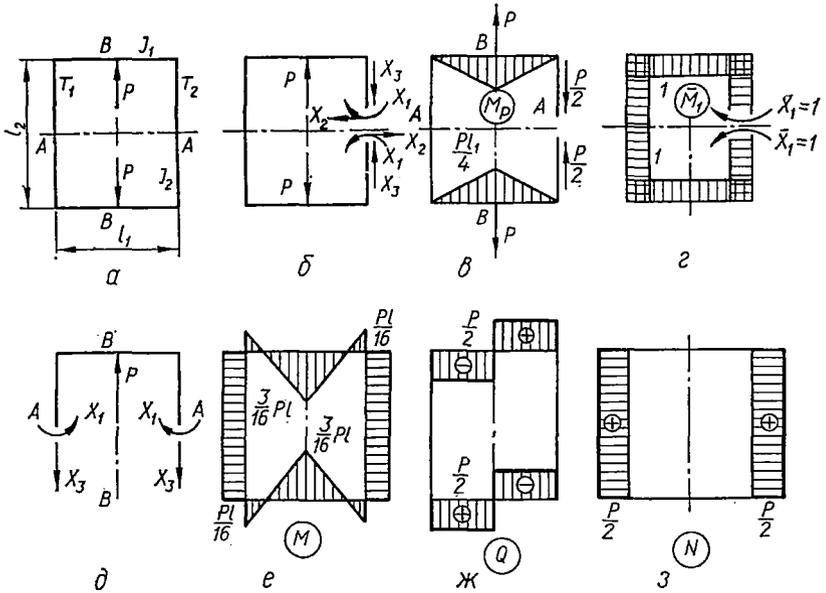


Рис. 412.

Рассчитаем прямоугольную раму (рис. 412, а), состоящую из двух одинаковых поперечин и двух стоек. Рама нагружена двумя равными и противоположно направленными силами, приложенными посредине поперечин. Внутри рамы температура  $T_1$ , а снаружи —  $T_2$ ;  $T_1 > T_2$ . Жесткость поперечин  $EJ_1$ , стоек —  $EJ_2$ .

Рама, образующая замкнутый контур без шарниров, трижды статически неопределима. Задачу можно существенно упростить, используя симметрию системы и нагружения. Выберем симметричную основную

систему, разрезав одну из стоек по оси симметрии (рис. 412, б). В месте разреза приложим систему усилий  $X_1, X_2, X_3$ . Как указывалось, вследствие симметрии нагрузки поперечная сила  $X_2 = 0$ .

Рассечем теперь раму по оси  $A-A$  (рис. 412, д). Учитывая симметрию системы относительно оси  $B-B$ , из условий равновесия сразу определяем силу  $X_3$ :

$$2X_3 = P; \quad X_3 = \frac{P}{2}.$$

Остается определить лишь один статически неопределимый фактор  $X_1$ . Каноническое уравнение перемещений имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1T} = 0,$$

где  $\Delta_{1P} + \Delta_{1T} = \Delta_{1P}$ ,  $\tau$  — взаимный угол поворота сторон разреза, вызванный действием нагрузки  $P$  и температуры  $T$ .

Температурные перемещения определяем по формуле

$$\Delta_{kT} = \sum_i \int \bar{N}_k \alpha \frac{T_H + T_B}{2} dx + \sum_i \int \bar{M}_k \alpha \frac{T_H - T_B}{h} dx,$$

где  $\frac{T_H + T_B}{2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$  — средняя температура нагрева элемента;

$T_H - T_B = T_1 - T_2$  — разность температур крайних волокон.

Если деформации элемента  $dx$  от действия температуры и единичных силовых факторов одного знака, то подынтегральные выражения положительны. Если в пределах участка температура постоянна, то

$$\begin{aligned} \Delta_{kT} &= \sum \left( \bar{N}_k \alpha \frac{T_H + T_B}{2} l + \alpha \frac{T_H - T_B}{h} \int \bar{M}_k dx \right) = \\ &= \alpha \sum \left( \bar{N}_k \frac{T_H + T_B}{2} l + \Omega_k \frac{T_H - T_B}{h} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega_k = \int \bar{M}_k dx$  — площадь эпюры  $\bar{M}_k$ .

Для определения перемещений строим эпюры  $M_P, \bar{M}_1$  (рис. 412, в, г). Эпюра  $\bar{N}_1$  равна нулю. Пользуясь способом Верещагина, находим:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{2}{EJ_1} \cdot \frac{Pl_1^2}{8} = \frac{Pl_1^2}{4EJ_1}; \\ \Delta_{1T} &= -2\alpha (l_1 + l_2) \frac{T_1 - T_2}{h}. \end{aligned}$$

Здесь в правой части поставлен знак минус, так как при  $T_1 > T_2$  внутренние волокна элементов рамы удлинены, а в единичном состоянии (рис. 412, г) — сжаты. Далее,

$$\delta_{11} = \frac{2l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{EJ_2},$$

следовательно,

$$X_1 = \frac{-\frac{Pl_1^2}{4J_1} + 2\alpha E(l_1 + l_2)\frac{T_1 - T_2}{h}}{2\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2}\right)}$$

В случае  $l_1 = l_2 = l$  и  $J_1 = J_2 = J$

$$X_1 = -\frac{Pl}{16} + \alpha EJ\frac{T_1 - T_2}{h}$$

На рис. 412, *e*—з приведены эпюры внутренних силовых факторов для случая  $T_1 - T_2 = 0$ ,  $P \neq 0$ .

*Пример 67.* Рассчитать ферму, изображенную на рис. 413, *a*, в предположении, что все стержни изготовлены из одного материала и имеют одинаковые сечения. Стержни 5 и 6 общего узла не имеют.

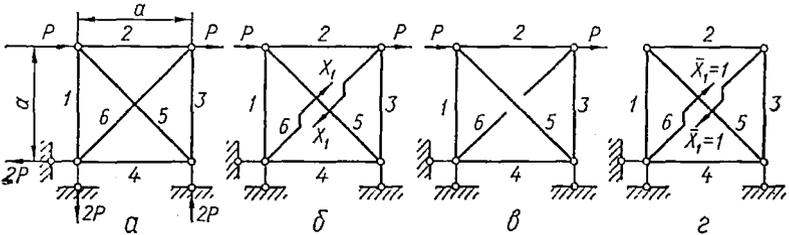


Рис. 413.

Легко видеть, что система один раз статически неопределима. Основная система, полученная разрезом стержня 6, показана на рис. 413, *б*. Лишнее неизвестное усилие  $X_1$  определяем из канонического уравнения, которое в этом случае выражает равенство нулю взаимного смещения сторон разреза:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Так как в элементах фермы действуют только осевые усилия, то перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  определяем (см. § 83) по формулам

$$\delta_{11} = \sum_1^6 \frac{\bar{N}_i^2 l}{EF}; \quad (14.16)$$

$$\Delta_{1P} = \sum_1^6 \frac{\bar{N}_i N_P l}{EF}, \quad (14.17)$$

где  $\bar{N}_i$ —усилия в стержнях от нагрузки  $\bar{X}_1 = 1$ ;  
 $N_P$ —усилия в стержнях от заданной нагрузки.

Для определения усилий  $N_P$  и  $\bar{N}_i$  рассматриваем основную систему в состоянии *P* (рис. 413, *в*) и в состоянии *1* (рис. 413, *г*).

Вычисления удобно вести при помощи таблицы (табл. 18). Знак минус при  $\bar{N}_i$  и  $N_P$  показывает, что в соответствующем стержне усилие сжимающее. В таблице не приведены жесткости, так как для всех элементов они одинаковы.

№ стержня	Длина стержня $l$	$\bar{N}_l$	$N_P$	$\bar{N}_l N_P l$	$\bar{N}_l^2 l$
1	$a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
2	$a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$P$	$-Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$
3	$a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	$a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-2P\sqrt{2}$	$-4Pa$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
$\Sigma$	—	—	—	$-Pa\frac{\sqrt{2}}{2}(5 + 4\sqrt{2})$	$2a(1 + \sqrt{2})$

Таким образом,

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pa}{\sqrt{2}EF}(5 + 4\sqrt{2});$$

$$\delta_{11} = \frac{2a(1 + \sqrt{2})}{EF}.$$

Подставив эти значения в каноническое уравнение, находим:

$$X_1 = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{2(2 + \sqrt{2})} P \approx 1,56P.$$

### § 93. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

*Неразрезными* называют балки, лежащие более чем на двух опорах и не имеющие промежуточных шарниров. Такие балки, широко применяемые в различных конструкциях, принадлежат к числу статически неопределимых.

На рис. 414 показана балка, опирающаяся на  $m$  шарнирных опор. Одна из опор делается шарнирно-неподвижной для восприятия осевой

нагрузки, остальные — шарнирно-подвижными, что дает возможность балке свободно изменять свою длину с изменением температуры.

Опоры принято нумеровать слева направо, обозначая крайнюю левую номером 0; номер пролета определяется номером принадлежащей ему правой опоры.

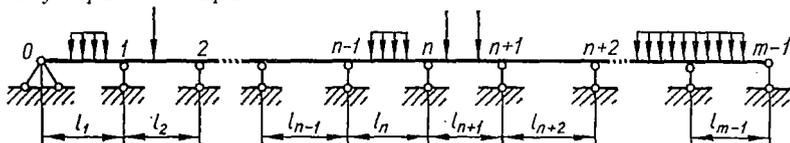


Рис. 414.

При опирании на  $m$  шарнирных опор имеем столько же вертикальных реакций. Так как из условий равновесия определить можно лишь две реакции, то такая система  $(m - 2)$  раза статически неопределима.

Как видно, число лишних связей, а следовательно, и лишних реакций, равно числу промежуточных опор. Иногда крайняя опора выполняется в виде защемления. В этом случае степень статической неопределимости увеличивается на единицу по сравнению с шарнирной опорой.

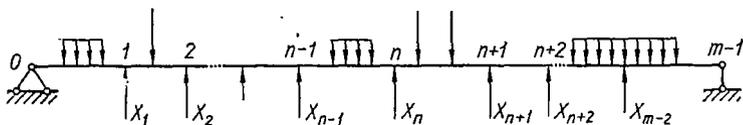


Рис. 415.

Для получения основной системы можно освободиться от всех промежуточных опор, заменив их действие неизвестными реакциями  $X_1, X_2, \dots, X_{m-2}$ , приложенными к основной системе дополнительно к заданной нагрузке (рис. 415). Дополнительные уравнения перемещений

$$\Delta_1 = 0; \Delta_2 = 0; \dots; \Delta_{m-2} = 0$$

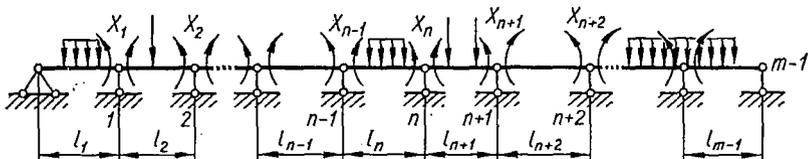


Рис. 416.

выражают условия равенства нулю прогибов в точках прикрепления промежуточных опор. Однако такой способ расчета громоздок, поскольку в каждое уравнение перемещений входят все искомые неизвестные усилия. Значительно выгоднее строить основную систему постановкой шарниров в сечениях над всеми промежуточными опорами (рис. 416). Лишними неизвестными в этом случае будут изгибающие моменты в опорных сечениях балки.



отдельно от заданной нагрузки (рис. 418, а) и от каждой из лишних неизвестных, равных единице (рис. 418, б—г). Площади эпюор от заданной нагрузки на  $n$  и  $(n+1)$ -м пролетах обозначим соответственно через  $\Omega_n$  и  $\Omega_{n+1}$ , а расстояния центров тяжести этих площадей от левой и правой опор своего пролета — через  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $a_{n+1}$  и  $b_{n+1}$  соответственно.

Применяя способ Верещагина и полагая, что на протяжении каждого пролета балка имеет постоянное сечение, получаем:

$$\Delta_{nP} = \frac{1}{EJ_n} \Omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \quad (14.20)$$

$$\delta_{n, n-1} = -\frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{l_n}{6EJ_n}; \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} \delta_{nn} &= \frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \\ &= \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \end{aligned} \quad (14.22)$$

$$\delta_{n, n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \quad (14.23)$$

Внося выражения (14.20) — (14.23) в формулу (14.19), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2X_n \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left( \frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.24)$$

Поскольку при таком выборе основной системы все лишние неизвестные представляют собой изгибающие моменты в опорных сечениях балки, то в уравнении (14.24) принято вместо  $X_i$  писать  $M_i$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2M_n \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left( \frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.25)$$

Уравнение (14.25) называется *уравнением трех моментов*. Составляем их столько, сколько вводим шарниров, образуя основную систему. Чтобы написать эти уравнения, достаточно в формуле (14.25) дать индексу  $n$  последовательно значения 1, 2, 3 и т. д., соответствующие номерам промежуточных опор. В каждое из таких уравнений входит не более трех неизвестных опорных моментов  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ , а в первое и последнее уравнения — только по два неизвестных момента. Решение системы легко выполнить методом последовательного исключения неизвестных.

Для балки постоянного поперечного сечения ( $J = \text{const}$ ) уравнение трех моментов упрощается так:

$$\begin{aligned} M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = \\ = -6 \left( \frac{Q_n a_n}{l_n} + \frac{Q_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Рассмотрим примеры составления уравнений трех моментов. На рис. 419 изображена двухпролетная балка. Система один раз статически неопределима. Уравнение трех моментов следует написать один раз для промежуточной опоры 1.

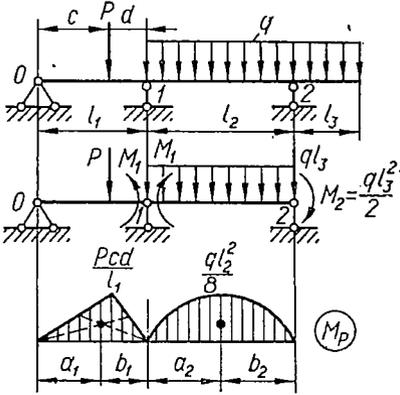


Рис. 419.

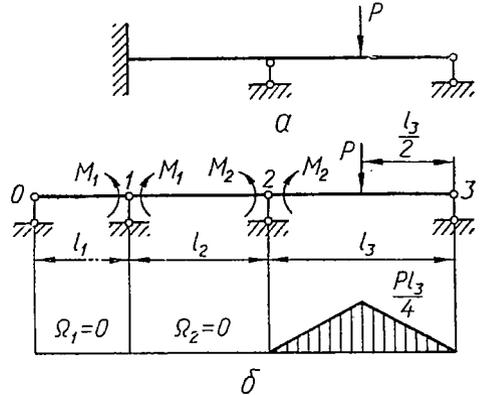


Рис. 420.

Полагая в уравнении (14.26)  $n = 1$ , имеем:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left( \frac{Q_1 a_1}{l_1} + \frac{Q_2 b_2}{l_2} \right). \quad (14.27)$$

Поскольку крайняя левая опора шарнирная и не нагружена сосредоточенным моментом, то

$$M_0 = 0.$$

Момент на крайней правой опоре равен моменту от нагрузки, приложенной к консоли. Следовательно,

$$M_2 = -\frac{ql_3^2}{2}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} P \frac{cd}{l_1} l_1 = \frac{1}{2} Pcd; \\ a_1 &= \frac{1}{3} (l_1 + c); \quad b_1 = \frac{1}{3} (l_1 + d); \\ Q_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{ql_2^2}{8} l_2 = \frac{ql_2^3}{12}; \\ a_2 &= b_2 = \frac{l_2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (14.27) принимает вид

$$2M_1(l_1 + l_2) = -6 \left( \frac{Pcd}{6} \cdot \frac{l_1 + c}{l_1} + \frac{ql_2^3}{24} \right) + \frac{ql_2^3}{2}.$$

Отсюда легко найти момент  $M_1$ .

Если левый конец балки зашцеилен (рис. 420, а), то зашцеиление можно заменить дополнительным пролетом бесконечно большой жесткости или бесконечно малой длины (рис. 420, б). Уравнения трех моментов для 1-й и 2-й опор следующие:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left( \frac{\Omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{l_2} \right);$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left( \frac{\Omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\Omega_3 b_3}{l_3} \right).$$

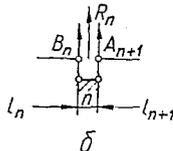
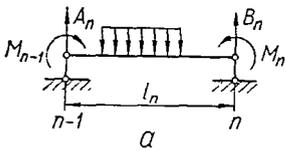


Рис. 421.

Очевидно,

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0;$$

$$\Omega_3 = \frac{Pl_3^2}{8};$$

$$a_3 = b_3 = \frac{l_3}{2};$$

$$M_3 = 0.$$

Кроме того, в первом уравнении системы следует положить  $l_1 = 0$ . Тогда

$$2M_1 l_2 + M_2 l_2 = 0;$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) = -6 \frac{Pl_3^2}{16}.$$

Аналогично поступаем, если зашцеилен правый конец балки.

Определив опорные моменты, вычисление реакций, построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил производят обычным способом.

Вначале определяют реакции опор каждой простой балочки от заданной нагрузки и опорных моментов. Обозначим эти реакции для  $n$ -го пролета через  $A_n$  и  $B_n$  (рис. 421, а). Очевидно, что

$$A_n = A_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n};$$

$$B_n = B_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (14.28)$$

где  $A_n^0$ ,  $B_n^0$  — реакции только от заданной нагрузки на пролете.

Полная реакция промежуточной опоры  $n$  (рис. 421, б)

$$R_n = B_n + A_{n+1} = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (14.29)$$

Здесь  $R_n^0 = B_n^0 + A_{n+1}^0$  — реакция опоры  $n$ , вызванная действием заданной нагрузки, приложенной к пролетам  $l_n$  и  $l_{n+1}$ .

После определения реакций строят эпюры  $Q$  и  $M$  для каждой двухопорной балочки основной системы.

Окончательную эпюру изгибающих моментов легко построить также как сумму эпюр моментов от нагрузки и от опорных моментов, причем последняя эпюра имеет вид ломаной линии, соединяющей отрезки, отложенные над опорами и равные опорным моментам (см. пример 68).

Можно рекомендовать следующий порядок расчета неразрезной балки. После нумерации опор и пролетов (опор — с нуля, пролетов — с единицы) под исходной балкой изображают основную систему,

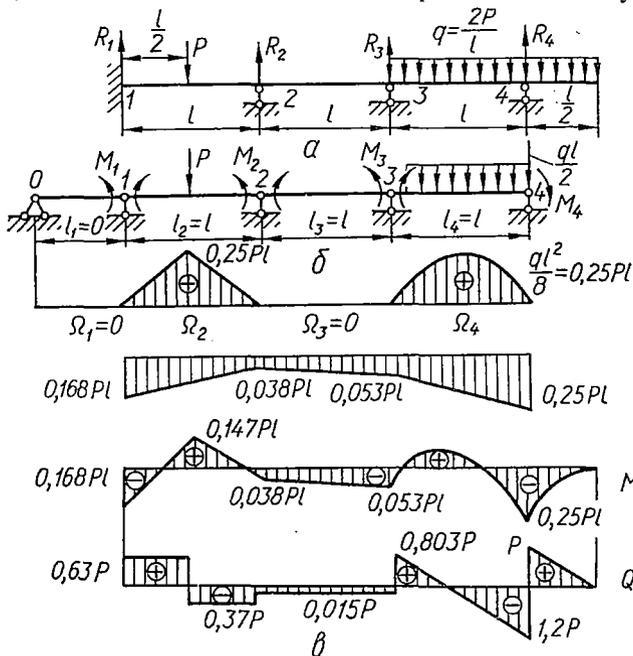


Рис. 422.

нагруженную заданной нагрузкой и неизвестными опорными моментами. Далее строят эпюры  $M$  для отдельных балочек основной системы только от заданной нагрузки на пролетах. Вычисляют площади  $\Omega_i$  этих эпюр и координаты  $a_i, b_i$  их центров тяжести. Для каждой промежуточной опоры выписывают уравнение трех моментов. Решая полученную таким образом систему уравнений, определяют неизвестные опорные моменты. Затем определяют реакции и строят эпюру поперечных сил и изгибающих моментов. Последнюю эпюру, как указывалось, можно построить как сумму эпюр моментов от нагрузки и от опорных моментов.

*Пример 68.* Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 422, а.

Для простоты вычислений принято  $q = \frac{2P}{l}$ . Эквивалентная система показана

на рис. 422, б, причем защемление левого конца балки заменено дополнительным пролетом. Имеем:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_3 = 0; \\ \Omega_2 &= \frac{Pl^2}{8}; \quad a_2 = b_2 = \frac{l}{2}; \\ \Omega_4 &= \frac{ql^3}{12} = \frac{Pl^2}{6}; \quad a_4 = b_4 = \frac{l}{2}.\end{aligned}$$

Составляем уравнения трех моментов для трех промежуточных опор ( $n = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}2M_1 + M_2 &= -\frac{3}{8}Pl, \quad (n = 1); \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= -\frac{3}{8}Pl, \quad (n = 2); \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= -\frac{Pl}{2}, \quad (n = 3).\end{aligned}\tag{14.30}$$

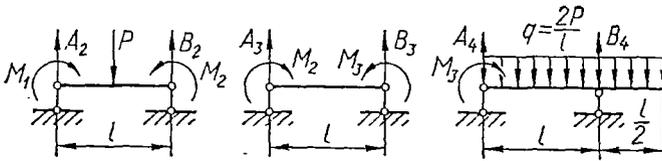


Рис. 423.

Очевидно, момент  $M_4$  равен опорному моменту нагрузки, приложенной к консоли, т. е.

$$M_4 = -\frac{Pl}{4}.\tag{14.31}$$

Решая систему уравнений (14.30) с учетом выражения (14.31), будем иметь:

$$M_1 = -0,168Pl; \quad M_2 = -0,038Pl; \quad M_3 = -0,053Pl.$$

Отрицательные значения моментов свидетельствуют о том, что в действительности они направлены противоположно указанным на рис. 422, б.

Реакции опор (рис. 423) определяем по формулам (14.28) и (14.29):

$$\begin{aligned}A_2 &= 0,5P + 0,13P = 0,63P; \\ B_2 &= 0,5P - 0,13P = 0,37P; \\ A_3 &= \frac{M_3 - M_2}{l} = -0,015P; \\ B_3 &= -\frac{M_3 - M_2}{l} = 0,015P; \\ A_4 &= \frac{3}{8}ql - \frac{M_3}{l} = 0,803P; \\ B_4 &= \frac{9}{8}ql + \frac{M_3}{l} = 2,20P.\end{aligned}$$

Полные реакции опор

$$\begin{aligned}R_1 &= A_2 = 0,63P; \\ R_2 &= B_2 + A_3 = 0,36P; \\ R_3 &= B_3 + A_4 = 0,82P; \\ R_4 &= B_4 = 2,20P.\end{aligned}$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 422, в.

## § 94. ВЛИЯНИЕ НЕТОЧНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР ПО ВЫСОТЕ

В рассмотренных выше случаях предполагалось, что все опоры находятся на одном уровне. На практике, однако, нередки случаи смещения опор от проектного уровня.

В статически определимых системах смещения опор не вызывают дополнительных усилий в конструкции. В неразрезных же балках из-за их статической неопределенности эти смещения вызывают значительные начальные напряжения, которые, как показывают расчеты, зависят от величины смещения опор и жесткости балки, возрастая в прямой пропорциональности от величины указанных факторов.

Пусть  $(n-1)$ ,  $n$  и  $(n+1)$ -я опоры получат смещения по вертикали соответственно на  $y_{n-1}$ ,  $y_n$ ,  $y_{n+1}$  (рис. 424). В результате этого в основной системе участки  $l_n$  и  $l_{n+1}$  повернутся на углы

$$\Theta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \quad \text{и} \quad \Theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}, \quad (14.32)$$

которые будем считать положительными в случае поворота по часовой стрелке.

Легко видеть, что такое смещение вызывает взаимный угол поворота торцевых сечений у  $n$ -й опоры

$$\Delta_{ic}^I = \Theta_{n+1} - \Theta_n. \quad (14.33)$$

Следовательно, каноническое уравнение (14.19) при расчете на смещение опор принимает вид

$$\delta_{n, n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \Delta_{ic} = 0 \quad (14.34)$$

и выражает требование равенства нулю взаимного угла поворота торцевых сечений у  $n$ -й опоры, вызванного действием всех лишних неизвестных и смещением опор.

Внося в уравнение (14.34) значения  $\delta$  из уравнений (14.21) — (14.23) и  $\Delta_{ic}$  из выражения (14.33), при  $J_n = J_{n-1} = \dots = \text{const}$  получаем следующее уравнение трех моментов:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6EJ (\Theta_{n+1} - \Theta_n). \quad (14.35)$$

Для определения опорных моментов, возникающих вследствие смещения опор, составляют и решают уравнения типа (14.35).

<sup>1</sup> Индекс «с» при  $\Delta$  указывает, что причиной обобщенного перемещения является смещение опоры.

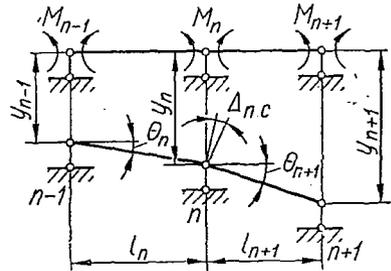


Рис. 424.

Заметим, что начальные напряжения, возникающие от смещения опор, могут быть использованы для выравнивания напряжений от заданной нагрузки.

*Пример 69.* Определить напряжения, возникающие в стальном валу, установленном в трех подшипниках (рис. 425, а), при смещении вниз на 2 мм крайнего правого подшипника. Диаметр вала  $d = 4$  см. Расстояние между подшипниками  $l = 50$  см. Подшипники рассматривать как шарнирные опоры.

Эквивалентная система показана на рис. 425, б, в. Так как крайние опоры шарнирные, то

$$M_0 = M_2 = 0;$$

кроме того,

$$\theta_1 = 0.$$

Следовательно, уравнение трех моментов, полагая в уравнении (14.35)  $n = 1$ , можно записать в виде

$$2M_1 \cdot 2l = -6EJ\theta_2,$$

откуда

$$M_1 = -1,5 \frac{EJ}{l} \theta_2.$$

Так как

$$\theta_2 = \frac{y_2}{l} = \frac{\delta}{l},$$

то

$$M_1 = -1,5 \frac{EJ\delta}{l^2}.$$

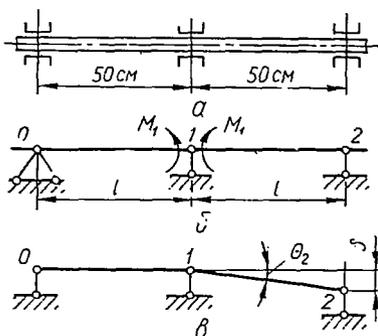


Рис. 425.

Наибольшее напряжение в сечении над опорой 1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1}{W} = \frac{3EJ\delta}{2Wl^2} = 1200 d\delta = 960 \text{ кг/см}^2.$$

## § 95. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Статически неопределимые системы, содержащие криволинейные стержни, рассчитывают по методу сил в такой же последовательности, как и системы, рассмотренные в предыдущих параграфах. В этих случаях, однако, перемещения, входящие в канонические уравнения, нельзя вычислять по способу Верещагина. Для этой цели рекомендуется применять метод Мора.

В качестве примера рассмотрим круговое кольцо постоянного поперечного сечения, растягиваемое двумя равными и противоположно направленными силами (рис. 426, а).

Как замкнутая система, кольцо трижды статически неопределимо. Однако использование симметрии при выборе основной системы существенно упрощает решение.

Выберем основную систему путем разреза по сечению  $A_2$  (рис. 426, б). Из условий симметрии следует, что поперечная сила в этом сечении

$$X_2 = 0.$$

Разрезав кольцо на две части по оси  $A_1 A_2$  (рис. 426,  $\theta$ ), из условий равновесия отсеченной части находим, что осевая сила  $X_3 = \frac{P}{2}$ . Остается только определить неизвестный изгибающий момент в сечении  $A_2$ . Окончательная эквивалентная система показана на рис. 426,  $z$ .

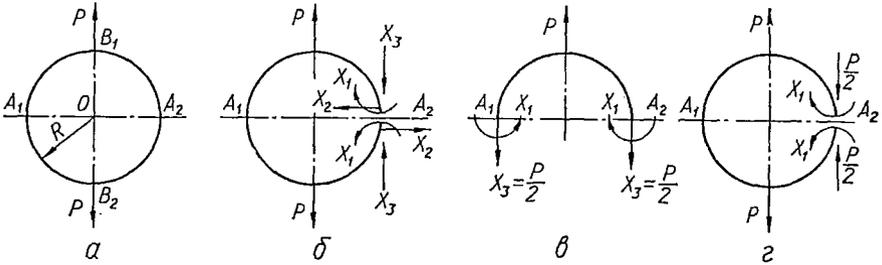


Рис. 426.

Каноническое уравнение перемещений, выражающее условие равенства нулю взаимного угла поворота граней разреза, имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения определим по способу Мора, сначала рассматривая основную систему под действием заданной нагрузки, а затем — под действием лишнего неизвестного усилия (рис. 427). Влиянием осевых и поперечных усилий пренебрегаем. Очевидно,

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad \delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}.$$

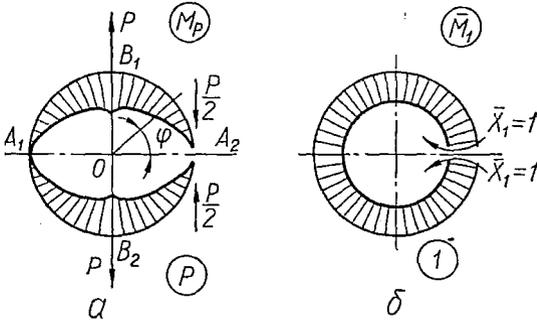


Рис. 427.

Учитывая симметрию в состояниях  $P$  и  $1$  основной системы (рис. 427,  $a$ ,  $b$ ), при вычислении перемещений  $\Delta_{1P}$  и  $\delta_{11}$  можно ограничиться рассмотрением одной четверти кольца. Имеем:

$$M_P = -\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi), \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\bar{M}_1 = -1.$$

Положительное направление для изгибающего момента принято такое, при котором наружные волокна сжаты. Таким образом,

$$\Delta_{1P} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right); \quad \delta_{11} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R d\varphi}{EJ} = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) PR = -0,182PR.$$

Итак, изгибающий момент в сечении  $A$

$$M_A = 0,182PR$$

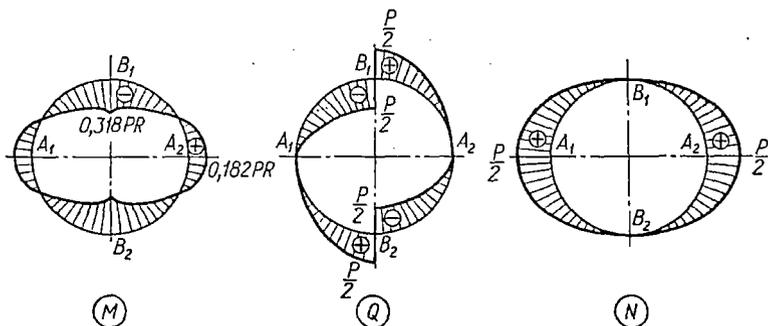


Рис. 428.

и направлен в сторону, противоположную ранее принятой. В произвольном сечении кольца изгибающий момент

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= -\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) + M_A = \\ &= -0,5PR (1 - \cos \varphi) + 0,182PR. \end{aligned}$$

Наибольший изгибающий момент действует в сечениях  $B$ , при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , и составляет величину

$$M_B = -0,318PR.$$

Поперечная сила  $Q(\varphi) = 0,5P \sin \varphi$ , осевая сила  $N(\varphi) = 0,5P \cos \varphi$ . На рис. 428 показаны эпюры внутренних силовых факторов в сечениях кольца.

## § 96. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

После определения лишних неизвестных усилий перемещения в статически неопределимых системах можно найти обычными способами. При этом следует пользоваться методами, которые в каждом частном случае наиболее просто приводят к результату. Например, прогибы и углы поворота сечений статически неопределимых балок,

несущих сложную нагрузку, удобно определять по методу начальных параметров или графически. Способ Мора, являющийся универсальным, применим, конечно, во всех случаях. Им широко пользуются при определении перемещений в балках, рамах и фермах.

Вычисляя перемещения по формуле Мора

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}, \quad (14.36)$$

следует рассмотреть заданную систему под действием нагрузки (окончательные эпюры силовых факторов  $M$ ,  $N$  и  $Q$  статически неопределимой системы), а также под действием единичного силового фактора,

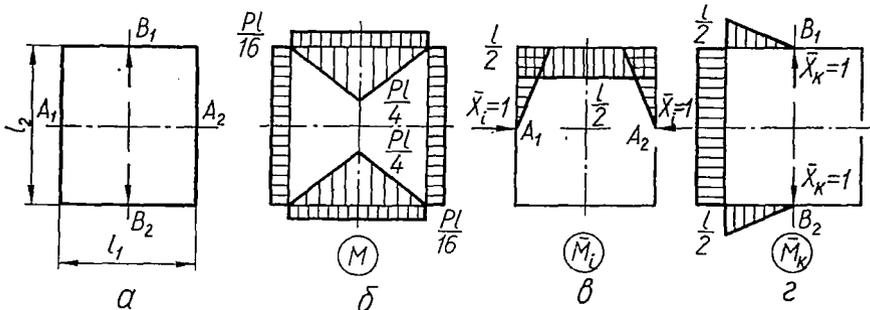


Рис. 429.

соответствующего искомому перемещению (единичные эпюры  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ). Если при этом единичную нагрузку прикладывать непосредственно к заданной статически неопределимой системе, то каждый раз для построения единичных эпюр  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{Q}_i$  вновь придется решать статически неопределимую задачу. Однако этого можно избежать, если учесть, что исходная статически неопределимая система и основная статически определимая, нагруженная заданными силами и найденными лишними неизвестными, полностью тождественны по условиям работы. Поэтому, определяя какие-либо перемещения, мы вправе прикладывать единичную нагрузку к основной статически определимой системе. Последняя может быть выбрана по любому возможному варианту.

В качестве примера вычислим взаимные перемещения точек  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях для рамы (см. с. 402) без учета действия температур. Определим только перемещения, вызванные изгибом, так как перемещениями от продольных деформаций и сдвига можно пренебречь. На рис. 429, б показаны составляющие суммарной эпюры изгибающих моментов в виде, удобном для применения способа Верещагина.

Для определения взаимного перемещения в горизонтальном направлении точек  $A_1$ ,  $A_2$  прикладываем к основной системе в этих точках

(рис. 429, в) единичные силы  $\bar{X}_i = 1$ . Перемножая эпюру  $M$  на  $\bar{M}_i$  и принимая, что  $l_1 = l_2 = l$ , находим:

$$\Delta_{A_1-A_2} = \Delta_i = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{Pl^3}{16} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl^3}{8} \cdot \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^3}{32} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}.$$

Чтобы определить взаимное вертикальное перемещение точек  $B_1$  и  $B_2$ , прикладываем к основной системе в этих точках две единичные силы (рис. 429, г)  $\bar{X}_k = 1$ . Перемножая эпюру  $M$  на  $\bar{M}_k$ , находим:

$$\begin{aligned} \Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k &= \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl^3}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^3}{16} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{l^3}{8} \cdot \frac{Pl}{16} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{5}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Отметим, что в случаях действия на статически неопределимую систему температуры к перемещениям основной системы, нагруженной найденными лишними неизвестными, следует добавить чисто температурные перемещения. При этом формула (14.36) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_T ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_T ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_T ds}{GF} + \\ &+ \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds, \end{aligned} \quad (14.37)$$

где  $M_T$ ,  $N_T$ ,  $Q_T$  — внутренние силовые факторы от лишних неизвестных, обусловленных действием температуры.

## § 97. КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Окончательные эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  подлежат обязательной проверке. Проверяются при этом условия равновесия и деформаций.

Для проверки условий равновесия следует вырезать узел или какую-либо часть системы и удостовериться в ее равновесии, т. е. в выполнении условий равенства нулю суммы проекций или моментов всех внешних и внутренних сил, приложенных к этой части:

$$\sum P_x = 0; \quad \sum P_y = 0; \quad \sum M = 0.$$

При этом нужные величины следует брать непосредственно из окончательных эпюр.

Рассмотрим, например, как должна быть произведена проверка условий равновесия для эпюры изгибающих моментов, показанной на рис. 430. Вырежем узлы  $B$  и  $C$  (рис. 431). Действие отброшенных частей рамы на узлы заменим соответственно изгибающими моментами  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ ,  $M_{BE}$  и  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ . Направления моментов соответствуют расположению эпюр на сжатых волокнах.

Из условия равновесия узла  $B$  следует, что

$$M_{BA} + M_{BE} - M_{BC} = 0.$$

Из условия равновесия узла  $C$  вытекает, что моменты  $M_{CB}$  и  $M_{CD}$  должны быть равны по величине и обратны по направлению. Аналогично можно проверить эпюры  $N$  и  $Q$ .

Отметим, что проверка условий равновесия не является достаточной,

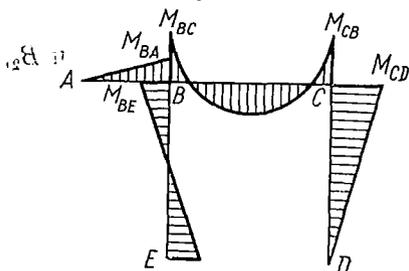


Рис. 430.

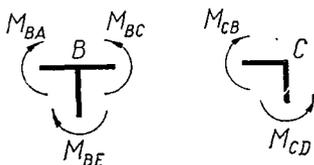


Рис. 431.

так как проверка правильности построения эпюр по известным значениям лишних неизвестных усилий не дает оснований для суждения о правильности самих величин.

Общим контролем является проверка выполнения условий деформаций (граничных условий). При этом следует убедиться, что окончательные эпюры согласуются с условиями опорных закреплений и неразрывности контура.

Так как в заданной статически неопределимой системе перемещение по направлению любой лишней связи равно нулю, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на эпюру моментов любого  $i$ -го состояния основной системы должно равняться нулю, т. е.

$$\sum_s \int \frac{\bar{M}_i M ds}{EJ} = 0. \quad (14.38)$$

В качестве основной системы  $i$ -го состояния лучше всего выбирать систему, отличную от принятой при расчете. Количество проверок условий деформаций должно равняться числу лишних связей.

Произведем в качестве примера проверку условий деформаций для рамы, рассмотренной в § 92 (пример 6б). Окончательная эпюра  $M$  приведена также на рис. 432, а.

Вычислим взаимные перемещения граней разреза ригеля в горизонтальном направлении.

Для этого следует перемножить эпюру  $M$  на единичную эпюру  $\bar{M}_1$  (рис. 432, б). При умножении часто удобно заменить эпюру  $M$  ее составляющими:

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots$$

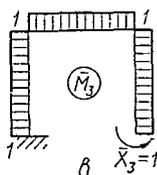
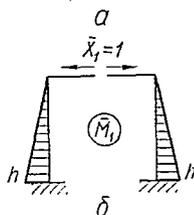
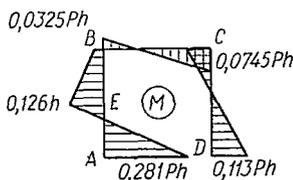


Рис. 432.

единичную эпюру  $\bar{M}_1$  (рис. 432, б). При умножении часто удобно заменить эпюру  $M$  ее составляющими:

Получим:

$$EJ\Delta_1 = \sum_s \int \bar{M}_1 M ds = -\frac{Ph^2}{8} \cdot \frac{5}{6}h + \frac{2 \cdot 0,187Ph^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h - \\ - 0,021Ph \cdot 2h \frac{h}{2} = Ph^3 (-0,104 + 0,125 - 0,021) = \\ = Ph^3 (-0,125 + 0,125) = 0.$$

Теперь проверим, равен ли нулю угол поворота сечения  $D$  исходной системы. С этой целью, умножая эпюру  $M$  на единичную эпюру  $\bar{M}_3$  основной системы (рис. 432,  $e$ ), находим умноженный на  $EJ_0$  угол поворота:

$$EJ_0 \Delta_3 = \sum_s \int \frac{\bar{M}_3 M ds}{J}.$$

Здесь  $EJ_0$  — жесткость поперечного сечения какого-либо элемента рамы.

Так как в бесшарнирной системе  $\bar{M}_3 = 1$ , то

$$EJ_0 \Delta_3 = \sum_s \int M \frac{J_0}{J} ds.$$

Интеграл в правой части представляет собой площадь эпюры  $M$ , умноженную на отношение  $\frac{J_0}{J}$ . Он называется приведенной площадью эпюры  $M$ .

Таким образом, для замкнутых бесшарнирных контуров приведенная площадь эпюры моментов равна нулю, т. е.

$$\sum_s \int \frac{MJ_0}{J} ds = 0. \quad (14.39)$$

В нашем случае, учитывая, что  $J = \text{const}$ , получим:

$$EJ \Delta_3 = \left( -\frac{Ph^2}{8} + 2 \frac{0,187Ph^2}{2} - 0,021Ph \cdot 3h \right) = Ph^2 (-0,125 + \\ + 0,187 - 0,063) = Ph^2 (-0,188 + 0,187) = -0,001Ph^2.$$

Так как при расчете системы лишние неизвестные вычисляются с определенной точностью, то и результаты проверки, естественно, имеют некоторую погрешность — искомые перемещения отличаются от нуля. Поэтому при проверке рекомендуется отдельно вычислять сумму положительных и отрицательных членов. Если разница между обеими суммами, выраженная в процентах к меньшей из них, невелика (до 5%), то результат расчета можно считать удовлетворительным. В нашем случае

$$\frac{-0,188 + 0,187}{0,187} = -0,535\%.$$

Аналогично осуществляется контроль правильности расчета неразрезной балки.

## § 98. О РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ

В общем случае действия сил на брус (см. гл. XII) в поперечных сечениях имеем шесть внутренних силовых факторов (рис. 433) —  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Для неподвижного прикрепления сечения нужно

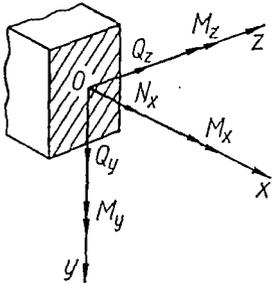


Рис. 433.

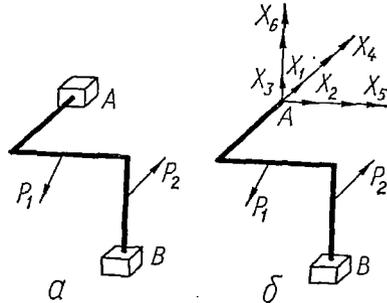


Рис. 434.

наложить шесть связей, усилия в которых могут быть найдены из шести уравнений равновесия твердого тела. Количество связей в пространственных системах, превышающее указанное число, дает степень статической неопределимости.

Так, пространственная рама, изображенная на рис. 434, *a*, шесть раз статически неопределима, так как из уравнений равновесия можно определить лишь реакции одной жесткой опоры. Один из вариантов основной статически определенной системы показан на рис. 434, *б*. Для определения шести неизвестных усилий решаем,

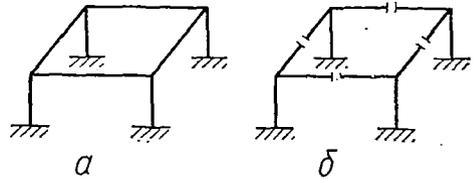


Рис. 435.

шесть канонических уравнений обычного вида (см. § 92).

Показанная на рис. 435, *a* пространственная рама 24 раза статически неопределима. Это легко обнаружить по числу разрезов, кото-

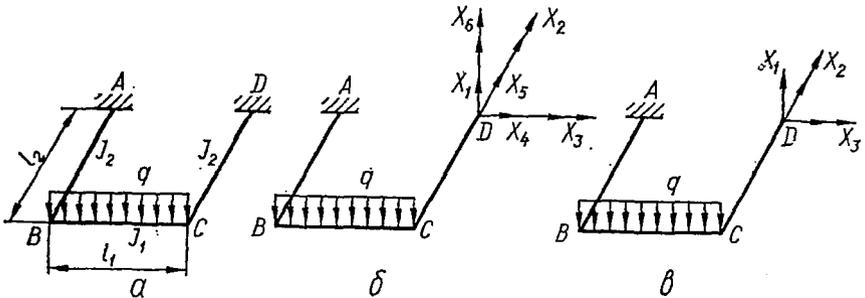


Рис. 436.

рые необходимо сделать, чтобы получить основную систему (рис. 435, *б*) причем каждый разрез освобождает шесть связей.

В машиностроительных конструкциях встречаются плоские рамы, работающие на пространственную нагрузку. На рис. 436, *a* показана

плоская рама с защемленными концами, нагруженная перпендикулярно к плоскости рамы.

На основании принципа взаимности можно показать, что в плоских системах, нагруженных перпендикулярно к плоскости системы, силовые факторы, характеризующие работу рамы в ее плоскости, равны нулю. Следовательно, из шести неизвестных усилий (рис. 436, б) три равны нулю, т. е.  $X_4 = X_5 = X_6 = 0$ .

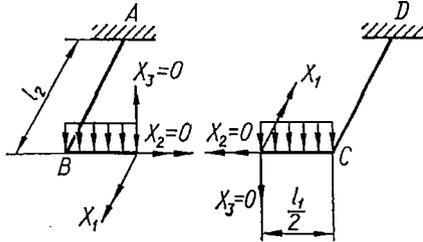


Рис. 437.

Это обстоятельство существенно упрощает расчет плоских рам, нагруженных пространственной нагрузкой. Любую нагрузку можно разложить на составляющие в плоскости рамы и перпендикулярные к ней. Используя принцип независимости действия сил, можно рассчитать систему отдельно от нагрузок в плоскости рамы и от перпендикулярных к ней.

В качестве примера рассчитаем раму, показанную на рис. 436. Чтобы использовать симметрию ее, образуем основную систему разрезом стержня  $BC$  посередине (рис. 437). Такой вариант выгоднее изображенного на рис. 436, в.

Из соображений симметрии основной системы следует, что кососимметричные силовые факторы в сечениях разреза (крутящий момент

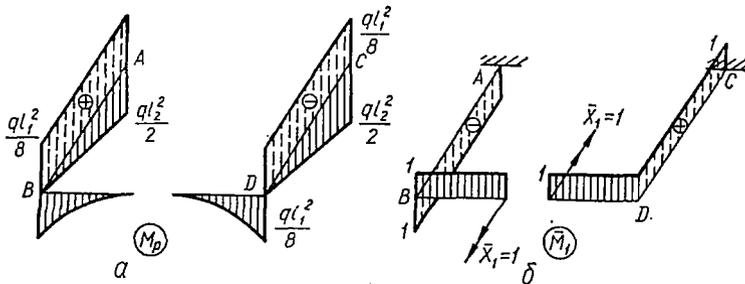


Рис. 438.

$X_2$  и поперечная сила  $X_3$ ) равны нулю. Неизвестный изгибающий момент  $X_1$  легко определить из канонического уравнения перемещений

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Для определения перемещений строим в основной системе эпюры изгибающих и крутящих моментов для  $P$ -го (рис. 438, а) и единичного  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 438, б) состояний. Эпюры крутящих моментов заштрихованы штриховыми линиями.

Перемещения определяем по формулам Мора для пространственного случая действия сил, причем пренебрегаем влиянием осевых и поперечных сил. Получаем:

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{z1} M_{zP} ds}{EJ_z} + \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP} ds}{GJ_K}; \quad (14.40)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{z1} ds}{EJ_z} + \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1} ds}{GJ_K}. \quad (14.41)$$

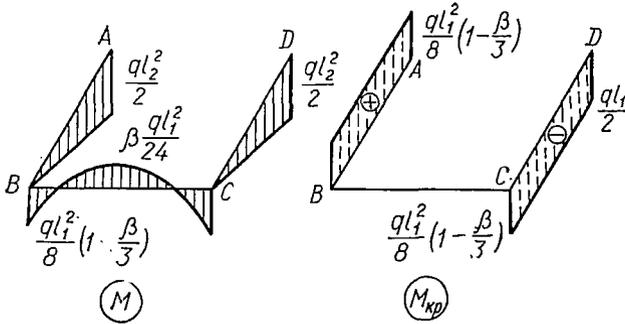


Рис. 439.

Учитывая, что единичные эпюры ограничены прямыми линиями, перемещения  $\Delta_{1P}$ ,  $\delta_{11}$  можем определить и по способу Верещагина. Получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{GJ_K} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot l_2 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -\frac{ql_1^3}{24EJ_1} \left( 1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right); \\ \delta_{11} &= \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_K} = \frac{l_1}{EJ_1} \left( 1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24} \cdot \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1}} = \beta \frac{ql_1^2}{24},$$

где

$$\beta = \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \cdot \frac{l_2}{l_1}}.$$

Окончательные эпюры изгибающих и крутящих моментов показаны на рис. 439.

## РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

## § 99. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИВЫХ БРУСЬЯХ

В различных конструкциях часто встречаются брусья с криволинейной осью. К ним относятся грузоподъемные крюки, проушины, звенья цепей, ободы шкивов и колес, арки и т. п. Оси этих брусьев — плоские кривые. Брусья же с пространственной кривой осью встречаются редко и здесь не рассматриваются.

В поперечных сечениях плоского кривого бруса в общем случае имеются три внутренних силовых фактора —  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Правила их определения

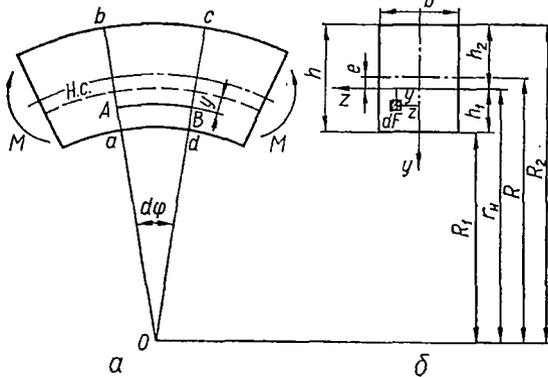


Рис. 440.

и построения их эпюр для кривых брусьев были рассмотрены в § 23. В § 24 выведены дифференциальные зависимости (3.13) — (3.15) между внутренними силовыми факторами и нагрузкой.

В настоящей главе рассмотрим вопросы определения напряжений и перемещений в кривых брусьях, а также расчет их на прочность. При этом ограничимся рассмотрением брусьев, имеющих продольную плоскость симметрии (рис. 440), в которой и действуют внешние нагрузки. В силу симметрии перемещения точек оси бруса также будут происходить в указанной плоскости.

Исследования показывают, что при изгибе распределение нормальных напряжений в поперечном сечении, а также величина максимальных напряжений в кривом брусе иные, нежели в балке с прямой осью. При прочих равных условиях это различие тем больше, чем больше кривизна бруса, которая характеризуется отношением высоты  $h$  поперечного сечения к радиусу  $R$  кривизны его оси (рис. 440).

В связи с указанным обстоятельством принято различать брусья малой кривизны, у которых  $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ , и брусья большой кривизны, у которых  $\frac{h}{R} \geq \frac{1}{5}$ . При изгибе брусьев малой кривизны нормальные напряжения с достаточной для инженерных расчетов точностью можно

определять по формулам (10.10), (10.13), выведенным для балок с прямой осью. Подсчеты максимальных напряжений по этим формулам для бруса прямоугольного сечения при  $\frac{h}{R} = \frac{1}{15}$  дают разницу в 2% по сравнению с напряжениями, вычисленными по более точным формулам, которые будут получены ниже. При  $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$  разница возрастает до 3,5%, а при  $\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$  она достигает 7%.

**Вывод формулы для нормальных напряжений при изгибе бруса большой кривизны.** Рассмотрим случай чистого изгиба кривого бруса (рис. 440). Для прямого стержня мы сначала предположили неизвест-

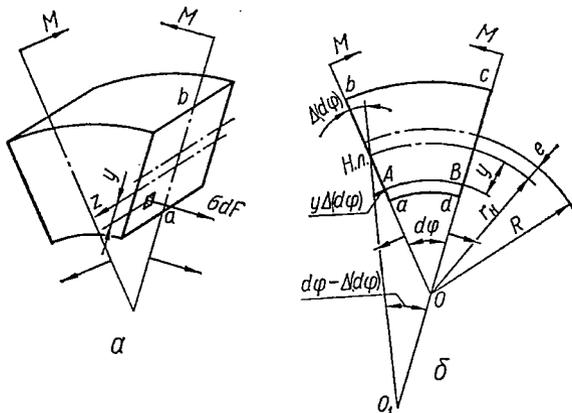


Рис. 441.

ным положение нейтрального слоя, а затем выяснили, что он находится на уровне оси стержня. Здесь также предположим, что нейтральный слой имеет неизвестный пока радиус кривизны  $r_n$ , вообще говоря, отличный от радиуса  $R$  оси стержня.

Вывод формулы для напряжений  $\sigma$  при изгибе проведем по той же схеме, которая применялась для бруса с прямой осью, и в основу его положим те же гипотезы: гипотезу плоских сечений и гипотезу о том, что продольные волокна не давят друг на друга.

Проведем в сечении оси  $y$  и  $z$ , как показано на рис. 440. Ось  $z$  совпадает с нейтральной линией сечения, положение ее пока не определено. Положительным принимаем направление оси  $y$  к центру кривизны бруса.

Для получения уравнений статической стороны задачи рассечем кривой брус на две части каким-либо поперечным сечением, например  $ab$  (рис. 440), и выделим в сечении элемент площади  $dF$ , находящийся на расстоянии  $y$  от нейтральной линии (рис. 440 и 441, а). На элемент действует усилие  $\sigma dF$ . Из условий (10.2) и (10.3) при  $N^0 = 0$ ,  $M_z = M$  получим:

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \quad (15.1)$$

Условие  $M_y = \int_F \sigma z dF = 0$  удовлетворяется автоматически в силу симметрии сечения относительно оси  $y$ .

Рассматривая геометрическую сторону задачи, выделим из кривого бруса (рис. 440) двумя бесконечно близкими сечениями  $ab$  и  $cd$  элементарный участок, которому соответствует до деформации угол  $d\varphi$ . После деформации угол между этими сечениями изменится на некоторую величину  $\Delta(d\varphi)$  (рис. 441, б). Наблюдая деформацию произвольного волокна  $AB$ , расположенного на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя и имеющего до деформации длину  $(r_n - y)d\varphi$ , легко заметить, что вследствие деформации под нагрузкой за счет взаимного поворота сечений  $ab$  и  $cd$  рассматриваемое волокно удлинится на величину  $y\Delta(d\varphi)$ . Тогда относительное удлинение выбранного произвольного волокна, очевидно,

$$\epsilon = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_n - y)d\varphi}. \quad (15.2)$$

Физическую сторону, как и для балки, если пренебречь давлением продольных волокон друг на друга, можно выразить формулой Гука:

$$\sigma = E\epsilon.$$

Подставляя в эту формулу выражение  $\epsilon$  согласно формуле (15.2), будем иметь:

$$\sigma = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_n - y}. \quad (15.3)$$

Эту формулу, очевидно, нельзя непосредственно использовать для определения нормальных напряжений при чистом изгибе кривого бруса, поскольку в ней пока неизвестны радиус  $r_n$  нейтрального слоя и изменение угла  $\Delta(d\varphi)$ . Для определения  $r_n$  и  $\Delta(d\varphi)$  воспользуемся двумя условиями (15.1). Из первого условия имеем:

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Так как в этом выражении  $\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0$ , то

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0. \quad (15.4)$$

Второе условие соответственно запишется в виде

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = M. \quad (15.5)$$

Интеграл в последнем уравнении можно записать так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = \int_F \frac{y^2 + r_n y - r_n y}{r_n - y} dF = - \int_F \left( y - \frac{r_n y}{r_n - y} \right) dF =$$

$$= - \int_F y dF + r_n \int_F \frac{y dF}{r_n - y}. \quad (15.6)$$

Результат:

Первый интеграл в правой части уравнения (15.6) представляет собой статический момент  $S_z$  площади поперечного сечения относительно нейтральной оси  $z$ , т. е.  $F(-e)$  (рис. 440, б), а второй интеграл согласно выражению (15.4) равен нулю. Учитывая это, выражение (15.6) можно записать так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = -S_z = -(-e)F, \quad (15.7)$$

где  $e$  — расстояние от центра тяжести сечения кривого бруса до нейтральной оси;

$F$  — площадь сечения бруса.

Очевидно, интеграл в левой части выражения (15.7) всегда величина положительная, а это означает, что статический момент  $S_z$  — величина отрицательная. Так как статический момент равен произведению положительной величины  $F$  на координату  $e$  центра тяжести площади  $F$  относительно нейтральной оси  $z$ , то из этого следует, что  $e$  — всегда координата отрицательная. Поэтому можно утверждать, что при изгибе кривого бруса нейтральная ось всегда смещена от центра тяжести сечения к центру кривизны бруса.

В дальнейшем в формулах, содержащих  $e$  и  $S_z$ , имеем в виду их абсолютные величины.

Подставляя выражение (15.7) в условие (15.5), получим:

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} eF = M,$$

откуда

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eF}. \quad (15.8)$$

Учитывая выражение (15.8), формулу (15.3) для определения напряжений теперь можно представить в виде

$$\sigma = \frac{My}{eF(r_n - y)}, \quad (15.9)$$

или

$$\sigma = \frac{My}{S_z(r_n - y)},$$

где  $M$  — изгибающий момент в сечении;

$S_z$  — статический момент площади сечения кривого бруса относительно нейтральной линии.

Из анализа формулы (15.9) видно, что, как и в балке с прямой осью, нормальное напряжение по ширине сечения одинаковое (не зависит от  $z$ ) и изменяется только с изменением расстояния точки от нейтральной линии. По высоте сечения напряжения в кривом брусе изменяются по гиперболическому закону (рис. 442, б). Наибольшие по абсолютной величине напряжения будут в крайних точках сечения, находящиеся у вогнутой поверхности бруса.

Абсолютные величины напряжений в крайних точках сечения кривого бруса согласно выражению (15.9) определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \quad (15.10)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — соответственно радиусы кривизны внутреннего и внешнего волокон кривого бруса;

$h_1$  и  $h_2$  — расстояния от нейтральной линии до этих волокон (рис. 440).

Знаки напряжений легко установить по направлению изгибающего момента в сечении.

**Определение положения нейтральной оси в кривом брусе при чистом изгибе.** Для определения по формулам (15.9) и (15.10) напряжений в кривом брусе при изгибе нужно прежде всего определить величину  $e$  (расстояние от ней-

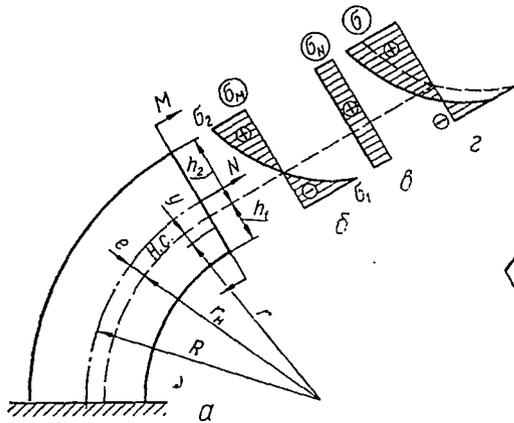


Рис. 442.

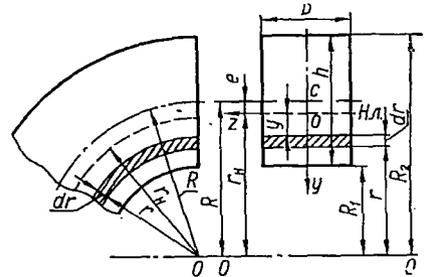


Рис. 443.

трального слоя до центра тяжести) или радиус  $r_n$  нейтрального слоя, поскольку

$$e = R - r_n, \quad (15.11)$$

где  $R$  — радиус слоя, содержащего центры тяжести сечений кривого бруса.

Покажем, как определяется положение нейтрального слоя, на примере бруса прямоугольного поперечного сечения высотой  $h$  и шириной  $b$  (рис. 443). Для этого будем исходить из уравнения (15.4):

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Введем в этом уравнении следующую замену переменных (рис. 443):

$$r = r_{II} - y, \text{ или } y = r_{II} - r.$$

Тогда уравнение (15.4) может быть переписано так:

$$\int_F \frac{r_{II} - r}{r} dF = 0, \text{ или } r_{II} \int_F \frac{dF}{r} - F = 0,$$

откуда

$$\boxed{r_{II} = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}} \quad (15.12)$$

Учитывая, что

$$F = bh, \quad dF = b \, dr,$$

будем иметь:

$$r_{II} = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b \, dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (15.13)$$

Здесь 2,303 — модуль перехода к десятичным логарифмам.  
Воспользовавшись рядом

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} = \frac{h}{R} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right],$$

будем иметь:

$$e = R - r_{II} = R - \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2R} \right)^4 + \dots}.$$

В первом приближении

$$e = R \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2} \right) \approx \frac{h^2}{12R}.$$

Второе приближение дает

$$e = \frac{h^3}{12R} \left[ 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 \right].$$

Пользуясь формулой (15.12), аналогичным путем можно определить выражение для  $e$  в случае иных форм поперечного сечения кривого бруса.

*Пример 70.* Определим положение нейтрального слоя для двутаврового сечения, показанного на рис. 444.

Учитывая обозначения на рис. 444, величину  $e$  для двутаврового сечения можно определить по формуле

$$e = R - \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} = R - \frac{\sum F_n}{\sum \int \frac{dF}{r}} =$$

$$= R - \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_1 + h_1}{R_1} + b_3 \ln \frac{R_2 - h_3}{R_1 + h_1} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_2 - h_2}}. \quad (15.14)$$

Положив здесь  $b_2 = h_2 = 0$  или  $b_1 = h_1 = 0$ , получим эксцентриситет  $e$  для таврового сечения.

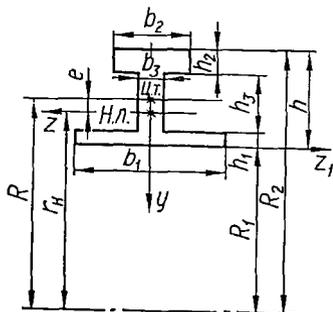


Рис. 444.

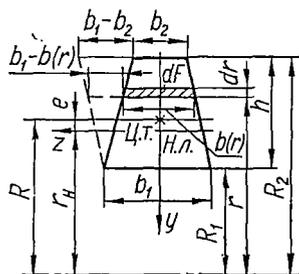


Рис. 445.

Положение центра тяжести сечения найдем по формуле

$$R - R_1 = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{b_1 h_1^2}{2} + b_3 h_3 \left( h_1 + \frac{h_3}{2} \right) + b_2 h_2 \left( h - \frac{h_2}{2} \right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}. \quad (15.15)$$

*Пример 71.* Определим эксцентриситет нейтральной линии для трапециевидного сечения (рис. 445).

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h; \quad dF = b(r) dr.$$

Ширину сечения  $b(r)$  на произвольном расстоянии  $r$  находим из подобия треугольников:

$$\frac{b_1 - b(r)}{b_1 - b_2} = \frac{r - R_1}{h},$$

откуда

$$b(r) = b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 - \frac{b_1 - b_2}{h} r.$$

Тогда

$$\int_F \frac{dF}{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b(r) dr}{r} = \left( b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} - \frac{b_1 - b_2}{h} \int_{R_1}^{R_2} dr;$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} = \ln \frac{R_2}{R_1}; \quad \int_{R_1}^{R_2} dr = R_2 - R_1 = h.$$

Пользуясь формулами (15.11) и (15.12), находим:

$$e = R - r_{II} = R - \frac{\frac{b_1 + b_2}{2} h}{\left(b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1\right) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)}. \quad (15.16)$$

Положение центра тяжести сечения определяется по формуле

$$R - R_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2},$$

которую нетрудно получить, разделив статический момент сечения относительно основания на площадь.

Из общей формулы (15.16), положив  $b_1 = 0$  или  $b_2 = 0$ , находим величину эксцентриситета соответственно расположенных треугольных сечений.

Для круглого полого сечения (рис. 446) аналогично можно получить, что

$$e = R - \frac{\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R^2 - D^2}}{4}. \quad (15.17)$$

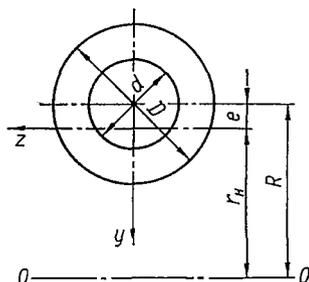


Рис. 446.

## § 100. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

Если при изгибе кривого бруса кроме изгибающего момента в поперечном сечении действует и нормальная сила, то расчет на прочность ведут, учитывая напряжения от обоих этих силовых факторов. Касательные напряжения за крайне редкими исключениями (тонкостенные сечения) не оказывают заметного влияния на прочность и их обычно не определяют, хотя в случае необходимости можно найти их приближенно по формуле Журавского.

Для стержней малой кривизны условие прочности имеет тот же вид, что и для балок:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (15.18)$$

Для стержней большой кривизны на основании формулы (15.9) условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{S_z r} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (15.19)$$

При этом нужно рассматривать сечения, в которых суммарные напряжения от изгибающего момента и от нормальной силы имеют наибольшие значения. В этих сечениях опасной будет одна из крайних точек. Для этих точек в формулу (15.19) нужно подставлять  $y = h_1$  или  $y = h_2$  и соответственно  $r = R_1$  или  $r = R_2$ .

В проектировочном расчете бруса большой кривизны для определения размеров поперечного сечения можно воспользоваться условием прочности при изгибе балки с соответствующей формой поперечного сечения, а затем, несколько увеличив полученные размеры, проверить прочность бруса по условию (15.18).

Если брус большой кривизны изготовлен из материала, имеющего различные допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие (некоторые чугуны, пластмассы и т. п.), то условие прочности должно выполняться для крайних точек сечения как в растянутой, так и в сжатой областях.

**Пример 72.** Пластмассовое кольцо прямоугольного сечения ( $b \times h$ ) подвергается действию равномерного внешнего давления  $p$  кг/см<sup>2</sup> (рис. 447). Требуется определить допустимую величину давления для двух вариантов материала:

а) винипласт с пределом прочности на растяжение  $\sigma_{вр} = 540$  кг/см<sup>2</sup> и пределом прочности на сжатие  $\sigma_{всж} = 900$  кг/см<sup>2</sup>;

б) волокнит с пределом прочности на растяжение  $\sigma_{вр} = 300$  кг/см<sup>2</sup>; на сжатие  $\sigma_{всж} = 1200$  кг/см<sup>2</sup>.

Дано:  $b = 8$  мм;  $R_1 = 10$  мм;  $R_2 = 30$  мм;  $\delta = 2$  мм.

Вычислим допускаемые напряжения. Принимая коэффициент запаса прочности  $n = 3$  (для хрупкого материала), получим:

для винипласта

$$[\sigma_+] = \frac{540}{3} = 180 \text{ кг/см}^2;$$

$$[\sigma_-] = \frac{900}{3} = 300 \text{ кг/см}^2;$$

для волокниста

$$[\sigma_+] = \frac{300}{3} = 100 \text{ кг/см}^2; \quad [\sigma_-] = \frac{1200}{3} = 400 \text{ кг/см}^2.$$

Перейдем к определению усилий и моментов. Рассмотрим произвольное сечение, проведенное под углом  $\varphi$  к горизонтали. Точка  $O$  — центр тяжести этого сечения — лежит на осевой дуге кольца, радиус которой

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \text{ см.}$$

Равнодействующая нагрузки, расположенной по правую сторону от сечения,

$$P = pb \cdot 2R_2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Вычисляя момент силы относительно точки  $O$  и проектируя силу на касательную к дуге в этой точке, получаем:

$$M(\varphi) = PR \sin \frac{\varphi}{2} = pbR_2R(1 - \cos \varphi); \quad N(\varphi) = -P \sin \frac{\varphi}{2} = -pbR_2(1 - \cos \varphi).$$

Изгибающий момент и осевая сила достигают наибольшей величины в сечении  $AB$ , где  $\varphi = \pi$ , причем

$$M_{\text{макс}} = 2pbR_2R = 2\rho \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 2 = 9,6\rho \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$N_{\text{макс}} = -\rho \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 2 = -4,8\rho \text{ кг}.$$

Высота сечения  $h = R_2 - R_1 = 3 - 1 = 2$  см и  $\frac{h}{R} = 1 > \frac{1}{5}$ , поэтому необходимо пользоваться условием прочности для кривого бруса. Поскольку осевая сила в опасном сечении  $AB$  сжимающая, а материал кольца хрупкий, применяем условия прочности (15.19) к двум вероятным опасным точкам —  $A$  и  $B$ .

Радиус  $r_n$  нейтрального слоя при чистом изгибе находим по формуле (15.13):

$$r_n = \frac{h}{2,303 \lg \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}} = \frac{2}{2,303 \lg \frac{1,5}{0,5}} = \frac{2}{2,303 \cdot 0,477} = 1,82 \text{ см.}$$

Эксцентриситет нейтральной линии при чистом изгибе

$$e = R - r_n = 2 - 1,82 = 0,18 \text{ см.}$$

Площадь сечения

$$F = bh = 0,8 \cdot 2 = 1,6 \text{ см}^2.$$

Статический момент сечения относительно нейтральной линии

$$S = Fe = 1,6 \cdot 0,18 = 0,288 \text{ см}^3.$$

Расстояния от нейтральной линии и от центра кривизны для точки  $A$

$$y_A = r_n - R_1 = 1,82 - 1 = 0,82 \text{ см}; \quad r_A = R_1 = 1 \text{ см};$$

для точки  $B$

$$y_B = R_2 - r_n = 3 - 1,82 = 1,18 \text{ см}; \quad r_B = R_2 = 3 \text{ см.}$$

Тогда

$$\sigma_A = \frac{M_{\max} y_A}{SR_1} + \frac{N_{\max}}{F} = \frac{9,6p \cdot 0,82}{0,288 \cdot 1} + \frac{4,8p}{1,6} = 27,4p + 3p = 30,4p \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max} y_B}{SR_2} - \frac{N_{\max}}{F} = \frac{9,6p \cdot 1,18}{0,288 \cdot 3} - \frac{4,8p}{1,6} = 13,1p - 3p = 10,1p \text{ кг/см}^2.$$

Кроме того, при  $r = r_n$

$$y = 0 \text{ и } \sigma = \frac{N_{\max}}{F} = -3p.$$

По этим данным для наглядности на рис. 447 построена эпюра  $\sigma$ .

Теперь запишем условия прочности и определим допустимую величину  $p$ : в случае винипласта для точки  $A$

$$30,4p \leq 300 \text{ и } p \leq 9,9 \text{ кг/см}^2;$$

для точки  $B$

$$10,1p \leq 180 \text{ и } p \leq 17,8 \text{ кг/см}^2;$$

в случае волокнита для точки  $A$

$$30,4p \leq 400 \text{ и } p \leq 13,2 \text{ кг/см}^2;$$

для точки  $B$

$$10,1p \leq 100 \text{ и } p \leq 9,9 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, если кольцо изготовлено из винипласта, то  $p_{\text{доп}} = 9,9 \text{ кг/см}^2$  и опасной является точка  $A$ , если же оно волокнитовое, то  $p_{\text{доп}} = 9,9 \text{ кг/см}^2$  и опасной является точка  $B$ . Следовательно, несмотря на заметное различие в механических характеристиках винипласта и волокнита, величина  $p_{\text{доп}}$  получается в обоих случаях одинаковой и равной примерно  $10 \text{ кг/см}^2$ .

## § 101. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ

Рассматривать перемещения в кривых стержнях необходимо для проверки их жесткости, а также при решении статически неопределимых задач. Как в случае стержней малой, так и большой кривизны, для определения перемещений удобно воспользоваться методом Мора. В стержнях малой кривизны можно пренебречь продольными деформациями и деформациями сдвига. Тогда в случае плоского изгиба формула Мора будет иметь тот же вид, что и для балок:

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (15.20)$$

В случае плоского изгиба бруса большой кривизны деформация элемента от действия усилий  $M_P$  и  $N_P$  (рис. 448, а, б) также состоит из удлинения  $\Delta(ds)$  отрезка  $ds$  оси и относительного поворота  $d\Theta$  сечений, ограничивающих элемент. Взаимный угол поворота сечений, вызванный изгибающими моментами,

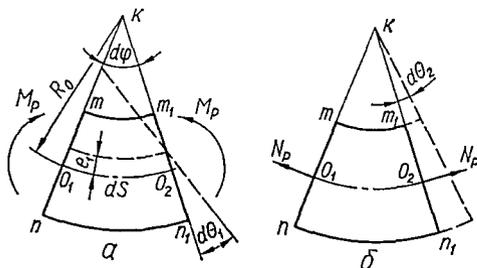


Рис. 448.

$$d\Theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

Угол поворота сечений, вызванный осевыми силами  $N_P$ , возникающий вследствие неодинаковой длины волокон элемента (рис. 448, б),

$$d\Theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

Полный угол поворота сечения

$$d\Theta = d\Theta_1 + d\Theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \quad (15.21)$$

Удлинение осевого элемента, вызванное поворотом сечений на угол  $d\Theta_1$ ,

$$\Delta(ds)_1 = e_1 d\Theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e_1 = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

Удлинение осевого элемента в результате действия осевых сил

$$\Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF}.$$

Полное удлинение осевого волокна

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{M_P ds}{EFR_0} + \frac{N_P ds}{EF}. \quad (15.22)$$

Подставляя формулы (15.21) и (15.22) в выражение (13.44), находим общую формулу для определения перемещений бруса большой кривизны:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \left[ \frac{\bar{M}_i M_P}{ESR_0} ds + \frac{\bar{N}_i M_P + \bar{M}_i N_P}{EFR_0} ds + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} ds + \frac{k\bar{Q}_i Q_P}{GF} ds \right]. \quad (15.23)$$

Обычно влиянием поперечной силы пренебрегают. Тогда последнее слагаемое в формуле (15.23) исключается.

Определим угол поворота свободного конца бруса малой кривизны, выполненного в виде четверти кольца постоянного сечения (рис. 449, а). Вспомогательное состояние показано на рис. 449, б.

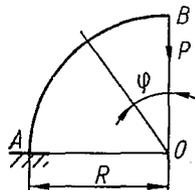
В произвольном сечении, определяемом полярным углом  $\varphi$ , изгибающие моменты для действительного и вспомогательного состояний следующие:

$$M_P = -PR \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2});$$

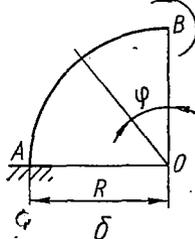
$$\bar{M}_1 = 1.$$

Согласно формуле (13.46) искомое перемещение

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR \sin \varphi R d\varphi = -\frac{PR^2}{EJ}. \quad (15.24)$$



а  $\bar{X}_1 = 1$



б  $\delta$

Знак минус указывает на то, что направление поворота сечения противоположно направлению единичного момента  $\bar{X}_1$ .

## Глава XVI

### РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ И ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

#### § 102. ТОЛСТОСТЕННЫЙ ЦИЛИНДР, ПОДВЕРЖЕННЫЙ ВНУТРЕННЕМУ И НАРУЖНОМУ ДАВЛЕНИЯМ

Цилиндр следует считать толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра.

При расчете тонкостенных цилиндров предполагается, что в окружном направлении напряжения постоянны по толщине стенки, а в

радиальном вообще отсутствуют. Эти допущения неприемлемы для толстостенных цилиндров.

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным  $r_2$ , находящийся под действием внутреннего давления  $p_1$  и наружного  $p_2$  (рис. 450). Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации будут также симметричными относительно его оси.

Двумя сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра и находящимися друг от друга на расстоянии, равном единице, вырежем кольцо (рис. 450). В этом кольце выделим элемент  $abcd$  двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол  $d\theta$  (рис. 451, а), и двумя соосными цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r + dr$  (рис. 451, б). Нормальные напряжения на цилиндрической поверхности элемента, имеющей радиус  $r$  (радиальные напряжения), обозначим через  $\sigma_r$ ; на радиусе  $r + dr$  напряжения получат приращения и будут равны  $\sigma_r + d\sigma_r$ . Нормальные напряжения на плоских гранях (тангенциальные, или окружные, напряжения) обозначим через  $\sigma_\theta$ .

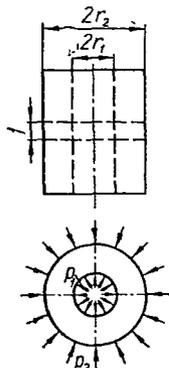


Рис. 450.

Указанные на рис. 451, б направления напряжений считаются положительными и соответствуют растяжению элемента по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок перекашиваться элемент не будет и касательных напряжений по его граням нет. Поэтому нормальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  будут главными напряжениями.

Статическая сторона задачи. Умножая напряжения на площади граней, получим действующие на элемент усилия (рис. 451, в):

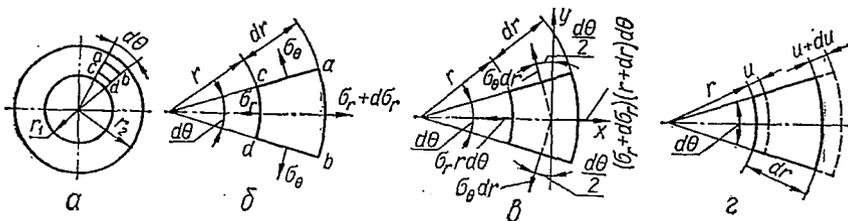


Рис. 451.

$\sigma_r r d\theta$  — на внутренней цилиндрической грани;  $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta$  — на наружной цилиндрической грани;  $\sigma_\theta dr$  — на боковых гранях.

Так как все силы лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, то для равновесия элемента суммы их проекций на две взаимно перпендикулярные оси должны равняться нулю. Ось  $x$  направим по биссектрисе угла  $d\theta$ , ось  $y$  — перпендикулярно к ней. Условиями равновесия будут

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Благодаря симметрии элемента второе условие удовлетворяется тождественно, а первое после подстановки выражений для усилий имеет следующий вид:

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta - 2 \left( \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} \right) = 0.$$

После раскрытия скобок получим:

$$-\sigma_r r d\theta + \sigma_r r d\theta + d\sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + d\sigma_r dr d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

В последнем уравнении взаимно уничтожаются члены  $\pm \sigma_r r d\theta$ . Вследствие малости угла  $\frac{d\theta}{2}$  принимаем, что  $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ ; отбрасываем член высшего порядка малости  $d\sigma_r dr d\theta$  и делим оставшиеся члены на  $dr d\theta$ . После этого получим:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (16.1)$$

Уравнение (16.1) содержит два неизвестных напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ . Для их определения, придерживаясь общего плана решения статически неопределимых задач, рассмотрим еще геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи. Деформация элемента симметрична относительно оси и поэтому вызовет радиальные перемещения всех точек цилиндра (рис. 451, з). Обозначим радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиуса  $r$  через  $u$ , тогда перемещение цилиндрической поверхности радиуса  $r + dr$  будет  $u + du$ . Абсолютное радиальное удлинение элемента  $dr$  будет равно  $du$ , а относительное удлинение

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (16.2)$$

Относительное удлинение в тангенциальном (окружном) направлении на радиусе  $r$  найдем следующим образом. Длина элемента по окружности цилиндрической поверхности радиуса  $r$  после его приращения на величину  $u$  равна  $(r + u) d\theta$ . Вычтя из последней начальную длину  $rd\theta$ , получим абсолютное приращение длины элемента на радиусе  $r$  в окружном направлении:

$$(r + u) d\theta - rd\theta = u d\theta.$$

Разделив абсолютное удлинение на первоначальную длину  $rd\theta$ , получим окружное относительное удлинение:

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (16.3)$$

Физическая сторона задачи. В случае двухстороннего растяжения, которому подвергается рассматриваемый элемент, согласно закону Гука напряжения и деформации связаны между собой следующими зависимостями:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r).$$

Учитывая формулы (16.2) и (16.3), получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right).\end{aligned}\quad (16.4)$$

Подставляя выражения (16.4) в уравнение (16.1), для определения перемещения  $u$  получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (уравнение Эйлера):

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.} \quad (16.5)$$

Записав это уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0$$

и интегрируя его по  $r$  последовательно два раза, найдем общее решение уравнения:

$$u = Ar + B \frac{1}{r}. \quad (16.6)$$

Подставляя решение (16.6) в формулы (16.4), получим выражения для напряжений в точках на расстоянии  $r$  от оси цилиндра:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2}B \right]; \quad (16.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2}B \right]. \quad (16.8)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находим из условий для  $\sigma_r$  на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. На внутренней поверхности ( $r = r_1$ ) эти напряжения равны внутреннему давлению, т. е.  $\sigma_r = -p_1$ , а на наружной поверхности ( $r = r_2$ ) — наружному давлению  $\sigma_r = -p_2$ .

Для определения постоянных  $A$  и  $B$  согласно уравнению (16.7) получим следующих два уравнения:

$$\begin{aligned}-p_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_1^2}B \right]; \\ -p_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_2^2}B \right].\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $A$  и  $B$ , найдем:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2}; \\ B &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.\end{aligned}$$

Подставляя значения постоянных в выражения (16.6), (16.7) и (16.8), получим формулы для определения радиального перемещения и напряжений (формулы Ламе):

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}; \quad (16.9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \quad (16.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (16.11)$$

Сложив левые и правые части выражений для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , убедимся в том, что сумма радиального и окружного напряжений — величина постоянная:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const.}$$

Относительная деформация рассматриваемого кольца в направлении, параллельном оси цилиндра, также будет постоянна на любом радиусе, т. е.

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const.}$$

На основании этого цилиндр можно рассматривать как составленный из отдельных колец, нанизанных на ось. Поперечные сечения цилиндра при деформации остаются плоскими.

В случае, когда цилиндр кроме радиальных давлений воспринимает еще и продольную силу  $N$  (например при наличии днищ), в его поперечных сечениях возникает напряжение

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}, \quad (16.12)$$

а к выражению (16.9) для радиальных перемещений добавляется слабое

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r. \quad (16.13)$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  при этом не изменяются.

Отметим, что все приведенные выше формулы для деформаций и напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  справедливы для сечений, достаточно удаленных от днищ. Вблизи закрытых торцов цилиндра деформации и напряжения будут несколько искажены вследствие влияния днищ.

Рассмотрим два частных случая нагружения цилиндра.

1. Цилиндр нагружен только внутренним давлением, а наружное давление отсутствует или мало и им можно пренебречь, т. е.  $p_1 = p$ ;  $p_2 = 0$ . Формулы (16.9) — (16.11) для напряжений и радиального перемещения принимают следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (16.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (16.15)$$

$$u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (16.16)$$

Напряжение  $\sigma_r$  всюду сжимающее, а  $\sigma_\theta$  — растягивающее. Наибольшие значения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  будут у внутренней поверхности цилиндра (при  $r = r_1$ ):

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= \frac{1+k^2}{1-k^2} p, \end{aligned} \quad (16.17)$$

где

$$k = \frac{r_1}{r_2}.$$

Радиальное перемещение у внутренней поверхности (увеличение внутреннего радиуса)

$$u_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu \right) p. \quad (16.18)$$

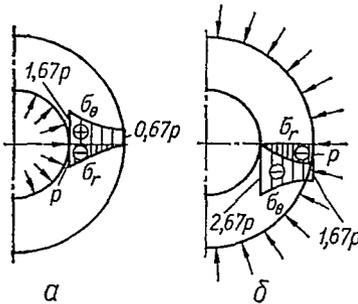


Рис. 452.

Напряжения и перемещение у наружной поверхности цилиндра следующие:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= \frac{2k^2}{1-k^2} p; \end{aligned} \quad (16.19)$$

$$u_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2} p. \quad (16.20)$$

Эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  для рассматриваемого случая при отношении  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  приведены на рис. 452, а.

Напряжения изменяются по гиперболическому закону. Наиболее опасной с точки зрения прочности является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра.

Определим допускаемое внутреннее давление в цилиндре при безграничном увеличении толщины стенки. Полагая  $r_2 \rightarrow \infty$  и принимая в формулах (16.17)  $k = 0$ , получим:  $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p$ ;  $(\sigma_\theta)_{r=r_1} = p$ .

Используем, например, третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

В рассматриваемом случае

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p \text{ и } \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

и это условие прочности принимает вид

$$2p \leq [\sigma],$$

откуда

$$p \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Цилиндр с весьма толстой стенкой не допускает внутреннего давления, большего определенной величины. Таким образом, увеличение толщины стенки цилиндра не всегда является эффективным способом увеличения прочности.

2. Цилиндр нагружен только внешним давлением:  $p_2 = p$ ;  $p_1 = 0$ . В этом случае формулы (16.10) и (16.11) для напряжений и формула (16.9) для перемещений принимают следующий вид:

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) p; \quad (16.21)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) p; \quad (16.22)$$

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (16.23)$$

Оба напряжения сжимающие, причем по абсолютной величине  $\sigma_\theta > \sigma_r$ , а радиальное перемещение направлено к оси цилиндра (радиусы уменьшаются).

У внутренней поверхности цилиндра ( $r = r_1$ )

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2} p; \quad (16.24)$$

$$u_{r=r_1} = -\frac{r_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2} p. \quad (16.25)$$

У наружной поверхности цилиндра ( $r = r_2$ )

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = -\frac{1+k^2}{1-k^2} p; \quad (16.26)$$

$$u_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E} \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu \right) p. \quad (16.27)$$

Эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  при  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  приведены на рис. 452, б. Наибольшего по абсолютной величине значения напряжение  $\sigma_\theta$  достигает у внутренней поверхности цилиндра. Как и в случае внутреннего давления, наиболее опасной является точка у внутренней поверхности цилиндра.

Уменьшение наружного радиуса сплошного цилиндра (без внутреннего отверстия) получим, положив в формуле (16.23)  $r_1 = 0$  и  $r = r_2$ . Тогда

$$u_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E}(1 - \mu). \quad (16.28)$$

### § 103. РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Прочность цилиндра, работающего при внутреннем давлении, с увеличением толщины стенки возрастает только до определенного предела. Выше было показано, что даже при бесконечно большом наружном радиусе внутреннее давление в цилиндре не может превышать определенной величины. Исходя из расчета на прочность по допускаемым напряжениям и воспользовавшись третьей теорией прочности, мы пришли к выводу, что ни при каком увеличении толщины стенки цилиндра его нельзя изготовить на давление, большее, чем  $p = \frac{[\sigma]}{2}$ . Объясняется это тем, что с увеличением радиуса напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  быстро убывают и материал наружных слоев цилиндра работает малоэффективно. Распределение напряжений можно улучшить, разгрузив внутренние слои за счет более интенсивного использования наружных. Для этого нужно сделать цилиндр составным, одев один цилиндр на другой с натягом (обычно с помощью горячей посадки). В таких цилиндрах величина допускаемого внутреннего давления может быть значительно больше, чем в цельном цилиндре. Подобным образом изготовляют орудийные стволы.

При посадке одного цилиндра на другой с натягом окружающие напряжения  $\sigma_\theta$  во внутреннем цилиндре становятся сжимающими, а в

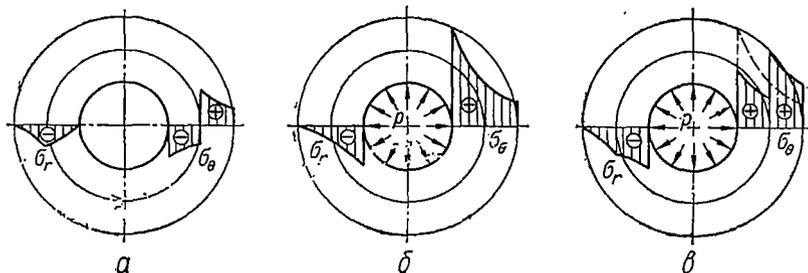


Рис. 453.

наружном — растягивающими (рис. 453, а). Если такой составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные растягивающие окружные и сжимающие радиальные напряжения (рис. 453, б). Эти напряжения определяются по формулам (16.14) и (16.15), как для цельного цилиндра. Окружные напряжения от внутреннего давления будут складываться с напряжениями от посадки, в наружном цилиндре и вычитаться из них во внутреннем цилиндре. Радиальные напряжения от внутреннего давления и от давления посадки складываются в обоих цилиндрах. Суммарные эпюры напряже-

ний после приложения давления будут иметь вид, представленный на рис. 453, в. Характерным для них является скачок на эпюре  $\sigma_r$  и перелом в эпюре  $\sigma_r$  на радиусе контакта цилиндров.

Рассмотрим расчет составных цилиндров. Прежде всего найдем зависимость давления  $p_c$  по контактной поверхности от величины имевшейся до посадки разности  $\delta$  между наружным диаметром внутреннего цилиндра I и внутренним диаметром наружного цилиндра II (рис. 454). Эта разность представляет собой величину натяга.

Поскольку после посадки одного цилиндра на другой наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного становятся одинаковыми, то очевидно, что сумма абсолютных величин радиальных перемещений обоих цилиндров на радиусе поверхности контакта, вызванных контактным давлением, должна быть равна половине натяга, т. е.

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \quad (16.29)$$

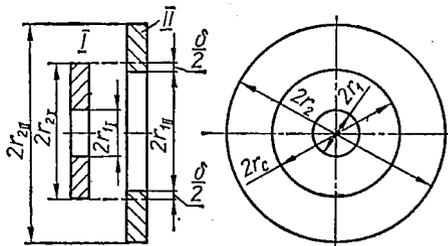


Рис. 454.

Так как величина натяга  $\delta$  весьма мала по сравнению с размерами радиуса поверхности контакта, то при вычислении перемещений будем считать, что  $r_{2I} = r_{1II} = r_c$  (рис. 454).

Обозначим через  $k_1 = \frac{r_1}{r_c}$  отношение внутреннего радиуса цилиндра к радиусу поверхности контакта, а через  $k_2 = \frac{r_c}{r_2}$  — отношение радиуса поверхности контакта к наружному радиусу цилиндра.

Хотя в большинстве случаев части составных цилиндров изготовляют из одного материала, будем для общности при решении задачи вначале полагать эти материалы различными.

Контактное давление  $p_c$  будет наружным для внутреннего цилиндра и внутренним для наружного цилиндра. Абсолютную величину радиального перемещения внутреннего цилиндра на контактной поверхности найдем по формуле (16.27):

$$|u_I| = \frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c, \quad (16.30)$$

а наружного — по формуле (16.18):

$$|u_{II}| = \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c. \quad (16.31)$$

Подставляя значения этих перемещений в уравнение (16.29), будем иметь:

$$\frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c = \frac{\delta}{2}.$$

Решая уравнение относительно  $p_c$ , получаем:

$$p_c = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \nu_1 \right) + \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \nu_2 \right)}. \quad (16.32)$$

В случае одинаковых материалов сопрягаемых цилиндров последняя формула упрощается и принимает вид

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c} \cdot \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1-k_2^2) + (1+k_2^2)(1-k_1^2)}. \quad (16.33)$$

Напряжения, вызванные давлением  $p_c$ , определяются по формулам (16.21), (16.22) для внутреннего цилиндра и по формулам (16.14), (16.15) для наружного.

Отметим следующее обстоятельство. Величину натяга определяют, измеряя диаметры сопрягаемых деталей микрометрическими инструментами или другими точными приборами. Поверхности ж деталей никогда не бывают абсолютно гладкими: на них всегда есть следы обработки — так называемые гребешки, которые сминаются при запрессовке. Вследствие этого действительная величина натяга несколько меньше измеренной, а действительное контактное давление меньше определяемого по формуле (16.32) или (16.33).

Кроме этого следует иметь в виду, что формулы (16.32) и (16.33) справедливы лишь в том случае, когда ни в одной из сопрягаемых деталей напряжения не превосходят предела пропорциональности. При появлении же пластических деформаций контактное давление будет меньше, чем определяемое по этим формулам. Найти его можно методами теории пластичности.

#### § 104. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ

Если толстостенный цилиндр нагревается неравномерно, то в нем появляются температурные напряжения, которые суммируются с напряжениями, вызванными давлением.

Часто температурное поле симметрично относительно оси цилиндра и постоянно по его длине. При этом условии также можно считать, что поперечные сечения, лежащие на достаточном расстоянии от концов цилиндра, остаются плоскими и деформация  $\epsilon_z$  постоянна.

Для решения температурной задачи можно воспользоваться тем же методом, который был применен при расчете цилиндра на действие внутреннего и внешнего давлений. При этом уравнение равновесия (16.1) не изменится. Геометрические соотношения (16.2) и (16.3) также сохранятся. Несколько иными будут физические зависимости.

Обозначим через  $T$  повышение температуры, зависящее от радиуса  $r$ , а через  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Воспользуемся обобщенным законом Гука, добавив к деформациям, обусловленным напряжениями, температурные расширения. Тогда для  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  получим следующие формулы<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T = \text{const}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\theta) + \alpha T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \alpha T.\end{aligned}\quad (16.34)$$

Решая эти уравнения относительно напряжений, найдем:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T]; \\ \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T].\end{aligned}\quad (16.35)$$

Выражая в этих формулах деформации через перемещения:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{и} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

и затем подставляя полученные значения для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в уравнение равновесия (16.1)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0,$$

получим следующее дифференциальное уравнение для перемещения  $u$ :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr}} \quad (16.36)$$

Из этого уравнения может быть определено перемещение, если известен закон изменения температуры  $T(r)$  по толщине стенки цилиндра.

Последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение два раза по  $r$ , найдем общее решение:

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_{r_1}^r \alpha T r \, dr + Ar + \frac{B}{r}. \quad (16.37)$$

<sup>1</sup>298

<sup>1</sup> Модуль упругости  $E$  зависит от температуры. Здесь это не учитывается, что вполне допустимо, если разность температур внутренней и наружной поверхностей цилиндра невелика. В таком случае модуль  $E$  следует брать равным его значению при средней температуре стенки цилиндра.

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из условий для  $\sigma_r$  на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Так как эти поверхности свободны от нагрузки, то

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \text{ и } (\sigma_r)_{r=r_2} = 0.$$

Подставив в выражение (16.35) для  $\sigma_r$  деформации  $\epsilon_r = \frac{du}{dr}$  и  $\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$ , а затем полученное решение (16.37) для  $u$ , будем иметь:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[ -\frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{A}{1-2\mu} - \frac{B}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_z \right]. \quad (16.38)$$

Приравнявая это выражение нулю при  $r=r_1$  и  $r=r_2$ , получим два уравнения для определения  $A$  и  $B$ , решая которые, найдем, что

$$A = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \mu \epsilon_z;$$

$$B = \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr.$$

После подстановки этих значений в формулы (16.35) получим:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[ -\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr \right]; \quad (16.39)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \alpha T \right]; \quad (16.40)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left[ \frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr + (1-\mu) \epsilon_z - \alpha T \right]. \quad (16.41)$$

В последнем выражении не известна величина  $\epsilon_z$ . Если цилиндр имеет возможность свободно расширяться, то  $\epsilon_z$  можно найти из условия, что продольная сила в поперечном сечении равняется нулю, т. е.

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\varphi = 0, \quad (16.42)$$

или

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0. \quad (16.43)$$

Подставляя сюда значение  $\sigma_z$  из выражения (16.41), найдем:

$$\epsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr. \quad (16.44)$$

Окончательное выражение для  $\sigma_z$  следующее:

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu} \left( \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \alpha T \right). \quad (16.45)$$

Вычислить интеграл  $\int \alpha T r dr$  и определить напряжения можно, если известен закон изменения температуры  $T(r)$  по толщине стенки цилиндра.

Наиболее простым и часто применяемым в технических расчетах законом изменения температуры является линейный закон. Пусть  $T^* = T_1 - T_2$  обозначает превышение температуры внутренней поверхности цилиндра над температурой наружной поверхности. Тогда линейный закон изменения температуры по радиусу цилиндра будет выражаться формулой

$$T(r) = T^* \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \quad (16.46)$$

Подставив это выражение в формулы (16.39), (16.40), (16.45) для напряжений и выполнив интегрирование, получим:

$$\sigma_r = \frac{E \alpha T^*}{3(1 - \mu)(r_2 - r_1)} \left[ r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (16.47)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E \alpha T^*}{3(1 - \mu)(r_2 - r_1)} \left[ 2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (16.48)$$

$$\sigma_z = \frac{E \alpha T^*}{3(1 - \mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16.49)$$

У внутренней поверхности цилиндра (при  $r = r_1$ )

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E \alpha T^*}{3(1 - \mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.50)$$

У наружной поверхности цилиндра (при  $r = r_2$ )

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E \alpha T^*}{3(1 - \mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.51)$$

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  при  $\mu = 0,3$  представлены на рис. 455, а.

Иногда принимают, что в толстостенных цилиндрах температура изменяется по логарифмическому закону, устанавливаемому теорией теплопередачи:

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}. \quad (16.52)$$

Подставив это выражение в формулы (16.39), (16.40), (16.45) и выполнив интегрирование, получим:

$$\sigma_r = - \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ \ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (16.53)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (16.54)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - 2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.55)$$

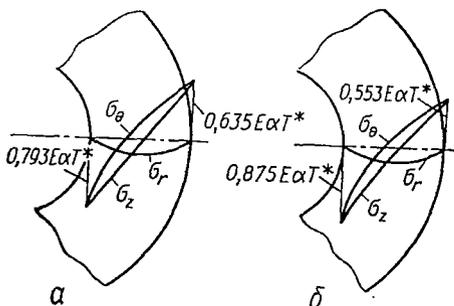


Рис. 455.

У внутренней поверхности цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} =$$

$$= \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.56)$$

У наружной поверхности

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.57)$$

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  при  $\mu = 0,3$  в случае изменения температуры по логарифмическому закону представлены на рис. 455, б.

Отметим, что вблизи торцов цилиндра напряжения, определяемые полученными формулами, могут иметь место лишь в том случае, если торцы будут нагружены поверхностной нагрузкой, изменяющейся в соответствии с формулой для  $\sigma_z$ .

## § 105. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

1. Толстостенный цилиндр подвергается внутреннему давлению  $p_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$  и наружному  $p_2 = 600 \text{ кг/см}^2$ . Исследуем, как будут изменяться напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  с изменением толщины стенки цилиндра, характеризуемым величиной отношения внутреннего радиуса к наружному  $k = \frac{r_1}{r_2}$ .

Напряжения определяются по формулам (16.10) и (16.11), которые в данном случае удобнее записать, введя отношение  $k = \frac{r_1}{r_2}$ :

$$\sigma_r = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}, \quad (16.58)$$

$$\sigma_\theta = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (16.59)$$

При изменении толщины стенки цилиндра напряжение  $\sigma_r$  остается сжимающим и плавно изменяется по гиперболическому закону от значения  $-p_1$  у внутренней поверхности до значения  $-p_2$  у наружной (рис. 456, а).

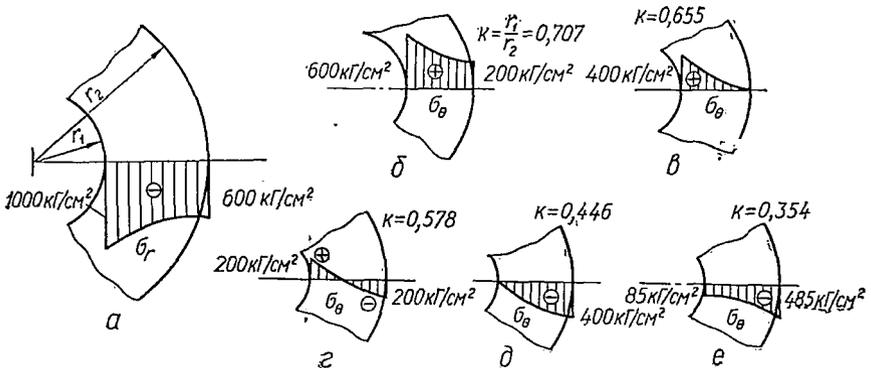


Рис. 456.

Для вычисления напряжений  $\sigma_\theta$  у внутренней поверхности цилиндра ( $r = r_1$ ) и у наружной ( $r = r_2$ ) формулу (16.59) можно записать соответственно так:

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1}{1 - k^2} [(1 + k^2) p_1 - 2p_2];$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{1}{1 - k^2} [2k^2 p_1 - (1 + k^2) p_2].$$

Подставляя сюда различные значения  $k$ , можем вычислить напряжения  $\sigma_\theta$  у внутренней и наружной поверхностей цилиндра при заданных значениях  $p_1$  и  $p_2$ .

На рис. 455, б—е показаны эпюры  $\sigma_\theta$  при значениях  $k = 0,707$ ;  $k = 0,655$ ;  $k = 0,578$ ;  $k = 0,446$ ;  $k = 0,354$ .

2. Стальная труба с внутренним диаметром  $2r_1 = 40$  мм подвергается внутреннему давлению  $p = 2500$  кг/см<sup>2</sup>. Определим толщину  $S$  стенки трубы по четвертой теории прочности, если допускаемое напряжение для стали  $[\sigma] = 5000$  кг/см<sup>2</sup>.

Опасными являются точки трубы у внутренней поверхности, где главные напряжения имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_\theta &= \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p; \\ \sigma_2 = \sigma_z &= 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p.\end{aligned}\quad (16.60)$$

Условие прочности по четвертой теории

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma]$$

после подстановки напряжений из формул (16.60) принимает вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta \sigma_r + \sigma_r^2} \leq [\sigma], \quad (16.61)$$

или

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} p\right)^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} p^2 + p^2} \leq [\sigma], \quad (16.62)$$

откуда

$$([\sigma]^2 - p^2) k^4 - 2[\sigma]^2 k^2 + ([\sigma]^2 - 3p^2) = 0.$$

Решая относительно  $k^2$ , получаем:

$$k^2 = \frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1}.$$

Так как  $k^2 < 1$ , то перед корнем следует взять знак минус. Тогда

$$\begin{aligned}r_2 = \frac{r_1}{k} &= \frac{r_1}{\frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1}} = \\ &= \frac{20}{\frac{\left(\frac{5000}{2500}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 5000}{2500}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{5000}{2500}\right)^2 - 1}} = 55 \text{ мм.}\end{aligned}$$

Толщина стенки трубы  $S = 55 - 20 = 35$  мм.

3. Найдем оптимальную величину давления  $p_0$  натяга составного цилиндра из условия равнопрочности внутреннего и наруж-

ного цилиндров и величину допускаемого внутреннего давления  $p_1$ .  
 Дано:  $r_1 = 40$  мм;  $r_2 = 110$  мм;  $r_c = 80$  мм;  $[\sigma] = 6000$  кг/см<sup>2</sup>. Расчет выполним по четвертой теории.

Напряжения во внутреннем цилиндре будут наибольшими при  $r = r_1$  и равными согласно формулам (16.14), (16.15) и (16.24)

$$\begin{aligned} (\sigma_{r_I})_{r=r_1} &= -p_1; \\ (\sigma_{\theta_I})_{r=r_1} &= \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p_1 - \frac{2r_c^2}{r_c^2 - r_1^2} p_c = 1,31 p_1 - 2,67 p_c. \end{aligned} \quad (16.63)$$

В наружном цилиндре напряжения будут наибольшими при  $r = r_c$  и равными согласно формулам (16.14), (16.15) и (16.17)

$$\begin{aligned} (\sigma_{r_{II}})_{r=r_c} &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r_c^2} \right) p_1 - p_c = -0,136 p_1 - p_c; \\ (\sigma_{\theta_{II}})_{r=r_c} &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r_c^2} \right) p_1 + \frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} p_c = 0,44 p_1 + 3,25 p_c. \end{aligned}$$

Условие равнопрочности по четвертой теории имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_{\theta_I})^2 - (\sigma_{\theta_I})(\sigma_{r_I}) + (\sigma_{r_I})^2} = \sqrt{(\sigma_{\theta_{II}})^2 - (\sigma_{\theta_{II}})(\sigma_{r_{II}}) + (\sigma_{r_{II}})^2}.$$

Подставив выражения напряжений через давления, освободившись от радикалов и приведя подобные члены, получим:

$$3,74 p_1^2 - 13,62 p_1 p_c - 7,68 p_c^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно  $p_1$ , найдем, что

$$p_1 = 4,12 p_c. \quad (16.64)$$

Таким образом, давление  $p_c$ , вызванное натягом, зависит от величины внутреннего давления  $p_1$ . Оптимальная величина давления  $p_c$  определяется условием прочности

$$\sqrt{(\sigma_{\theta_I})^2 - (\sigma_{\theta_I})(\sigma_{r_I}) + (\sigma_{r_I})^2} = [\sigma].$$

Используя формулы (16.63) для  $\sigma_{r_I}$  и  $\sigma_{\theta_I}$  и зависимость (16.64), получим:

$$(1,31 \cdot 4,12 - 2,67)^2 p_c^2 + (1,31 \cdot 4,12 - 2,67) p_c^2 + 4,12^2 p_c^2 = [\sigma]^2,$$

откуда находим, что  $p_c = 1145$  кг/см<sup>2</sup>.

Допускаемое внутреннее давление

$$p_1 = 4,12 p_c = 4,12 \cdot 1145 = 4720 \text{ кг/см}^2.$$

4. Стальная труба с внутренним диаметром  $2r_1 = 4$  см и наружным  $2r_2 = 8$  см нагревается так, что температура внутренней поверхности  $T_1 = 300^\circ\text{C}$ , а наружной  $T_2 = 200^\circ\text{C}$ . Определим температурные напряжения в трубе, считая, что по толщине стенки

температура изменяется по линейному закону. При расчете примем  $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ .

Превышение температуры внутренней поверхности над наружной  $T^* = T_1 - T_2 = 100^\circ \text{C}$ .

По формуле (16.50) находим окружное и осевое напряжения у внутренней поверхности трубы:

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[ 3r_1 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{3(1-0,3)(4-2)} \left[ 3 \cdot 2 - \frac{2(4^3-2^3)}{4^2-2^2} \right] = -1990 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

По формуле (16.51) находим напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  у наружной поверхности:

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[ 3r_2 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{3(1-0,3)(4-2)} \left[ 3 \cdot 4 - \frac{2(4^3-2^3)}{4^2-2^2} \right] = 1580 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

В других точках поперечного сечения трубы напряжения можно вычислить по формулам (16.47) — (16.49).

## § 106. РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Вращающиеся диски широко применяют в паровых и газовых турбинах, в компрессорах, вентиляторах и машинах химической промышленности.

Диски подвергаются нагрузкам, вызывающим их растяжение и изгиб, а также действию высоких температур. Существенное значение имеют центробежные силы. Обычно нагрузки и температурное поле симметричны относительно оси диска, вследствие чего и напряжения являются функциями только расстояния от оси вращения.

Ограничимся рассмотрением диска постоянной толщины, нагруженного силами, параллельными его срединной плоскости и равномерно распределенными по толщине его. Рассмотрим также нагрев диска при линейном законе изменения температуры вдоль радиуса.

Будем считать, что диск тонкий и вследствие этого напряжения по толщине его не изменяются, а в направлениях, параллельных оси, вообще отсутствуют ( $\sigma_z = 0$ ). В такой постановке задача об определении напряжений в диске относится к так называемой плоской задаче теории упругости, а именно — к задаче о плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим вращающийся диск постоянной толщины  $h$ , имеющий центральное отверстие (рис. 457, а). Дополнительно к обозначениям рисунка примем следующие:

$\frac{\gamma}{g}$  — удельная масса материала диска;

$\omega$  — угловая скорость вращения.

Как и в рассмотренном уже случае расчета толстостенного цилиндра, вырежем мысленно элемент диска двумя меридиональными плоскостями, угол между которыми в срединной плоскости равен  $d\theta$ , и двумя цилиндрическими поверхностями радиусов  $r$  и  $r + dr$  (рис. 458).

Кроме сил, приложенных по граням элемента (рис. 458, б), на элемент действуют силы инерции в виде центробежной силы, распределенной по всему объему и приводящейся к равнодействующей

$$dm \omega^2 r = \frac{\gamma}{g} h r d\theta dr \omega^2 r.$$

Эта сила также лежит в срединной плоскости диска и направлена вдоль радиуса от оси вращения.

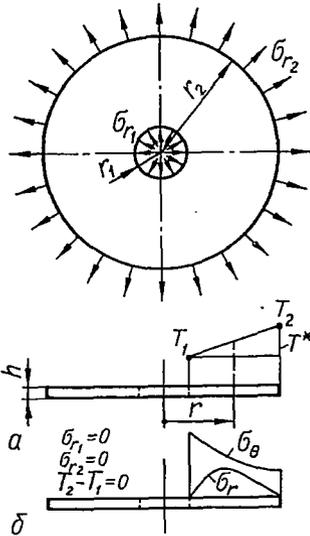


Рис. 457.

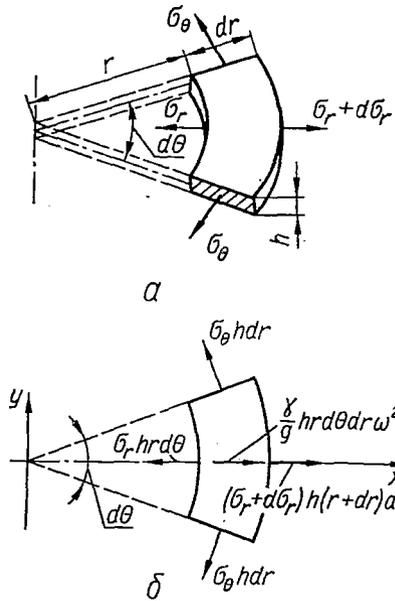


Рис. 458.

Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на ось  $x$ , совпадающую с биссектрисой угла  $d\theta$ , получаем уравнение равновесия в следующем виде:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (16.65)$$

Это уравнение отличается от уравнения равновесия (16.1), полученного при расчете толстостенного цилиндра, только слагаемым  $\frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2$ , обусловленным действием центробежных сил. Геометрические и физические уравнения не отличаются от уравнений (16.2)—(16.4), полученных для толстостенного цилиндра.

Дифференциальное уравнение для радиальных перемещений точек диска в этом случае примет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (16.66)$$

Это дифференциальное уравнение отличается от уравнения (16.5) лишь правой частью. Записав его в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = - \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad (16.67)$$

и проинтегрировав последовательно два раза, найдем, что

$$u = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \quad (16.68)$$

Внеся это решение в выражения (16.4) для напряжений, получим:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (16.69)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (16.70)$$

где

$$A = \frac{E}{1-\mu} A_1, \text{ а } B = - \frac{E}{1+\mu} B_1.$$

Постоянные  $A$  и  $B$  (а следовательно,  $A_1$  и  $B_1$ ) определяются из граничных условий. Чаще всего известны радиальные напряжения на наружном и внутреннем контурах диска. Тогда при  $r = r_1$   $\sigma_r = \sigma_{r_1}$ , а при  $r = r_2$   $\sigma_r = \sigma_{r_2}$ . В соответствии с выражением (16.69) эти условия дают два уравнения:

$$\sigma_{r_1} = A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2;$$

$$\sigma_{r_2} = A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2,$$

решая которые относительно  $A$  и  $B$ , найдем:

$$A = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (16.71)$$

$$B = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (16.72)$$

Если на наружном и внутреннем контурах диска напряжения отсутствуют, т. е.  $\sigma_{r_2} = 0$  и  $\sigma_{r_1} = 0$ , то

$$A = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (16.73)$$

$$B = - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (16.74)$$

Подставляя последние значения  $A$  и  $B$  в формулы (16.69) и (16.70), получаем:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left( r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (16.75)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[ (3+\mu) \left( r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu) r^2 \right]. \quad (16.76)$$

Полагая для краткости

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \quad \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2 = c; \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m, \quad (16.77)$$

формулы (16.75) и (16.76) можно написать так:

$$\sigma_r = c \left[ 1 + k^2 \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right]; \quad (16.78)$$

$$\sigma_\theta = c \left[ 1 + k^2 \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m\rho^2 \right]. \quad (16.79)$$

Напряжение  $\sigma_r$  положительно и, как нетрудно убедиться, достигает наибольшей величины при  $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ . Тогда

$$(\sigma_r)_{\max} = c(1 - k)^2. \quad (16.80)$$

Напряжение  $\sigma_\theta$  при всех значениях  $\rho$  также положительно и достигает наибольшей величины у внутреннего края диска (при  $\rho = k$ ):

$$(\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2]. \quad (16.81)$$

Сравнивая формулы (16.80) и (16.81), убеждаемся, что  $(\sigma_\theta)_{\max}$  всегда больше  $(\sigma_r)_{\max}$ . Поэтому при проверке прочности диска по энергетической теории формоизменения условие прочности должно быть записано в виде

$$\sigma_{\text{экв. IV}} = (\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2] \leq [\sigma]. \quad (16.82)$$

В случае хрупких материалов проверку следует производить по теории Мора, которая при  $\sigma_3 = \sigma_r = 0$  приводит к той же формуле (16.82).

Характер распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  вдоль радиуса диска с отверстием при  $k = 0,2$  и  $\mu = 0,3$  показан на рис. 457, б.

Формулы для напряжений в сплошном диске (без отверстия) можно получить из формул (16.69) и (16.70), если принять во внимание, что на оси диска (при  $r = 0$ ) напряжения должны иметь конечные значения. Для выполнения этого условия постоянную  $B$  следует положить равной нулю, и тогда формулы примут следующий вид:

$$\sigma_r = A - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (16.83)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2. \quad (16.84)$$

Постоянную  $A$  найдем из граничных условий на наружном контуре (при  $r = r_2$ ). Если диск подвергается действию только инерционных сил собственной массы, вызванных его вращением, а внешняя нагрузка на наружном контуре отсутствует, т. е.  $\sigma_{r_2} = 0$ , то согласно формуле (16.83)

$$A = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \quad (16.85)$$

Подставляя это значение  $A$  в формулы (16.83) и (16.84), будем иметь:

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2); \quad (16.86)$$

$$\sigma_\theta = c(1 - \mu\rho^2). \quad (16.87)$$

Оба напряжения положительны при всех значениях  $\rho$  и увеличиваются по мере приближения к оси диска. На оси диска, при  $\rho = 0$

$$(\sigma_r)_{\text{макс}} = (\sigma_\theta)_{\text{макс}} = c = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{8} \omega^2 r_2^2. \quad (16.88)$$

По найденным напряжениям легко определить перемещения и деформации в диске.

Наибольший интерес представляет радиальное перемещение и равное ему увеличение радиуса. Согласно выражению (16.3)

$$u = \varepsilon_\theta r. \quad (16.89)$$

Так как

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r),$$

то

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \quad (16.90)$$

Для определения перемещения на наружном контуре и равного ему увеличения радиуса в формулу (16.90) нужно подставить  $r = r_2$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_2}$  и  $\sigma_r = \sigma_{r_2}$ .

В случае неравномерного нагрева диска к напряжениям, вызванным центробежными силами его собственной массы и контурными нагрузками, прибавляются температурные напряжения.

Определим отдельно температурные напряжения. Ход решения этой задачи аналогичен ходу только что рассмотренной. Уравнение равновесия получим из уравнения (16.65), положив  $\omega = 0$ . Оно будет таким же, как в случае расчета толстостенного цилиндра [формула (16.1)]:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (16.91)$$

Относительные деформации с учетом температурного расширения определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha T. \end{aligned} \quad (16.92)$$

Решая совместно эти уравнения относительно напряжений, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1 + \mu)\alpha T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r - (1 + \mu)\alpha T]. \end{aligned} \quad (16.93)$$

Учитывая выражения (16.2) и (16.3), будем иметь:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T \right]; \quad (16.94)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1+\mu) \alpha T \right].$$

Обозначим  $T^* = T_2 - T_1$  (см. рис. 457, а). При линейном изменении температуры вдоль радиуса диска  $T = T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1}$  и последние выражения принимают вид

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right]; \quad (16.95)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1-\mu) \alpha T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right]. \quad (16.96)$$

Модуль упругости и коэффициент Пуассона полагаем постоянными, не зависящими от температуры и равными их значениям при средней температуре диска.

Подставляя формулы (16.95) и (16.96) в уравнение равновесия (16.91), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения перемещений в температурной задаче:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{r_2-r_1} \alpha T^*. \quad (16.97)$$

Записав уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1+\mu}{r_2-r_1} \alpha T^* \quad (16.98)$$

и проинтегрировав его последовательно дважды, получим решение для перемещения:

$$u = C_1 r + \frac{D_1}{r} + \frac{1+\mu}{3(r_2-r_1)} \alpha T^* r^2. \quad (16.99)$$

Подставив это решение в формулы (16.95) и (16.96) для напряжений, будем иметь:

$$\sigma_r = C + \frac{D}{r^2} - \frac{T^*}{3(r_2-r_1)} \alpha E r; \quad (16.100)$$

$$\sigma_\theta = C - \frac{D}{r^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{T^*}{r_2-r_1} \alpha E r, \quad (16.101)$$

где

$$C = \frac{E}{1-\mu} \left( C_1 + \frac{\alpha T^* r_1}{r_2-r_1} \right); \quad D = \frac{E}{1+\mu} D_1.$$

Постоянные  $C$  и  $D$  могут быть определены из граничных условий: при  $r = r_1$  напряжение  $\sigma_{r_1} = 0$  и при  $r = r_2$  напряжение  $\sigma_{r_2} = 0$ .

Если вращающийся диск нагревается неравномерно, то напряжения от центробежных сил и температурные напряжения следует

суммировать. В случае линейного изменения температуры вдоль радиуса, сложив правые части выражений (16.69) и (16.100), а также выражений (16.70) и (16.101), будем иметь:

$$\sigma_r = K + \frac{L}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{T^*}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r; \quad (16.102)$$

$$\sigma_\theta = K - \frac{L}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{T^*}{r_2 - r_1} \alpha E r, \quad (16.103)$$

где  $K = A + C$ ,  $L = B + D$  — новые постоянные, которые также определяются из граничных условий.

*Пример 73.* Найдем напряжения во вращающемся и неравномерно нагретом диске постоянной толщины с центральным отверстием. Наружный диаметр диска  $d_2 = 500$  мм, диаметр отверстия  $d_1 = 100$  мм, толщина диска  $h = 10$  мм и число оборотов  $n = 3000$  об/мин. На единицу длины наружного контура диска при этом числе оборотов действуют центробежные силы обода и лопаток  $p_{r_2} = 100$  кг/см, внутренний контур диска считать свободным. Температура у внутреннего контура  $T_1 = 200^\circ \text{C}$ , а у наружного  $T_2 = 300^\circ \text{C}$  и изменяется вдоль радиуса по линейному закону. Материал диска — сталь с  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\mu = 0,3$ ;  $\gamma = 7,85 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>;  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ .

Вычислим суммарные напряжения от центробежных сил и от неравномерного нагрева. Для этого воспользуемся формулами (16.102) и (16.103). Подсчитаем входящие в эти формулы величины:

$$\frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 = \frac{3,3}{8} \cdot \frac{0,00785}{981} \left( \frac{3,14 \cdot 3000}{30} \right)^2 = 0,325;$$

$$\frac{1 + 3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 = \frac{1,9}{8} \cdot \frac{0,00785}{981} \left( \frac{3,14 \cdot 3000}{30} \right)^2 = 0,187;$$

$$\frac{T^*}{3(r_2 - r_1)} \alpha E = \frac{100}{3(25 - 5)} \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 = 41,6;$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{T^*}{r_2 - r_1} \alpha E = \frac{2}{3} \cdot \frac{100}{25 - 5} \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 = 83,3.$$

Подставив эти величины в формулы (16.102) и (16.103), получим:

$$\sigma_r = K + \frac{L}{r^2} - 0,325r^2 - 41,6r;$$

$$\sigma_\theta = K - \frac{L}{r^2} - 0,187r^2 - 83,3r.$$

Постоянные  $K$  и  $L$  найдем из граничных условий:

при  $r = r_1 = 5$  см

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} = 0;$$

при  $r = r_2 = 25$  см

$$\sigma_r = \sigma_{r_2} = \frac{p_{r_2}}{h} = \frac{100}{1} = 100 \text{ кг/см}^2.$$

Эти условия дают следующих два уравнения:

$$100 = K + \frac{L}{25^2} - 0,325 \cdot 25^2 - 41,6 \cdot 25;$$

$$0 = K + \frac{L}{5^2} - 0,325 \cdot 5^2 - 41,6 \cdot 5,$$

или

$$625K + L = 839 \ 450;$$

$$25K + L = 5400.$$

Решив уравнения, найдем, что  $K = 1390$ , а  $L = -29\,350$ .

Уравнения для определения напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_r = 1390 - \frac{29\,350}{r^2} - 0,325r^2 - 41,6r;$$

$$\sigma_\theta = 1390 + \frac{29\,350}{r^2} - 0,187r^2 - 83,3r.$$

Вычислим напряжение  $\sigma_r$  при среднем значении радиуса

$$r_{\text{ср}} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{5 + 25}{2} = 15 \text{ см.}$$

Получим:

$$(\sigma_r)_{r=15} = 1390 - \frac{29\,350}{15^2} - 0,325 \cdot 15^2 - 41,6 \cdot 15 = 560 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжения  $\sigma_\theta$  вычислим при  $r = r_1 = 5 \text{ см}$ ,  $r = r_{\text{ср}} = 15 \text{ см}$  и  $r = r_2 = 25 \text{ см}$ . Найдем:

$$(\sigma_\theta)_{r=5} = 1390 + \frac{29\,350}{5^2} - 0,187 \cdot 5^2 - 83,3 \cdot 5 = 2140 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=15} = 1390 + \frac{29\,350}{15^2} - 0,187 \cdot 15^2 - 83,3 \cdot 15 = 230 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=25} = 1390 + \frac{29\,350}{25^2} - 0,187 \cdot 25^2 - 83,3 \cdot 25 = -800 \text{ кг/см}^2.$$

Эпюры напряжений показаны на рис. 459.

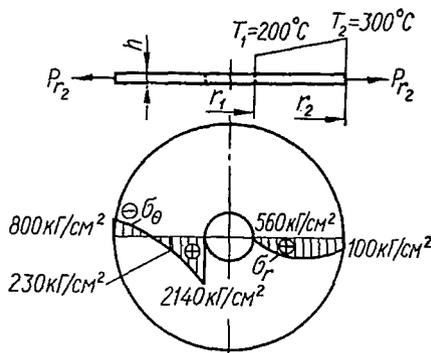


Рис. 459.

## Глава XVII

### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

#### § 107. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях техники широко применяются такие детали и элементы конструкций, которые с точки зрения расчета их на прочность и жесткость могут быть отнесены к тонким оболочкам. Это цистерны, водонапорные резервуары, воздушные и газовые баллоны, купола зданий, герметические перегородки в самолетах и подводных лодках, аппараты химического машиностроения, части корпусов турбин и реактивных двигателей и т. д.

Рассмотрим элемент оболочки (рис. 460). В общем случае в сечениях, которыми выделен элемент, будут действовать погонные (отнесенные к единице длины сечения) усилия (рис. 460, а) и моменты (рис. 460, б): нормальные усилия  $N_1$  и  $N_2$ ; касательные (сдвигающие)

усилия  $S_1$  и  $S_2$ ; поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ ; изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$ ; крутящие моменты  $M_{1кр}$  и  $M_{2кр}$ .

Исходные дифференциальные уравнения для расчета оболочек, полученные с учетом всех этих усилий и моментов, оказываются настолько сложными, что интегрирование их даже для простейших задач связано с большими математическими затруднениями.

Во многих же частных случаях исходные дифференциальные уравнения и решения задачи существенно упрощаются. Этого можно до-

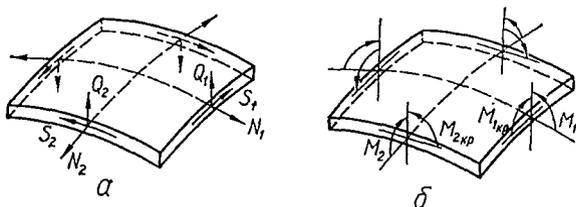


Рис. 460.

стичь, во-первых, учитывая характер самой задачи. Если оболочка представляет собой тело вращения и нагрузка симметрична относительно оси оболочки, то задача называется *осесимметричной* и в этом случае во всех сечениях, образованных плоскостями, проходящими через ось симметрии, и в ортогональных к ним сечениях

$$M_{1кр} = M_{2кр} = S_1 = S_2 = 0; Q_1 = 0 \text{ (или } Q_2 = 0). \quad (17.1)$$

Во-вторых, если вид оболочки, характер нагрузки и закреплений по тем или иным соображениям позволяет прийти к выводу, что какие-либо усилия или моменты всюду малы по сравнению с остальными усилиями и моментами, то принимают допущение, что эти усилия и моменты равны нулю. Например, часто полагают, что

$$M_1 = M_2 = M_{1кр} = M_{2кр} = 0; Q_1 = Q_2 = 0, \quad (17.2)$$

и в результате приходят к так называемой *безмоментной теории оболочек*.

Еще более упрощаются уравнения и их решения, если сочетаются оба указанных обстоятельства — рассматривается *осесимметричная задача в безмоментной теории оболочек*. Тогда выполняются все равенства (17.1) и (17.2).

## § 108. НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим резервуар (рис. 461), представляющий собой осесимметричную оболочку. В ней меридиональные сечения срединной поверхности образуют плавные кривые, не имеющие изломов. Толщина  $h$  оболочки предполагается малой по сравнению с радиусами кривизны. Свободный край резервуара закреплен так, что на него могут действовать только усилия, касательные к меридиональным кривым. Тогда можно считать, что оболочка находится в безмоментном напряженном состоянии, для которого справедливы равенства (17.2).

Пусть резервуар заполнен (частично или полностью) газом, жидкостью или сыпучим веществом. Давление  $p$  (атм, кг/см<sup>2</sup>) в этом случае может меняться по высоте (т. е. вдоль оси резервуара), но, очевидно, будет одинаковым во всех точках плоскости, перпендикулярной к оси резервуара. Тогда оболочка будет находиться не только в безмоментном, но и в осесимметричном напряженном состоянии.

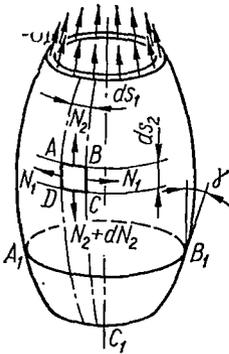


Рис. 461.

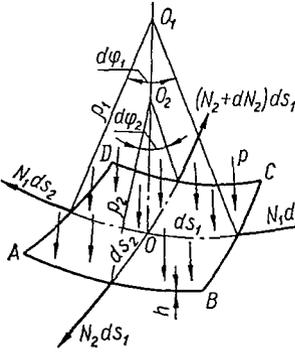


Рис. 462.

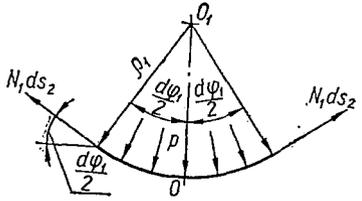


Рис. 463.

Выделим прямоугольный криволинейный элемент  $ABCD$  оболочки (рис. 461), проведя два близких осевых сечения и два ортогональных к ним и к поверхности оболочки сечения (последние сечения представляют собой две конические поверхности с вершинами на оси резервуара). Длины граней элемента обозначим через  $ds_1$  и  $ds_2$ .

Согласно равенствам (17.1) и (17.2) в гранях элемента будут действовать только нормальные погонные усилия  $N_1$  и  $N_2$  и соответствующие им напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (растягивающие в случае внутреннего давления и сжимающие — в случае внешнего). Следовательно, грани элемента будут главными площадками.

В гранях  $AB$  и  $CD$  усилия  $N_2$  могут отличаться на величину  $dN_2$ ; усилия же  $N_1$  в гранях  $BC$  и  $AD$  в силу осевой симметрии будут одинаковыми. Поскольку  $N_1$  — это усилия, приходящиеся на единицу длины, то на все сечение  $BC$  приходится полное усилие  $N_1 ds_2$ . Это же относится и к другим граням элемента.

Элемент  $ABCD$  срединной поверхности оболочки вместе с приложенными к нему усилиями и давлением изображен на рис. 462. Точка  $O$  — центр элемента, точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры главных кривизн срединной поверхности,  $OO_1$  — нормаль к поверхности элемента. Главные радиусы кривизны срединной поверхности обозначены через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , причем  $\rho_1$  — радиус широтной кривизны, а  $\rho_2$  — радиус меридиональной кривизны. Очевидно,

$$ds_1 = \rho_1 d\varphi_1; \quad ds_2 = \rho_2 d\varphi_2. \quad (17.3)$$

Запишем условие равновесия элемента, приравняв нулю сумму проекций всех сил на нормаль к элементу. Рассматривая рис. 462 и 463, получаем:

$$2N_1 ds_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Слагаемое  $dN_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2}$  имеет более высокий порядок малости, и им можно пренебречь. Далее, учитывая малость углов  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$  и соотношения (17.3), находим:

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} = \frac{d\varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ds_1}{\rho_1}; \quad \sin \frac{d\varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ds_2}{\rho_2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение равновесия и разделив его на  $ds_1 ds_2$ , получим:

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (17.4)$$

Выражение (17.4) устанавливает зависимость между двумя усилиями —  $N_1$  и  $N_2$ . Поскольку, однако, неизвестных усилий два, то для определения их одного уравнения недостаточно. Дополнительных уравнений равновесия для элемента составить больше нельзя. Поэтому

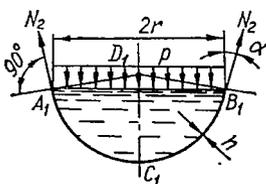


Рис. 464.

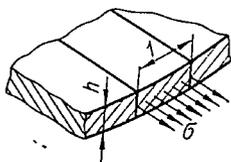


Рис. 465.

запишем уравнение равновесия (сумму проекций на ось оболочку) произвольной конечной части  $A_1 C_1 B_1$  оболочки (рис. 461 и 464). Эта часть отсекается конической поверхностью  $A_1 D_1 B_1$ , нормальной к срединной поверхности оболочки, по контуру  $A_1 B_1$ .

По контуру сечения  $A_1 B_1$  (по окружности радиуса  $r$ ) действуют погонные усилия  $N_2$ . На единице длины контура получается вертикальная проекция  $N_2 \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона меридиональной кривой к оси резервуара. Поэтому результирующее вертикальное усилие от действия  $N_2$  будет направлено вверх и равно

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r.$$

Вертикально вниз действуют сила давления  $p\pi r^2$ , вес  $Q_{ж}$  жидкости (или сыпучего вещества), заключенной в объеме  $A_1 C_1 B_1$ , и вес  $Q_p$  части резервуара  $A_1 C_1 B_1$ . Тогда из условия равновесия

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - Q_{ж} - Q_p = 0$$

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (17.5)$$

Уравнения (17.4) и (17.5) дают возможность найти все усилия в осесимметричной безмоментной оболочке. В сопротивлении материалов принято эти уравнения записывать в напряжениях.

Приняв предположение о том, что изгибающие и крутящие моменты в оболочке отсутствуют, допускаем тем самым, что по толщине ее напряжения распределяются равномерно (как при простом растяжении — сжатии). Поэтому (рис. 465)

$$N = \sigma \cdot h \cdot l = \sigma h. \quad (17.6)$$

Кроме того, в сопротивлении материалов для меридиональных напряжений и радиусов кривизны приняты обозначения  $\sigma_m$  и  $\rho_m$ , а не  $\sigma_2$  и  $\rho_2$ ; для широтных величин —  $\sigma_t$  и  $\rho_t$  вместо  $\sigma_1$  и  $\rho_1$ . В соответствии с этим будем иметь:

$$N_1 = \sigma_t h; \quad N_2 = \sigma_m h. \quad (17.7)$$

Подставив эти выражения в уравнения (17.4) и (17.5) и учтя замечания в отношении индексов, получим:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h} \quad (17.8)$$

и

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_{п}}{2\pi r h \cos \alpha}. \quad (17.9)$$

Формула (17.8) носит название *формулы Лапласа*; формула (17.9) иногда именуется *уравнением равновесия зоны* или просто *уравнением зоны*. Напряжение  $\sigma_m$  называется *меридиональным нормальным напряжением*,  $\sigma_t$  — *окружным (широтным, кольцевым) нормальным напряжением*.

Поскольку оболочка тонкая, то вместо радиусов  $\rho_t$ ,  $\rho_m$  и  $r$  средней поверхности оболочки в формулы (17.8) и (17.9) можно подставлять соответствующие радиусы наружной или внутренней поверхностей.

Следует обратить еще внимание и на то, что в задаче о расчете резервуара удалось получить формулы для напряжений, не рассматривая геометрической и физической сторон задачи, т. е. задача оказалась статически определенной. Это — результат того, что мы сразу постулировали закон изменения напряжений по толщине оболочки — считали их постоянными.

Как уже отмечалось, напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  являются главными напряжениями. Что касается третьего главного напряжения, направление которого нормально к поверхности оболочки, то на одной из поверхностей резервуара (наружной или внутренней — в зависимости от того, с какой стороны действует давление на резервуар) оно равно  $p$ , а на противоположной — нулю. В тонкостенных оболочках всегда  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  значительно больше  $p$  и, значит, величиной третьего главного напряжения по сравнению с  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  можно пренебречь, т. е. считать его равным нулю.

Таким образом, будем полагать, что материал оболочки находится в плоском напряженном состоянии. Тогда для расчета на прочность в зависимости от состояния материала следует пользоваться соответствующей теорией прочности. Например, применив IV теорию прочности, условие прочности запишем так:

$$\sigma_{экв. IV} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2} - \sigma_m \sigma_t \leq [\sigma]. \quad (17.10)$$

Рассмотрим примеры расчета безмоментных оболочек.

Сферический баллон заполнен газом, давление которого равно  $p$  (рис. 466).

В этом случае вследствие центральной симметрии

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_t = R; \\ \sigma_m &= \sigma_t = \sigma.\end{aligned}$$

Поэтому на основании формулы (17.8)

$$2 \cdot \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}, \text{ или } \sigma = \frac{pR}{2h}.$$

Таким образом, главные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \quad (17.11)$$

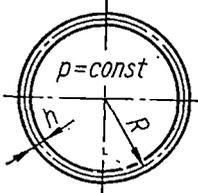


Рис. 466.

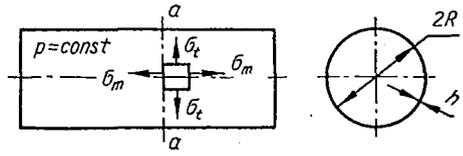


Рис. 467.

Условия прочности по первой, третьей и четвертой теориям прочности приводятся к виду

$$\sigma_{\text{экв. IV}} = \frac{pR}{2h} \leq [\sigma]. \quad (17.12)$$

Цилиндрический баллон заполнен газом, давление которого равно  $p$  (рис. 467).

Здесь

$$\rho_t = R; \quad \rho_m = \infty.$$

Тогда и из формулы (17.8)

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h},$$

т. е.

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (17.13)$$

Чтобы найти  $\sigma_m$ , проведем сечение  $a-a$  и рассмотрим равновесие любой из частей цилиндра. В результате, пользуясь формулой (17.9) и полагая в ней  $Q_{\text{ж}} = Q_p = 0$  и  $\alpha = 0$ , получим:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (17.14)$$

Следовательно, кольцевые напряжения  $\sigma_t$  вдвое больше меридиональных  $\sigma_m$ . Поэтому, например, у клепаного резервуара продольный шов должен быть в два раза прочнее поперечного.

Заметим, что полученные результаты верны только для центральной части цилиндра, так как те его части, которые примыкают к днищам,

не могут быть рассчитаны по безмоментной теории (подробнее об этом сказано ниже).

Резервуар в виде шарового сегмента (рис. 468) наполнен жидкостью (или сыпучим веществом) с плотностью  $\gamma$ .

Вводим полярный угол  $\varphi$ , определяющий положение произвольной точки  $A$ . Тогда

$$\alpha = 90^\circ - \varphi; \quad \rho_t = \rho_m = R; \quad r = R \sin \varphi; \quad H = R (\cos \varphi - \cos \beta);$$

$$\rho = \gamma H = \gamma R (\cos \varphi - \cos \beta).$$

Из уравнения Лапласа следует, что

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{\rho R}{h} = \frac{\gamma R^2}{h} (\cos \varphi - \cos \beta).$$

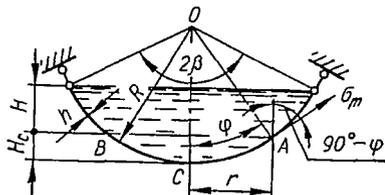


Рис. 468.

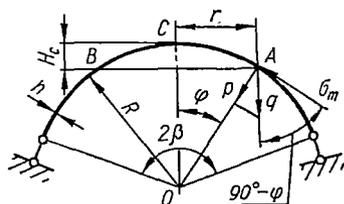


Рис. 469.

Теперь воспользуемся уравнением (17.9). Величина  $Q_{ж}$  равна весу жидкости в объеме шарового сегмента  $ACB$ :

$$Q_{ж} = \gamma V_{ACB} = \gamma \frac{1}{3} \pi H_c^2 (3R - H_c).$$

Высота шарового сегмента

$$H_c = R (1 - \cos \varphi).$$

Поэтому

$$Q_{ж} = \frac{\pi \gamma}{3} R^3 (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi).$$

Подставляя в уравнение (17.9) выражения для  $\rho$ ,  $r$ ,  $Q_{ж}$ , а и пренебрегая весом резервуара  $Q_p$ , получаем:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right] \quad (17.15)$$

и затем

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (17.16)$$

Максимальная величина напряжений получается в точке  $C$ , где  $\varphi = 0$ :

$$\sigma_{m_{\max}} = \sigma_{t_{\max}} = \frac{\gamma R^2 (1 - \cos \beta)}{2h}. \quad (17.17)$$

На краю оболочки ( $\varphi = \beta$ )

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h} \cdot \frac{2 - \cos \beta - \cos^3 \beta}{1 + \cos \beta}, \quad (17.18)$$

причем кольцевые напряжения становятся сжимающими.

Купол в виде шарового сегмента радиусом  $R$  и толщиной стенки  $h$  (рис. 469) изготовлен из материала плотности  $\gamma$ .

Вес единицы площади поверхности  $q = \gamma h$ . Его составляющая, нормальная к поверхности,

$$q_n = q \cos \varphi = \gamma h \cos \varphi$$

играет роль давления, приложенного к поверхности. Внутри же купола давление равно нулю, так что в уравнении Лапласа следует положить  $p = -q_n$ , а в уравнении зоны  $p = 0$ .

Учитывая, что  $\rho_t = \rho_m = R$ , из уравнения Лапласа находим:

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = -\gamma R \cos \varphi. \quad (17.19)$$

Чтобы получить дополнительное уравнение, вычислим вес части  $ACB$  резервуара:

$$Q_p = qS_{ACB} = \gamma h S_{ACB},$$

где площадь боковой поверхности шарового сегмента  $ACB$

$$S_{ACB} = 2\pi R H_C = 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi).$$

Значит,

$$Q_p = 2\pi \gamma h R^2 (1 - \cos \varphi).$$

Подставив теперь в формулу (17.9) выражение для  $Q_p$  и

$$r = R \sin \varphi; \quad \alpha = 90^\circ - \varphi; \quad p = 0,$$

а также учтя (знаком минус), что в сечении  $AB$  вес части  $ACB$  вызывает сжатие, получим:

$$\sigma_m = -\frac{\gamma R}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.20)$$

Тогда из уравнения (17.19)

$$\sigma_t = \gamma R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.21)$$

Меридиональные напряжения всюду сжимающие и возрастают по мере удаления от вершины купола к краю. Кольцевые напряжения в верхней части купола отрицательны (сжимающие); при  $\varphi = 51^\circ 50'$  они обращаются в нуль, а при  $\varphi > 51^\circ 50'$  становятся растягивающими. Полученные результаты верны, если опорное устройство купола такое, что в нем могут возникать только реакции, направленные по касательной к меридиональной кривой.

## § 109. РАСПОРНЫЕ КОЛЬЦА В ОБОЛОЧКАХ

До сих пор мы рассматривали оболочки, меридиональные сечения которых представляли собой плавные кривые с непрерывно изменяющейся кривизной. Расчет такой оболочки по безмоментной теории (если толщина оболочки мала) дает вполне приемлемые для практики результаты.

Теперь исследуем влияние переломов меридиональной кривой на напряженное состояние оболочки. Пусть в некотором сечении  $A-A$  (рис. 470) оболочка имеет перелом, так что касательные к меридиональной кривой слева и справа от точки  $A$  образуют между собой угол не  $180^\circ$ , а  $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ . Рассмотрим меридиональные напряжения  $\sigma_{m_1}$  и  $\sigma_{m_2}$  (рис. 471) в сечениях  $B-B$  и  $C-C$ , бесконечно близких к  $A-A$  (эти сечения образованы коническими поверхностями  $O_1BB$  и  $O_2CC$ , нормальными к срединной поверхности

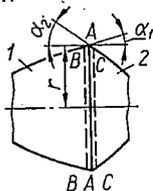


Рис. 470.

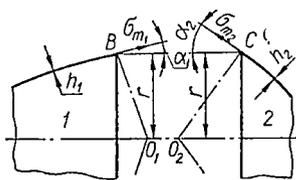


Рис. 471.

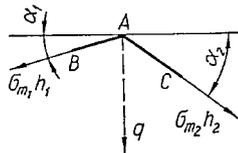


Рис. 472.

оболочки). Погонные усилия в этих сечениях равны  $\sigma_{m_1}h_1$  и  $\sigma_{m_2}h_2$  (рис. 472), где  $h_1$  и  $h_2$  — толщины частей 1 и 2 оболочки.

Из условия равновесия кольца  $BBC$  следует, что

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos \alpha_1 2\pi r = \sigma_{m_2}h_2 \cos \alpha_2 2\pi r,$$

т. е.

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos \alpha_1 = \sigma_{m_2}h_2 \cos \alpha_2. \quad (17.22)$$

Таким образом, проекции усилий  $\sigma_{m_1}h_1$  и  $\sigma_{m_2}h_2$  на ось оболочки взаимно уравновешиваются. Иная картина будет с проекциями этих усилий на плоскость  $A-A$  (рис. 472). Складываясь, они дадут погонное радиальное усилие

$$q = \sigma_{m_1}h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m_2}h_2 \sin \alpha_2. \quad (17.23)$$

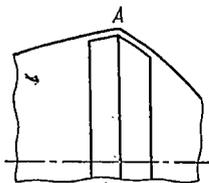


Рис. 473.

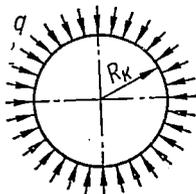


Рис. 474.

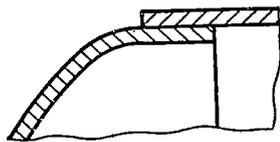


Рис. 475.

Усилие  $q$  можно рассматривать как местную нагрузку, сжимающую оболочку. Эта нагрузка может вызвать в оболочке значительные изгибные напряжения. Чтобы уменьшить изгиб, в резервуарах часто устанавливают кольца жесткости, или распорные кольца (рис. 473), которые и принимают на себя радиальные усилия  $q$ .

Распорное кольцо нагружено по схеме, показанной на рис. 474. В нем возникают только сжимающие напряжения, и условие прочности для кольца имеет вид

$$\frac{qR_k}{F_k} \leq [\sigma], \quad (17.24)$$

где  $R_k$  — радиус оси кольца;  $F_k$  — площадь поперечного сечения кольца, а  $q$  определяется по формуле (17.23).

Иногда вместо распорного кольца создают местное утолщение оболочки (рис. 475), загибая края днища резервуара внутрь обечайки.

Если оболочка испытывает внешнее давление, то меридиональные напряжения будут отрицательными (сжимающимися) и согласно формуле (17.24) радиальное усилие  $q$  получится также отрицательным, т. е. направленным наружу. Тогда кольцо жесткости будет работать не на сжатие, а на растяжение. При этом, очевидно, условие прочности (17.24) останется тем же.

Заметим, что распорное кольцо не уничтожает совсем, а лишь уменьшает изгибные напряжения. При наличии кольца причиной появления изгиба в оболочке является различие радиальных перемещений в сечении по кольцу и в соседних с кольцом поперечных сечениях оболочки (от сжатия диаметр кольца и прикрепленной к нему оболочки должен уменьшаться, а в соседних с кольцом сечениях от действия растягивающих широтных напряжений диаметр оболочки должен увеличиваться).

Рассмотрим цилиндрический резервуар со сферическими днищами (рис. 476), наполненный газом, давление которого равно  $p$ , ат. Требуется определить толщины стенок и площадь сечения кольца, считая допускаемые напряжения известными.

Толщину  $h_1$  стенки днища находим из формулы (17.12):

$$h_1 \geq \frac{pR}{2[\sigma]}.$$

Принимая четвертую теорию прочности и пользуясь формулами (17.10), (17.13) и (17.14), записываем условие прочности для обечайки:

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{p^2 r^2}{4h_2^2} + \frac{p^2 r^2}{h_2^2} - \frac{p^2 r^2}{2h_2^2}} \leq [\sigma],$$

откуда

$$h_2 \geq \frac{pr\sqrt{3}}{2[\sigma]}.$$

Тогда меридиональное напряжение в днище

$$\sigma_{m_1} = \frac{pR}{2h_1},$$

а в обечайке

$$\sigma_{m_2} = \frac{pr}{2h_2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (17.23) и учитывая, что в данном случае  $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$ , находим погонное радиальное усилие, приложенное к распорному кольцу:

$$q = \frac{pR}{2} \cos \alpha.$$

Наконец, считая, что радиус кольца  $R_k \approx r$ , из формулы (17.24) определяем необходимую площадь поперечного сечения кольца:

$$F_k = \frac{qR_k}{[\sigma]} = \frac{\rho R r \cos \alpha}{2[\sigma]}.$$

### § 110. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим одну из простейших задач моментной теории оболочек: по краю тонкой полубесконечной цилиндрической оболочки (рис. 477) равномерно распределены погонные поперечные силы  $Q_0$  и изгибающие моменты  $M_0$ ; кроме того, на оболочку действует постоянное внутреннее давление  $p$ ; требуется найти перемещения точек оболочки и напряжения в ней.

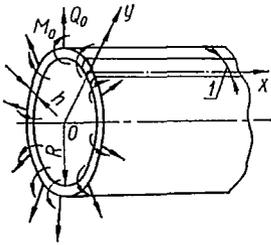


Рис. 477.

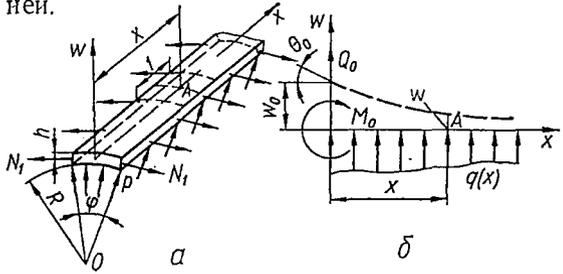


Рис. 478.

Эта задача имеет некоторое самостоятельное значение, и, кроме того, полученные в ней результаты в следующем параграфе будут использованы для нахождения местных изгибных напряжений.

Выделим из оболочки полубесконечную полоску единичной ширины (рис. 477 и 478, а), которой соответствует малый центральный угол

$$\varphi = \frac{1}{R}. \quad (17.25)$$

В конечном сечении на полоску действуют усилие  $Q_0$  и момент  $M_0$ , по поверхности — давление  $p$ , по продольным краям — погонные широтные усилия  $N_1$ , переменные вдоль края.

Введем оси координат  $w$  и  $x$ : ось  $w$  направим от оси оболочки по радиусу, ось  $x$  — по образующей (рис. 478, а). Распределенную по поверхности и по продольным краям нагрузку можно привести к погонной нагрузке  $q(x)$ , действующей в плоскости  $wx$  параллельно оси  $w$ .

Выделив в окрестности произвольной точки  $A$  (рис. 478, а) элемент полоски, длина которого равна единице, и считая, что  $q(x) > 0$ , если нагрузка действует от оси оболочки наружу, получим:

$$q(x) = -q_1(x) + q_2.$$

Учитывая малость угла  $\varphi$  и формулу (17.25), будем иметь:

$$q_1(x) = 2N_1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = N_1 \varphi = \frac{N_1}{R};$$

$$q_2 = p \cdot 1 \cdot 1 = p;$$

итак,

$$q(x) = p - \frac{N_1}{R}. \quad (17.26)$$

Распределенная нагрузка  $q(x)$ , а также  $Q_0$  и  $M_0$  вызывают плоский изгиб полоски в плоскости  $yx$ . Эту полоску можно назвать балкой-полоской и в дальнейшем обращаться с ней как с полубесконечной балкой (рис. 478, а) прямоугольного сечения  $l \times h$ .

Рассматривая изгиб балки-полоски, необходимо учесть, что, прогибаясь, она взаимодействует с соседними полосками. Одна сторона этого

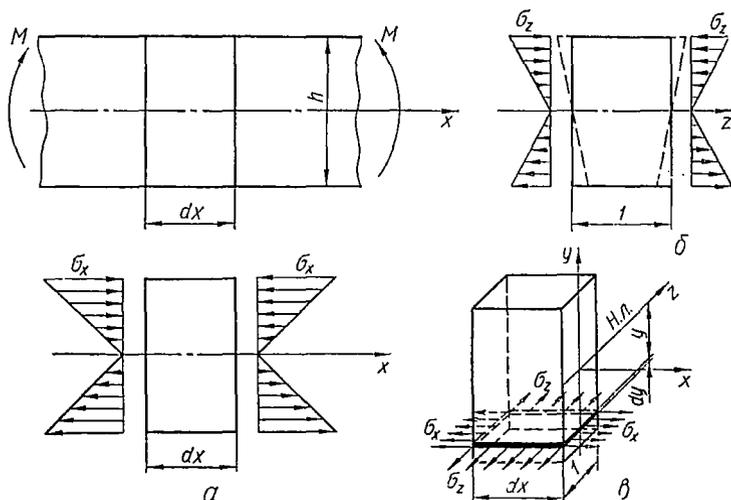


Рис. 479.

взаимодействия учитывается слагаемым  $-\frac{N_1}{R}$  в выражении (17.26) для погонной нагрузки  $q(x)$ . Но оказывается еще, что в результате этого балка-полоска становится более жесткой на изгиб в плоскости по сравнению с обычной балкой. Выясним, почему это происходит и каким образом должно быть учтено.

При изгибе обычной балки форма ее поперечных сечений изменяется, так как размеры их по ширине, т. е. в направлении, параллельном оси  $z$ , в сжатой части балки увеличиваются, а в растянутой — уменьшаются (штриховые линии на рис. 479, б). Не изменяется только ширина нейтрального слоя. В балке-полоске из-за взаимодействия ее с соседними полосками такого изменения поперечного сечения произойти не может. Это взаимодействие приводит к возникновению напряжений  $\sigma_z$ , препятствующих изменению размеров в направлении, параллельном оси  $z$ , вследствие чего  $\epsilon_z = 0$ . Таким образом, в балке-полоске, в отличие от обычной балки, кроме напряжений  $\sigma_x$  в поперечном сечении (рис. 479, а), будут еще и напряжения  $\sigma_z$  в продольных сечениях, перпендикулярных к нейтральному слою (рис. 479, б). Наличием напряжений  $\sigma_z$  и объясняется увеличение жесткости на изгиб балки-полоски.

Каждый бесконечно тонкий слой материала балки, параллельный нейтральному, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 479, в). Это обстоятельство и необходимо учесть при выводе дифференциального уравнения упругой линии балки-полоски.

Дифференциальное уравнение изгиба для балки-полоски можно получить таким же способом, как и для обычной балки (см. § 66). При этом статическая и геометрическая стороны задачи выражаются теми же зависимостями (10.3) и (10.6), что и в случае обычной балки а именно:

а) статическое уравнение следующее:

$$\int_F \sigma_x y dF = M(x). \quad (17.27)$$

б) геометрическая зависимость такова:

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho}, \text{ или } \epsilon_x = \frac{d^2w(x)}{dx^2} y; \quad (17.28)$$

Физическая сторона задачи (связь между напряжением  $\sigma_x$  в поперечном сечении и относительной деформацией  $\epsilon_x$ ) для балки-полоски выражается на основании формул обобщенного закона Гука с учетом того, что  $\epsilon_z = 0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}; \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = 0, \text{ или } \sigma_z = \mu \sigma_x. \end{aligned}$$

Из этих формул находим нужную нам зависимость

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \epsilon_x. \quad (17.29)$$

Подставив выражения (17.28) и (17.29) в уравнение (17.27), получим:

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} \int_F dF y^2 = M(x).$$

Для балки-полоски с размерами сечения  $1 \times h$  элемент площади  $dF = 1 dy$  Тогда

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = M(x),$$

или после вычисления интеграла —

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} = M(x).$$

Величина

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} = \frac{EJ}{1 - \mu^2} = D \quad (17.30)$$

называется *цилиндрической жесткостью*. Она больше обычной жесткости поперечного сечения балки  $EJ$ .

Дифференциальное уравнение изгиба с введением общепринятого обозначения цилиндрической жесткости через  $D$  записывается так:

$$D \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x).$$

Дважды дифференцируя по  $x$  обе части этого уравнения и учитывая, что  $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$ , получаем уравнение в следующем виде:

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x). \quad (17.31)$$

Таким образом, для балки-полоски дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p - \frac{N_1}{R}. \quad (17.32)$$

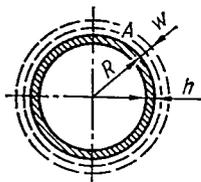


Рис. 480.

Теперь выразим кольцевое усилие  $N_1$  оболочки через прогиб балки  $w(x)$  (рис. 478, б). Одновременно  $w(x)$  является и радиальным перемещением точек оболочки (рис. 480) вследствие действия  $Q_0$ ,  $M_0$  и  $p$ . Это перемещение вызывает в широтном направлении относительное удлинение

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi [R + w(x)] - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{w(x)}{R}. \quad (17.33)$$

Считая, что меридиональных напряжений растяжения в оболочке нет, получим кольцевое напряжение

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = \frac{E}{R} w(x) \quad (17.34)$$

и, наконец, кольцевое усилие

$$N_1 = \sigma_t \cdot h \cdot 1 = \frac{Eh}{R} w(x). \quad (17.35)$$

Внося это выражение в уравнение (17.32), получим:

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w(x) = p. \quad (17.36)$$

Уравнение (17.36) идентично уравнению (11.12) (см. § 73), описывающему изгиб балки на упругом основании, если принять

$$k = \frac{Eh}{R^2}. \quad (17.37)$$

Поэтому преобразуем уравнение (17.36) так, как это делалось в § 73.

Разделив уравнение (17.36) на  $D$ , учтя выражение (17.30) и введя обозначение

$$a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^3}}, \quad (17.38)$$

получим:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4a^4 w(x) = \frac{p}{D}. \quad (17.39)$$

Очевидно, величина  $a$  имеет размерность  $1/\text{см}$ , поэтому переменная

$$\xi = ax \quad (17.40)$$

будет безразмерной. Примем ее за новую независимую переменную.

Поскольку

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = a^4 \frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} = \frac{3(1 - \mu^2)}{R^2 h^2} \cdot \frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4},$$

то уравнение (17.39) окончательно запишется в виде

$$\frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} + 4w(\xi) = \frac{4pR^2}{Eh}. \quad (17.41)$$

Легко проверить, что частным решением этого уравнения будет

$$w_{\text{част}} = \frac{pR^2}{Eh}. \quad (17.42)$$

Однородное же уравнение, соответствующее уравнению (17.41), в точности совпадает с уравнением (11.16), и его общий интеграл записывается в виде (11.17). Поэтому общий интеграл уравнения (17.41) будет иметь вид

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi} (A \cos \xi + B \sin \xi) + e^{\xi} (C \cos \xi + D_1 \sin \xi). \quad (17.43)$$

Здесь четвертая постоянная обозначена  $D_1$ , а не  $D$ , чтобы не путать ее с цилиндрической жесткостью.

С физической точки зрения очевидно, что в сечениях, бесконечно удаленных от рассматриваемого края облоочки, влияние  $Q_0$  и  $M_0$  должно исчезать и  $w(\infty)$  должно быть конечной величиной. Этому противоречит последнее слагаемое в выражении (17.43), которое из-за множителя  $e^{\xi}$  неограниченно возрастает на бесконечности. Поэтому следует положить

$$C = D_1 = 0.$$

Тогда

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi} (A \cos \xi + B \sin \xi). \quad (17.44)$$

Воспользовавшись известными дифференциальными зависимостями для балок (где жесткость  $EJ$  заменена цилиндрической жесткостью  $D$ )

$$\Theta = \frac{dw}{dx} = a \frac{dw}{d\xi};$$

$$M = D \frac{d^2 w}{dx^2} = Da^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2};$$

$$Q = D \frac{d^3 w}{dx^3} = Da^3 \frac{d^3 w}{d\xi^3},$$

из формулы (17.44) получим следующие выражения для углов наклона упругой линии, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$\Theta = ae^{-\xi} [A (\cos \xi + \sin \xi) + B (\cos \xi - \sin \xi)];$$

$$M = Da^2 e^{-\xi} (2A \sin \xi - 2B \cos \xi);$$

$$Q = Da^3 e^{-\xi} [2A (\cos \xi - \sin \xi) + 2B (\cos \xi + \sin \xi)]. \quad (17.45)$$

Выразим теперь постоянные  $A$  и  $B$  через  $Q_0$  и  $M_0$ . Поскольку (см. рис. 478, б)

$$M_0 = M|_{\xi=0}; \quad Q_0 = Q|_{\xi=0}.$$

то, положив в последних двух формулах (17.45)  $\xi = 0$ , получим, что

$$\begin{aligned} -2BDa^2 &= M_0; \\ Da^3(2A + 2B) &= Q_0, \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{1}{2a^3D}(Q_0 + aM_0); \quad B = -\frac{1}{2a^2D}M_0.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в выражения (17.44) и (17.45), найдем окончательно:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\rho R^3}{Eh} + \frac{1}{2a^3D} e^{-\xi} [Q_0 \cos \xi + aM_0 (\cos \xi - \sin \xi)]; \\ \Theta &= \frac{1}{2a^2D} e^{-\xi} [Q_0 (\cos \xi + \sin \xi) + 2aM_0 \cos \xi]; \\ M &= \frac{1}{a} e^{-\xi} [Q_0 \sin \xi + aM_0 (\cos \xi + \sin \xi)]; \\ Q &= e^{-\xi} [Q_0 (\cos \xi - \sin \xi) - 2aM_0 \sin \xi], \end{aligned} \quad (17.46)$$

причем  $a$  дается формулой (17.38), а  $\xi$  — формулой (17.40).

Полученные формулы представляют решение поставленной задачи, так как дают возможность вычислить в любом поперечном сечении оболочки радиальное перемещение  $w$ , угол наклона  $\Theta$  деформированной образующей к оси оболочки, погонный изгибающий момент  $M$  и погонную поперечную силу  $Q$ . Положительные направления этих величин совпадают с положительными направлениями  $w_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  (на рис. 478, б  $w_0 > 0$ ,  $M_0 > 0$ ,  $Q_0 > 0$ , а  $\Theta_0 < 0$ ).

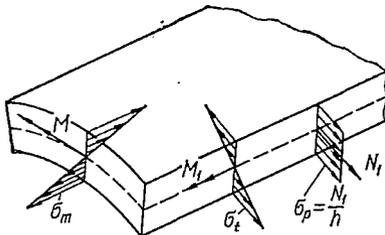


Рис. 481.

Исследовав изгибные напряжения в балке-полоске, выделенной в тонкостенной цилиндрической оболочке, мы получили решение и для всей оболочки. Напряжения  $\sigma_x$  в балке-полоске являются изгибными напряжениями  $\sigma_m$  в меридиональном направлении оболочки (в поперечных ее сечениях), а напряжения  $\sigma_z$  — изгибными напряжениями  $\sigma_t$  в широтном направлении (в продольных сечениях). Эпюры  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  показаны на рис. 481. Напряжениям  $\sigma_m$  соответствует изгибающий момент  $M$ , а напряжениям  $\sigma_t$  — момент  $M_1$ .

Ранее было показано, что  $\sigma_t = \mu \sigma_m$ . Тогда, очевидно,

$$M_1 = \mu M. \quad (17.47)$$

В продольных сечениях оболочка также подвергается растяжению или сжатию (в зависимости от того, изнутри или извне действует давление).

Максимальные напряжения определяют по формулам

$$\sigma_{m\max} = \frac{M}{W}; \quad \sigma_{t\max} = \pm \frac{M}{W} + \frac{N}{F},$$

где

$$W = \frac{1 \cdot h^2}{6}; \quad F = 1 \cdot h,$$

так что

$$\sigma_{m\max} = \frac{6M}{h^2}; \quad \sigma_{t\max} = \pm \frac{6M}{h^2} + \frac{N}{h}. \quad (17.48)$$

Входящие сюда величины  $M_1$  и  $N_1$  можно найти по формулам (17.47) и (17.35) после того, как по формулам (17.46) вычислены  $w$  и  $M$ . Имея же максимальные напряжения и выбрав ту или иную теорию прочности, можно произвести расчет на прочность. При этом нужно обращать внимание на выбор правильного знака в формуле для  $\sigma_{t\max}$ .

Выясним теперь, насколько далеко от края оболочки распространяется влияние краевых моментов  $M_0$ . Сделаем это на следующем числовом примере.

*Пример 74.* Стальная труба ( $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ) радиусом  $R = 40 \text{ мм}$  с толщиной стенки  $h = 2 \text{ мм}$  находится под действием равномерного внутреннего давления  $p = 25 \text{ ат}$  и краевых моментов  $M_0 = 3,33 \text{ кг} \cdot \text{см/см}$  (рис. 482).

Построим эпюры изменения максимальных меридиональных и кольцевых напряжений вдоль оси трубы.

При отсутствии краевых моментов всюду было бы

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_t = \frac{pR}{h} = \frac{25 \cdot 4}{0,2} = 500 \text{ кг/см}^2. \quad (17.49)$$

Полагая в формулах (17.46)  $Q_0 = 0$ , получаем:

$$w = \frac{pR^2}{Eh} + \frac{M_0}{2a^2D} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi);$$

$$M = M_0 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \quad (17.50)$$

и согласно формулам (17.48), (17.35), (17.38), (17.30) и (17.47) у внутренней поверхности

$$\sigma_{m\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6M_0}{h^2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi);$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{6\mu M}{h^2} + \frac{E}{R} w = \frac{pR}{h} + \mu \sigma_{m\max} +$$

$$+ \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi). \quad (17.51)$$

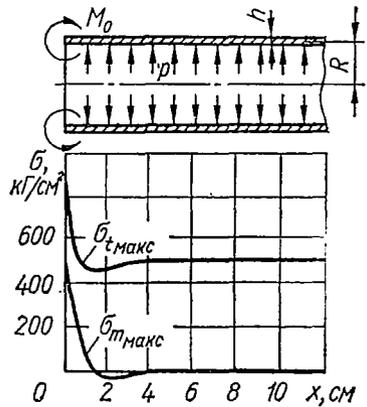


Рис. 482.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi$	$x, \text{ см}$	$e^{-\xi} \cos \xi$	$e^{-\xi} \sin \xi$	[3] + [4]	$\sigma_{\text{макс}} = 500 \cdot [5]$	$17 \cdot [3]$	$5 \cdot [4]$	$20 + [7] - [8]$	$\sigma_{\text{макс}} = 25 \cdot [9]$
0	0	1,000	0	1,000	500	17,00	0	37,00	925
0,3	0,21	0,708	0,219	0,927	464	12,04	1,10	30,94	774
0,7	0,49	0,380	0,320	0,700	350	6,46	1,60	24,86	622
1,1	0,76	0,151	0,297	0,448	224	2,57	1,48	21,09	527
1,5	1,04	0,016	0,223	0,239	120	0,27	1,12	19,15	479
1,9	1,32	-0,048	0,142	0,094	47	-0,82	0,71	18,47	462
2,3	1,60	-0,067	0,075	0,008	4	-1,14	0,38	18,48	462
2,7	1,88	-0,061	0,029	-0,032	-16	-1,04	0,14	18,82	470
3,1	2,15	-0,045	0,002	-0,043	-22	-0,76	0,01	19,23	481
3,5	2,43	-0,028	-0,011	-0,039	-20	-0,48	0,06	19,58	490
3,9	2,71	-0,015	-0,014	-0,029	-15	-0,26	-0,07	19,81	495
4,3	2,99	-0,005	-0,012	-0,017	-8	-0,08	-0,06	19,98	500
4,7	3,27	0,000	-0,009	-0,009	-4	0,00	-0,04	20,04	501
5,1	3,54	0,002	-0,006	-0,004	-2	0,03	-0,03	20,00	500
5,5	3,82	0,003	-0,003	0,000	0	0,05	-0,02	20,08	502
5,9	4,10	0,003	-0,001	0,002	1	0,05	-0,01	20,06	502

Подставив числовые значения  $\rho$ ,  $R$ ,  $M_0$ ,  $h$  и  $\mu$ , получим:

$$\sigma_{m\max} = 500e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi);$$

$$\sigma_{t\max} = 500 + 425e^{-\xi} \cos \xi - 125e^{-\xi} \sin \xi = 20 + 17e^{-\xi} \cos \xi - 5e^{-\xi} \sin \xi. \quad (17.52)$$

Наконец, согласно формулам (17.40) и (17.38)

$$x \text{ (см)} = \frac{\xi}{\alpha} = \xi \sqrt{\frac{R^2 h^2}{3(1-\mu^2)}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 0,2}}{\sqrt{3 \cdot 0,91}} \xi = 0,695\xi.$$

Пользуясь таблицами функций  $e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)$ ;  $e^{-\xi} \cos \xi$  и  $e^{-\xi} \sin \xi$  (табл. 19 и приложение 13), вычисляем значения  $\sigma_{m\max}$  и  $\sigma_{t\max}$  для ряда значений  $\xi$  (табл. 19) и по этим данным строим эпюры, показывающие изменение по длине оболочки максимальных меридиональных и кольцевых напряжений в точках у внутренней поверхности в поперечных и продольных сечениях оболочки (рис. 482).

Эти эпюры показывают, что приложенные к краю оболочки изгибающие моменты  $M_0$  оказывают влияние на напряженное состояние оболочки только в непосредственной близости от места их приложения. На достаточном же удалении от края напряжения практически совпадают с теми, которые получаются в результате расчета оболочки по безмоментной теории. Наличие в оболочке местных быстро затухающих изгибных напряжений обычно называется *краевым эффектом*. Все сказанное относится и к действию поперечных сил  $Q_0$ , распределенных по краю оболочки (см. рис. 477).

## § 111. ПРИМЕРЫ УЧЕТА ИЗГИБНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБОЛОЧКАХ

В предыдущем параграфе было введено понятие краевого эффекта в оболочках, что во многих случаях упрощает расчет конструкций, которые по своей расчетной схеме могут быть отнесены к цилиндрическим оболочкам. При этом большее значение имеет то обстоятельство, что, хотя формулы (17.46) и другие были получены в предположении, что цилиндрическая оболочка полубесконечна, их, очевидно, с успехом можно применять и для конечных оболочек, если только длина последних заметно превосходит размеры зоны, занятой краевым эффектом.

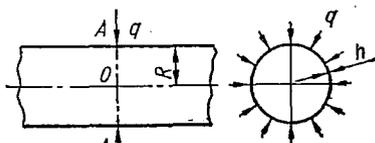


Рис. 483.

Допустим, что к тонкостенному длинному цилиндру (рис. 483) в сечении  $A-A$  приложена равномерно распределенная по периметру сечения нагрузка интенсивностью  $q$  кг/см. В данном случае краевой эффект симметричен относительно линии  $AA$ . Поэтому:

а) нагрузка  $q$  распределяется поровну на левую и правую части цилиндра, т. е. (см. рис. 477)

$$Q_0 = -\frac{q}{2},$$

причем начало координат считаем помещенным в точке  $O$  (рис. 483);

б) касательная к упругой линии балки-полоски в сечении  $A-A$  параллельна оси цилиндра, т. е. (см. рис. 478)

$$\Theta_0 = \Theta|_{\xi=0} = 0.$$

Тогда из второго уравнения (17.46) находим, что

$$M_0 = \frac{q}{4a},$$

где

$$a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}.$$

Подставляя значения  $Q_0$  и  $M_0$  в формулы (17.46), получаем (здесь  $\rho = 0$ ):

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{q}{8a^3 D} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \\ \Theta &= -\frac{q}{4a^2 D} e^{-\xi} \sin \xi; \\ M &= \frac{q}{4a} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \\ Q &= -\frac{q}{2} e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \quad (17.53)$$

Отсюда, в частности для сечения  $A-A$  ( $\xi = 0$ ),

$$\omega_{\max} = \omega_0 = -\frac{q}{8a^3 D} = -\frac{q}{2E} \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2}; \quad (17.54)$$

$$M_{\max} = M_0 = \frac{q}{4a} = \frac{q \sqrt{R} h}{4 \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \text{ кг} \cdot \text{см/см}. \quad (17.55)$$

Максимальные напряжения вычисляются по формулам (17.48).

Пусть на тонкостенную трубу (рис. 484) посажено тонкое кольцо, площадь поперечного сечения которого равна  $F_k$ , материал его имеет модуль упругости  $E_k$ .

Если обозначить через  $q$  радиальное усилие, возникающее между кольцом и трубой, а через  $\delta$  — натяг (разность между наружным радиусом трубы и внутренним радиусом кольца до посадки), то из условия совместности деформаций должно быть:

$$|\omega_k| + |\omega_{\max}| = \delta,$$

где  $\omega_k = \frac{qR^2}{E_k F_k}$  — увеличение радиуса кольца после запрессовки;

$\omega_{\max}$  — максимальный прогиб трубы.

Труба находится в условиях, близких к условиям предыдущего примера, поэтому  $\omega_{\max}$  определяется формулой (17.54). Подставив выражения для  $\omega_k$  и  $\omega_{\max}$  в условие совместности деформаций, получим:

$$q \left[ \frac{R^2}{E_k F_k} + \frac{1}{2E} \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2} \right] = \delta,$$

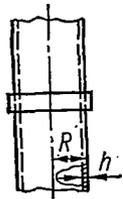


Рис. 484.

откуда определяем  $q$ . После этого по формулам (17.55) и (17.47) находим изгибающие моменты, а затем по формулам (17.48) определяем напряжения. Перемещения найдем по формуле (17.54).

## Глава XVIII

# РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

### § 112. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

Расчеты на прочность отдельных стержней, балок и конструкций, рассмотренные в предыдущих разделах курса, основаны на оценке прочности материала в опасной точке. При таких расчетах наибольшие нормальные, касательные или эквивалентные напряжения (в зависимости от вида напряженного состояния и принятой теории прочности) в опасном сечении и в опасной точке сравниваются с допускаемым напряжением. Если наибольшие расчетные напряжения не превышают допускаемых, то считается, что надлежащий запас прочности конструкции этим обеспечивается. Такой способ расчета на прочность называют *расчетом по допускаемым напряжениям*.

Метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям, бесспорно, обеспечивает прочность конструкции, однако во многих случаях не позволяет рационально использовать все ее возможности и часто приводит к завышенному весу.

При расчете по допускаемым напряжениям опасным, или предельным, состоянием конструкции считается такое ее состояние, при котором наибольшее напряжение хотя бы в одной точке материала конструкции достигает опасной величины — предела текучести (для пластичного материала) или временного сопротивления (для хрупкого материала). Состояние всей остальной массы материала во внимание не принимается.

Между тем, при неравномерном распределении напряжений (например при изгибе, кручении) в статически неопределимых конструкциях, изготовленных из пластичных материалов, появление местных напряжений, равных пределу текучести, в большинстве случаев не является опасным для всей конструкции. Практика показывает, что при появлении местных пластических деформаций конструкция еще может удовлетворять предъявляемым к ней требованиям и для перехода ее в предельное состояние требуется дальнейшее возрастание нагрузки. Таким образом, в действительности конструкция обладает запасом прочности, большим, чем при расчете по допускаемым напряжениям.

В связи с этим недостатком метода расчета на прочность по допускаемым напряжениям возникла необходимость в новом подходе к оценке прочности конструкций. Был предложен метод расчета конструкций *по предельному состоянию*.

*Под предельным состоянием конструкции понимают такое ее состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внеш-*

ним воздействиям или перестает удовлетворять предъявляемым эксплуатационным требованиям.

Приведем некоторые примеры, характеризующие предельные состояния.

Испытания слабоармированных железобетонных балок показывают, что как только напряжения в арматуре достигают предела текучести, балка сильно и необратимо провисает (т. е. получает большие остаточные деформации), а также покрывается большим количеством трещин. Ясно, что дальнейшая эксплуатация такой балки невозможна, хотя для разрушения ее и требуется еще некоторое увеличение нагрузки. Таким образом, железобетонная балка переходит в предельное состояние, как только напряжения в арматуре достигают предела текучести.

Стальные стержневые конструкции могут превратиться в кинематически изменяемые после образования достаточного числа так называемых пластических шарниров, т. е. появления в стержнях таких сечений, во

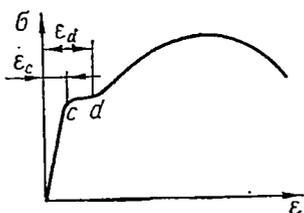


Рис. 485.

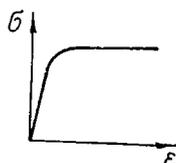


Рис. 486.

всех точках которых напряжения равны пределу текучести. Однако в некоторых типах конструкций этот процесс может протекать таким образом, что после образования первых пластических шарниров (здолго до превращения этих конструкций в кинематически изменяемые) дальнейшая экс-

плуатация их делается невозможной из-за возникших значительных остаточных деформаций. В этих случаях имеют место предельные состояния конструкций.

Различают три вида предельных состояний:

- первое предельное состояние — по несущей способности (прочности, устойчивости и выносливости при переменных напряжениях);
- второе предельное состояние — по развитию чрезмерных деформаций (прогибов, перекосов и др.);
- третье предельное состояние — по образованию или раскрытию трещин.

Расчеты по предельным состояниям широко применяются при проектировании строительных конструкций и сооружений. Все большее распространение методы этих расчетов получают и в машиностроении, причем и здесь сказывается их прогрессивная роль: они позволяют вскрыть резервы прочности, не используемые при расчетах по допускаемым напряжениям. Расчет по предельным состояниям дает возможность уменьшить вес конструкций.

Здесь будут рассмотрены некоторые примеры расчетов по несущей способности конструкций из пластичных материалов, которые имеют площадку текучести на диаграммах растяжения, сжатия и чистого сдвига.

Площадку текучести имеют диаграммы напряжений малоуглеродистых сталей и некоторых других материалов (рис. 485). Например, кривая на диаграмме напряжений алюминия (рис. 486) за пределами дейст-

вия закона Гука имеет очень слабый наклон и при расчетах ее можно принять за горизонтальную прямую.

Чтобы упростить расчеты, диаграммы растяжения, сжатия и чистого сдвига для пластичных материалов схематизируют так, что прямая закона Гука непосредственно сопрягается с горизонтальной прямой без плавного перехода (рис. 487). Этим самым принимается равенство между пределами пропорциональности и текучести. Длина горизонтального участка диаграммы не ограничивается, т. е. материал считается не упрочняющимся, идеально пластичным. Такая диаграмма носит название диаграммы Прандтля.

Указанная схематизация достаточно точна для материалов типа алюминия и вполне допустима для материалов, имеющих диаграммы с ограниченной длиной площадки текучести (рис. 485). Это вытекает из следующих соображений. При наличии такой площадки текучести, как, например, у мягких углеродистых сталей, величина относительного удлинения в начале упрочнения  $\epsilon_d$  в несколько раз превышает величину относительного удлинения  $\epsilon_p$  в начале появления пластической деформации. Поэтому даже при неравномерном начальном распределении напряжений (изгиб, кручение, наличие концентраторов), но дальнейшем последовательном распространении пластической зоны с выравниванием напряжений, предела текучести они достигнут одновременно по всему сечению элемента и раньше, чем начнется упрочнение материала в точках с наибольшей пластической деформацией. Таким образом, предельное состояние, определяемое значительной пластической деформацией, наступит до начала упрочнения материала и предельная нагрузка может быть вычислена по пределу текучести.

Для сложного напряженного состояния, как указывалось в главе VI, предложены различные теории перехода материала в пластическое состояние. Наиболее просто расчеты выполняются при использовании теории пластичности Сен-Венана. Согласно этой теории пластическое состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения — предела текучести при сдвиге:

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (18.1)$$

Приведенными выше положениями и будем пользоваться в дальнейшем.

### § 113. РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

При растяжении и сжатии напряжения по площади поперечного сечения стержня распределяются равномерно. Вследствие этого расчет на прочность статически определимых систем по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию дает один и тот же результат. В случае статически неопределимых систем результаты расчета будут различными.

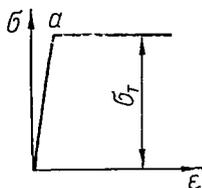


Рис. 487.

Покажем это на примерах.

Определим запас прочности трехстержневой подвески (рис. 488, а), нагруженной силой  $P$ . Площади поперечных сечений стержней одинаковы. Материал пластичный с пределом текучести  $\sigma_T$ .

Расчет по допускаемому напряжению. Задача один раз статически неопределимая. Ее решение рассмотрено в § 37. При  $F_1 = F_2$  коэффициент  $k = 1$  и тогда из формул (5.50) и (5.51) получим:

$$N_1 = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P; \quad (18.2)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P. \quad (18.3)$$

Очевидно, всегда  $N_1 > N_2 = N_3$ , т. е. большее усилие возникает в среднем стержне. Следовательно, в среднем стержне будет и наибольшее напряжение:

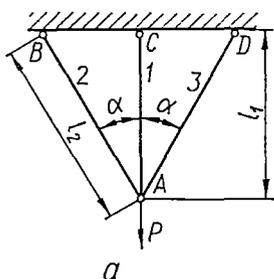
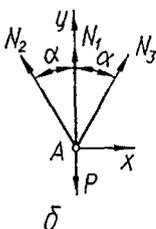


Рис. 488.



$$\sigma = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{P}{F}. \quad (18.4)$$

Запас прочности при расчете по допускаемому напряжению

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F \sigma_T}{P}. \quad (18.5)$$

Расчет по предельному состоянию. Предельное состояние конструкции будет характеризоваться исчерпанием несущей способности, которое наступит тогда, когда во всех стержнях напряжения достигнут предела текучести. Найдем предельную нагрузку для конструкции.

Так как напряжения в стержнях при упругой работе их неодинаковы (в среднем стержне больше, чем в крайних), то предела текучести напряжения достигнут не одновременно во всех стержнях. Вначале при нагрузке  $P_{1T}$  наступит пластическая деформация в среднем стержне. Усилие в нем

$$N_{1T} = \sigma_T F. \quad (18.6)$$

При этом согласно выражению (18.2)

$$P_{1T} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) \sigma_T F. \quad (18.7)$$

После появления пластического течения в среднем стержне конструкция еще сохраняет способность воспринимать возрастающую нагрузку. При этом усилие в среднем стержне остается постоянным и равно  $N_{1T}$ . Конструкция превращается в статически определимую, и усилия в крайних стержнях определяются из условия равновесия узла (рис. 489):

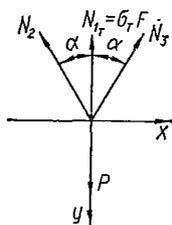


Рис. 489.

$$N_2 = N_3 = \frac{P - \sigma_T F}{2 \cos \alpha}. \quad (18.8)$$

Исчерпание несущей способности конструкции наступит, когда и в крайних стержнях напряжения достигнут предела текучести. Соответствующая этому моменту нагрузка

$$P_{\text{пр}} = \sigma_T F + 2F \sigma_T \cos \alpha = (1 + 2 \cos \alpha) \sigma_T F. \quad (18.9)$$

Запас прочности при расчете по предельному состоянию

$$n_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пр}}}{P} = \frac{(1 + 2 \cos \alpha) \sigma_T F}{P}. \quad (18.10)$$

Очевидно, что  $n_{\text{пр}} > n_T$ . Например, при  $\alpha = 30^\circ$   $\frac{n_{\text{пр}}}{n_T} = 1,19$ . Таким образом, расчет по предельному состоянию позволил обнаружить скрытый запас работоспособности конструкции.

Определим запас прочности трехступенчатого бруса (рис. 490), изготовленного из пластичного материала.

Расчет по допускаемому напряжению. Задача один раз статически неопределимая. Условие равновесия имеет следующий вид:

$$R_A + R_B - 2P = 0. \quad (18.11)$$

Деформации участков бруса должны удовлетворять условию

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,$$

или

$$-\frac{R_B a}{EF} - \frac{R_B a}{2EF} + \frac{R_A a}{EF} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$R_A = \frac{3}{2} R_B. \quad (18.12)$$

Подставляя значение  $R_A$  в выражение (18.11), найдем:

$$R_B = \frac{4}{5} P. \quad (18.13)$$

Реакция верхнего закрепления

$$R_A = \frac{6}{5} P. \quad (18.14)$$

Участки I и II бруса сжаты усилием  $N_I = N_{II} = \frac{4}{5} P$ , а участок III растянут усилием  $N_{III} = \frac{6}{5} P$ .

Наибольшие напряжения возникают в поперечных сечениях верхнего участка. Эти напряжения

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{F} = \frac{6P}{5F}. \quad (18.15)$$

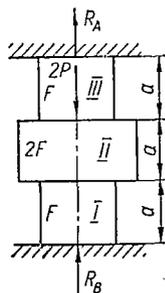


Рис. 490.

Запас прочности по пределу текучести

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{III}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sigma_{\tau} F}{P}. \quad (18.16)$$

Расчет по предельному состоянию. Прежде всего выясним, какое состояние для рассматриваемой системы будет предельным. Из выполненного выше расчета следует, что в пределах упругости  $\sigma_{III} > \sigma_I > \sigma_{II}$ . Поэтому при возрастании нагрузки предела текучести сначала достигнут напряжения в верхнем участке. Это состояние не приведет к исчерпанию несущей способности системы, так как нижние участки, находящиеся еще в упругом состоянии, будут сопротивляться возрастающей нагрузке. Усилие, воспринимаемое верхним участком, при этом будет постоянным и равным

$$N_{III_{np}} = R_A = \sigma_{\tau} F. \quad (18.17)$$

Участки *I* и *II* будут сжаты силой

$$N_I = N_{II} = R_B = 2P - R_A = 2P - \sigma_{\tau} F. \quad (18.18)$$

При дальнейшем возрастании нагрузок *P* пластическое состояние наступит в нижнем участке *I*, где напряжения больше, чем в участке *II*. Этот момент и будет соответствовать исчерпанию несущей способности системы, так как средний участок, находясь между пластически деформированными областями, не встретит возрастающего сопротивления перемещению.

Таким образом, предельное состояние системы характеризуется появлением текучести одновременно в верхнем и нижнем участках.

Предельную нагрузку найдем из условия

$$\sigma_{I_{np}} = \frac{N_{I_{np}}}{F} = \frac{2P_{np} - \sigma_{\tau} F}{F} = \sigma_{\tau}. \quad (18.19)$$

Отсюда

$$P_{np} = \sigma_{\tau} F. \quad (18.20)$$

Запас прочности системы, нагруженной силами *P*,

$$n_{np} = \frac{P_{np}}{P} = \frac{\sigma_{\tau} F}{P}. \quad (18.21)$$

Сопоставляя формулы (18.16) и (18.21), видим, что запас прочности оказался большим, чем в случае расчета по допускаемому напряжению.

#### § 114. РАСЧЕТЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении стержней с круглым поперечным сечением касательные напряжения в упругой области пропорциональны расстояниям точек сечения от оси стержня (рис. 491) и определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad (18.22)$$

а

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \quad (18.23)$$

Когда крутящий момент увеличивается, то пластические деформации появляются не сразу по всему поперечному сечению, а постепенно, по мере роста момента распространяются от наиболее удаленных точек к оси стержня. Вследствие этого расчеты на прочность по напряжениям в наиболее опасных точках и по предельному состоянию дают различные результаты даже в статически определимых системах. Расчет по предельному состоянию и в этом случае позволяет обнаружить дополнительные резервы прочности.

Рассматривая кручение в пластической области, будем предполагать, что зависимость между касательными напряжениями и относительным сдвигом для материала соответствует идеализированной диаграмме с неограниченным горизонтальным участком (рис. 492).

При некотором значении крутящего момента  $M_{\tau} = \tau_{\tau} W_{\rho}$  напряжения  $\tau_{\max}$  в наиболее удаленных точках сечения достигнут предела текучести. Вследствие роста напряжений во всех точках, лежащих ближе к оси, стержень сохранит способность воспринимать возрастающий крутящий момент. С дальнейшим увеличением последнего рост напряжений приостанавливается в тех точках, где они достигли предела теку-

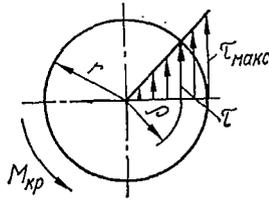


Рис. 491.

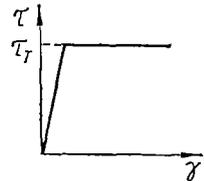


Рис. 492.

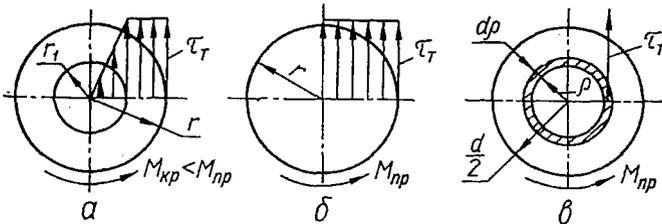


Рис. 493.

чести, в остальных же точках, образующих так называемое упругое ядро, напряжения возрастают. Эпюра напряжений, соответствующая этому состоянию стержня, приведена на рис. 493, а. Упругое ядро имеет радиус  $r_1$ .

Когда пластическая зона охватит все сечение, несущая способность стержня будет исчерпана, так как в дальнейшем он будет закручиваться без увеличения крутящего момента. Эпюра напряжений при этом состоянии стержня изображена на рис. 493, б.

Вычислим величину предельного крутящего момента  $M_{пр}$ , соответствующего исчерпанию несущей способности стержня.

Выделим в поперечном сечении элементарную площадку в виде кольца шириной  $dr$  (рис. 493, в). Величина площадки, на которой

действуют касательные напряжения  $\tau_r$ , составит  $dF = 2\pi\rho d\rho$ , а величина момента от этих напряжений относительно оси стержня будет  $\tau_r 2\pi\rho^2 d\rho$ .

Крутящий момент в сечении равен сумме всех элементарных моментов внутренних сил. Поэтому

$$M_{пр} = \tau_r 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 d\rho,$$

или

$$M_{пр} = \tau_r \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.24)$$

Величина

$$\frac{\pi d^3}{12} = W_p \text{ (пл)} \quad \bullet \quad (18.25)$$

называется *пластическим моментом сопротивления при кручении*. Тогда

$$M_{пр} = \tau_r W_p \text{ (пл)}. \quad (18.26)$$

Найдем отношение предельного момента  $M_{пр}$  и момента  $M_T$ , при котором в сечении впервые возникнут напряжения текучести:

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{W_p \text{ (пл)}}{W_p}. \quad (18.27)$$

Подставив значения  $W_p \text{ (пл)}$  и  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ , получим:

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{4}{3}, \quad (18.28)$$

или

$$M_{пр} = \frac{4}{3} M_T = 1,33 M_T. \quad (18.29)$$

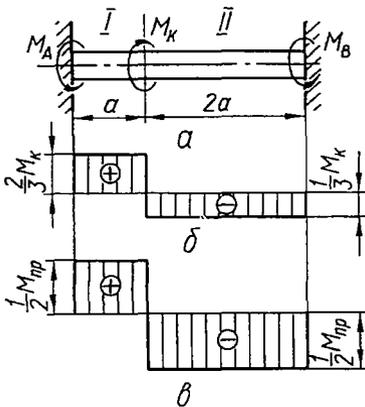


Рис. 494.

Таков скрытый запас работоспособности круглого стержня, обнаруживаемый при переходе от расчета по допускаемым напряжениям к расчету по предельному состоянию.

У скручиваемых стержней кольцевого поперечного сечения распределение напряжений в упругой стадии ближе к равномерному, поэтому разница в запасах прочности, обнаруживаемая при расчете по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям, будет меньшей.

В качестве примера рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, концы которого жестко зашпелены (рис. 494, а). В промежуточном сечении стержня приложен закручивающий момент  $M_k$ . Определим запас прочности при расчете по допускаемому напряжению и по предельному состоянию.

Расчет по допускаемому напряжению. Раскрываем статическую неопределимость задачи при упругом состоянии материала. Обозначив реактивные моменты через  $M_A$  и  $M_B$ , получим уравнение равновесия в таком виде:

$$M_A + M_B = M_k. \quad (18.30)$$

Деформации должны удовлетворять следующему условию:

$$\varphi = \varphi_I - \varphi_{II} = 0,$$

или

$$\frac{M_A a}{GJ_p} = \frac{M_B 2a}{GJ_p}. \quad (18.31)$$

Отсюда

$$M_A = 2M_B. \quad (18.32)$$

Решая совместно уравнения (18.30) и (18.32), найдем:

$$M_A = M_{I_{кр}} = \frac{2}{3} M_k; \quad M_B = M_{II_{кр}} = \frac{1}{3} M_k.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 494, б.

Наибольшие касательные напряжения будут на участке I:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{I_{кр}}}{W_p} = \frac{M_A}{W_p} = \frac{2M_k}{3 \frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32M_k}{3\pi d^3}.$$

Ведя расчет по допускаемым напряжениям, имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{32M_k}{3\pi d^3} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}. \quad (18.33)$$

Отсюда запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{3\pi d^3 \tau_T}{32M_k}. \quad (18.34)$$

Расчет по предельному состоянию. При увеличении скручивающего момента наибольшие напряжения на первом участке достигнут предела текучести и затем зона текучести будет распространяться к оси стержня. Когда текучесть охватит все сечение, реактивный момент  $M_A$  достигнет своего предельного значения. Его величина будет

$$M_{A_{пр}} = \tau_T W_p \text{ (пл)}, \quad (18.35)$$

или

$$M_{A_{пр}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.36)$$

Это состояние не будет предельным для всего стержня, так как второй участок, находящийся в упругом или в упруго-пластическом состоянии (с упругим ядром), сохранит способность оказывать сопротивление возрастающему моменту  $M_k$ . Несущая способность стержня будет исчерпана, когда и на втором участке зона пластичности распростра-

няется по всему сечению. Реактивный момент  $M_B$  при этом достигнет своего предельного значения

$$M_{B_{\text{пр}}} = \tau_T W_{\rho_{(n,l)}}, \quad (18.37)$$

или

$$M_{B_{\text{пр}}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.38)$$

Эпюра крутящих моментов в предельном состоянии стержня изображена на рис. 494, в.

Предельное значение скручивающего момента для всего стержня найдем из условия равновесия (18.30):

$$M_{\text{кпр}} = M_{A_{\text{пр}}} + M_{B_{\text{пр}}},$$

или с учетом выражений (18.36) и (18.38):

$$M_{\text{кпр}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{6}. \quad (18.39)$$

Запас прочности

$$n_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{кпр}}}{M_{\text{к}}} = \frac{\tau_T \pi d^3}{6 M_{\text{к}}}. \quad (18.40)$$

Таким образом, расчет по предельному состоянию показал, что запас прочности стержня значительно выше, чем тот, который дает расчет по допускаемому напряжению [формула (18.34)]. Отношение этих запасов прочности  $\frac{n_{\text{пр}}}{n_T} = 1,78$ .

Следует отметить, что расчеты по несущей способности вполне приемлемы при действии постоянных крутящих моментов.

## § 115. РАСЧЕТЫ ПРИ ИЗГИБЕ

В поперечных сечениях балки при изгибе нормальные напряжения в упругом состоянии материала распределяются неравномерно, линейно изменяясь по высоте балки (рис. 495, а). Наибольшие нормальные напряжения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках поперечного сечения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W}.$$

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям запас прочности определяется как отношение предела текучести материала к наибольшему напряжению. Этим самым за опасное принимается состояние балки, соответствующее достижению наибольшими нормальными напряжениями в опасных сечениях предела текучести. Такое состояние лишь условно можно считать опасным. Балка еще сохраняет способность воспринимать увеличивающийся изгибающий момент.

Определим величину предельного изгибающего момента в случае чистого изгиба. Рассмотрим вначале балку, поперечные сечения которой имеют две оси симметрии. Пределы текучести при растяжении и сжатии будем считать одинаковыми.

После появления текучести в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения при дальнейшем увеличении изгибающего момента пластическое состояние материала будет распространяться в направлении к нейтральной оси. До полного исчерпания несущей способности балки в ее поперечных сечениях будут две зоны — пластическая и упругая (рис. 495, б). Предельное состояние наступит, когда текучесть

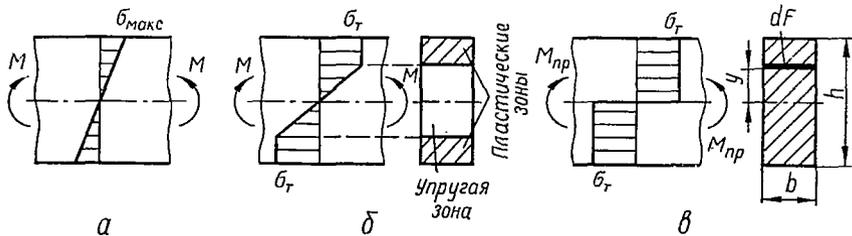


Рис. 495.

распространится по всему поперечному сечению, так как после этого дальнейшая деформация балки будет происходить без увеличения изгибающего момента. Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении для предельного состояния изображена на рис. 495, в. В рассматриваемом поперечном сечении образуется так называемый *пластический шарнир*, который передает постоянный момент, равный предельному изгибающему моменту.

Предельный момент можно вычислить как сумму моментов относительно нейтральной оси сил  $\sigma_T dF$  в поперечном сечении (рис. 495, в), т. е.

$$M_{np} = \int_F \sigma_T y dF = \sigma_T 2 \int_{\frac{F}{2}} y dF = \sigma_T 2S_{\max}, \quad (18.41)$$

где  $S_{\max}$  — статический момент площади половины поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Величину  $2S_{\max}$  принято называть *пластическим моментом сопротивления* и обозначать  $W_{пл}$ . Тогда

$$M_{np} = \sigma_T W_{пл}. \quad (18.42)$$

Для прямоугольного поперечного сечения, имеющего ширину  $b$  и высоту  $h$ ,

$$W_{пл} = \frac{bh^2}{4}. \quad (18.43)$$

Опасная величина изгибающего момента при расчете по допускаемым напряжениям

$$M_T = \sigma_T W.$$

$$\frac{M_{np}}{M_T} = \frac{W_{пл}}{W} \quad (18.44)$$

характеризует степень увеличения запаса прочности балки при переходе к расчету по предельному состоянию. В случае балки прямоугольного сечения

$$\frac{W_{пл}}{W} = \frac{bh^2}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5.$$

Для двутавровых прокатных балок в среднем  $\frac{W_{пл}}{W} = 1,18$ .

Если сечение балки имеет только одну ось симметрии в плоскости нагрузки (рис. 496), то в предельном состоянии нейтральная ось не будет проходить через центр тяжести поперечного сечения. Положение нейтральной оси определяется из равенства нулю суммы проекций на ось балки всех сил  $\sigma_T dF$ , распределенных по ее сечению:

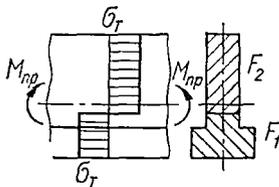


Рис. 496.

$$\int_F \sigma_T dF = \int_{F_1} \sigma_T dF + \int_{F_2} (-\sigma_T) dF = 0, \quad (18.45)$$

где  $F_1$  — площадь растянутой зоны сечения;

$F_2$  — площадь сжатой зоны.

Отсюда получаем:

$$F_1 - F_2 = 0, \text{ или } F_1 = F_2,$$

т. е. в предельном состоянии нейтральная ось сечения должна делить его площадь пополам.

Предельный изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_{np} &= \int_F \sigma_T y dF = \int_{F_1} \sigma_T y dF + \int_{F_2} (-\sigma_T) (-y) dF = \\ &= \sigma_T (S_p + S_{сж}), \end{aligned} \quad (18.46)$$

где  $S_p$  — статический момент растянутой зоны сечения относительно нейтральной оси;

$S_{сж}$  — абсолютная величина статического момента сжатой зоны сечения относительно той же оси.

В этом случае пластический момент сопротивления

$$\boxed{W_{пл} = S_p + S_{сж}} \quad (18.47)$$

Приведенные выше рассуждения относительно определения предельного состояния, эквивалентного образованию пластического шарнира в поперечном сечении балки, строго говоря, справедливы только для чистого изгиба, когда отсутствуют касательные напряжения. Опре-

деление предельного состояния с учетом поперечной силы более сложно. Этот вопрос здесь не выясняется.

Рассмотрим пример расчета балки на изгиб по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию без учета влияния поперечной силы.

Балка прямоугольного поперечного сечения, защемленная по концам, несет равномерно распределенную по длине нагрузку интенсивности  $q$  (рис. 497, а). Определить наибольшую интенсивность этой нагрузки, допустимую согласно расчету по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию при одном и том же запасе прочности  $n$ .

Расчет по допускаемым напряжениям. Балка статически неопределима. Ее расчет существенно упрощается благодаря симметрии. Используя методы главы XIV, легко находим лишние неизвестные и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 497, а). Наибольшее значение изгибающий момент имеет в опорных защемленных сечениях:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{12}. \quad (18.48)$$

При увеличении нагрузки  $q$  максимальные напряжения в этих же сечениях прежде всего достигнут предела текучести. Принимая запас прочности по пределу текучести равным  $n$ , найдем наибольшую допустимую интенсивность нагрузки из условия прочности:

$$\frac{M_{\max}}{W} = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (18.49)$$

Учитывая, что  $W = \frac{bh^3}{6}$ , а  $M_{\max} = \frac{q_1 l^2}{12}$ , получаем:

$$q_1 = 2 \frac{\sigma_T}{n} \cdot \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.50)$$

Расчет по предельному состоянию. После появления пластических деформаций в наиболее удаленных от нейтральной оси точках опорных сечений дальнейший рост нагрузки приведет к образованию в этих сечениях пластических шарниров, а изгибающий момент при этом достигнет предельного значения  $M_{\text{пр}}$ . Теперь уже балка будет работать как шарнирно опертая, к которой на опорах приложены постоянные моменты (рис. 497, б)

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T W_{\text{пл}} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \quad (18.51)$$

При дальнейшем росте нагрузки эти моменты сохраняют свое значение и задача становится статически определимой. В пролетных

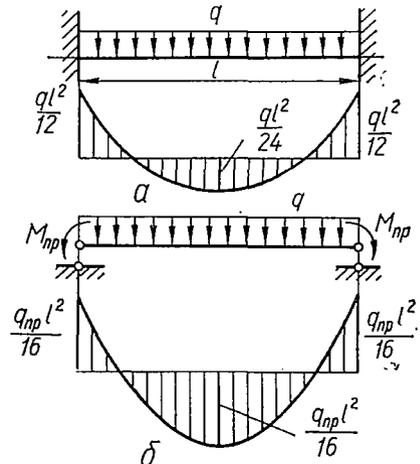


Рис. 497.

сечениях величины изгибающих моментов будут возрастать, пока по середине пролета момент не станет равным той же величине  $M_{пр}$ , т. е. пока не образуется пластический шарнир. При этом три пластических шарнира расположатся на одной прямой, поэтому дальнейший рост нагрузки невозможен. Несущая способность балки будет исчерпана.

Условие равенства изгибающих моментов в опорных сечениях и по середине пролета имеет вид

$$\frac{q_{пр} l^2}{8} - M_{пр} = M_{пр}, \quad (18.52)$$

откуда находим:

$$M_{пр} = \frac{q_{пр} l^2}{16}. \quad (18.53)$$

Приравнивая правые части формул (18.51) и (18.53), найдем:

$$q_{пр} = 4\sigma_T \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.54)$$

Принимая запас прочности равным  $n$ , получим наибольшую допустимую интенсивность нагрузки:

$$q_2 = \frac{q_{пр}}{n} = 4 \frac{\sigma_T}{n} \cdot \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.55)$$

Отношение наибольших допустимых нагрузок при расчетах по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям будет

$$\frac{q_2}{q_1} = 2.$$

Расчет по предельным состояниям — сравнительно новый и прогрессивный метод, позволяющий более правильно оценить действительную прочность конструкции, чем при расчете по допускаемым напряжениям, вскрыть дополнительные резервы прочности. Как указывалось выше, он получил широкое распространение при расчете строительных конструкций и находит все большее применение в машиностроении. Однако этот метод не следует считать универсальным, полностью заменяющим расчет по допускаемым напряжениям.

Расчет по предельному состоянию с определенным запасом прочности не гарантирует от появления местных пластических деформаций. Это еще допустимо при постоянных нагрузках, которые в большинстве случаев имеют место в строительных конструкциях. При переменных нагрузках, на которые чаще всего приходится рассчитывать машиностроительные конструкции, появление пластических деформаций во многих случаях недопустимо. Поэтому здесь следует вести расчет по допускаемым напряжениям.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

## § 116. УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ

Производя расчеты на прочность и жесткость при различных деформациях, мы полагали, что во время деформации любой системы имеет место единственная заранее известная форма равновесия. В действительности же в деформированном состоянии равновесие между внешними и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть не только устойчивым, но и неустойчивым.

Упругое равновесие будет *устойчивым*, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после удаления внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние. Упругое равновесие будет *неустойчивым*, если деформированное тело, будучи выведено из него каким-либо воздействием, приобретает стремление продолжать деформироваться в направлении данного ему отклонения и после удаления воздействия в исходное состояние не возвращается. Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое *критическим*, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

Устойчивость формы равновесия деформированного тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Например, если силы, сжимающие стержень, невелики, то первоначальная форма равновесия остается устойчивой (рис. 498, а). При возрастании величин приложенных сил будет достигнуто состояние безразличного равновесия, при котором наряду с прямолинейной формой стержня возможны смежные с ней слегка искривленные равновесия (штриховые линии на рис. 498, б).

При дальнейшем самом незначительном увеличении нагрузки характер деформации стержня резко меняется — стержень выпучивается (рис. 498, в), прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой. Это означает, что нагрузки превысили критическое значение.

*Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической и обозначается через  $P_{кр}$ .*

Можно утверждать, что достижение нагрузками критических значений равносильно разрушению конструкции, так как неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, что связано с практически неограниченным ростом деформаций и напряжений. Особая опасность разрушения вследствие потери устойчивости заключается в том, что

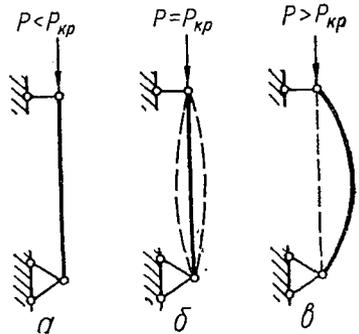


Рис. 498.

обычно она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность элемента еще далеко не исчерпана.

До момента наступления критического состояния в элементе упругие деформации по величине весьма незначительны и нарастание их происходит почти незаметно для глаза. Но с момента наступления критического состояния до момента разрушения остаточные деформации нарастают крайне быстро, и практически нет времени для принятия мер по предотвращению грозящей катастрофы. Таким образом, при расчете на устойчивость критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность. Для обеспечения определенного запаса устойчивости необходимо, чтобы удовлетворялось условие

$$P \leq [P]. \quad (19.1)$$

Здесь

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}, \quad (19.2)$$

где  $P$  — действующая нагрузка;

$n_y$  — коэффициент запаса устойчивости.

Следовательно, чтобы производить расчеты сжатых стержней на устойчивость, необходимо изучить способы определения критических нагрузок  $P_{кр}$ .

Из всего многообразия расчетов на устойчивость упругих систем мы подробно рассмотрим лишь случай потери устойчивости при сжатии длинного тонкого стержня, или так называемый *продольный изгиб*.

### § 117. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Предположим, что под действием силы  $P$ , величина которой несколько превышает критическую силу  $P_{кр}$ , стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 499, а) слегка изогнулся (рис. 499, б). Отнесем искривленную ось стержня к прямоугольной системе координат, выбрав начало координат в точке  $O$ .

Предположим, что критическая сила  $P_{кр}$  не вызывает в стержне напряжений, превышающих предел пропорциональности, и что рассматриваются только малые отклонения от прямолинейной формы. Тогда для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением (10.44) упругой линии:

$$EJ_{мин} \frac{d^2w(x)}{dx^2} = \pm M(x). \quad (19.3)$$

Здесь  $J_{мин}$  — наименьший момент инерции сечения стержня.

В расчет принимается наименьшая жесткость стержня  $EJ_{мин}$ , так как очевидно, что прогиб произойдет перпендикулярно к оси наименьшей жесткости, если на концах стержня шаровые шарниры.

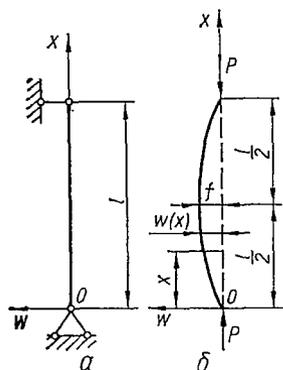


Рис. 499.

В отличие от поперечного изгиба при продольном в правой части этого уравнения следует ставить знак минус, так как абсолютная величина изгибающего момента

$$|M(x)| = |P\omega|, \quad (19.4)$$

а знак прогиба всегда противоположен знаку второй производной, т. е. знаки момента  $M(x)$  и второй производной  $\frac{d^2\omega}{dx^2}$  противоположны при любом направлении  $\omega$ .

Подставив в уравнение (19.3) выражение (19.4) для изгибающего момента, получим:

$$EJ_{\text{мин}} \frac{d^2\omega}{dx^2} = -P\omega, \quad (19.5)$$

или

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{P}{EJ_{\text{мин}}} \omega = 0. \quad (19.6)$$

Введя обозначение

$$\frac{P}{EJ_{\text{мин}}} = k^2, \quad (19.7)$$

перепишем уравнение (19.6) так:

$$\boxed{\frac{d^2\omega}{dx^2} + k^2\omega = 0.} \quad (19.8)$$

Мы получили однородное линейное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого, как известно, представляется гармонической функцией

$$\omega = A \sin kx + B \cos kx. \quad (19.9)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$\omega(x)|_{x=0} = 0; \quad \omega(x)|_{x=l} = 0.$$

Из первого граничного условия следует, что  $B = 0$ , т. е.

$$\omega(x) = A \sin kx. \quad (19.10)$$

Из второго условия получаем:

$$A \sin kl = 0. \quad (19.11)$$

Если допустить, что  $A = 0$ , то прогиб будет тождественно равен нулю, т. е.

$$\omega(x) \equiv 0.$$

Это решение соответствует одной из возможных форм равновесия сжатого стержня, а именно — прямолинейной форме. Нас же интересует значение силы  $P$ , при которой становится возможной другая форма

равновесия — криволинейная. Так как  $A \neq 0$ , то при искривленной форме стержня должно выполняться равенство

$$\sin kl = 0.$$

Корень этого уравнения  $kl$  может иметь бесконечное множество значений:  $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$ , т. е.

$$kl = n\pi,$$

где  $n$  — произвольное целое число.

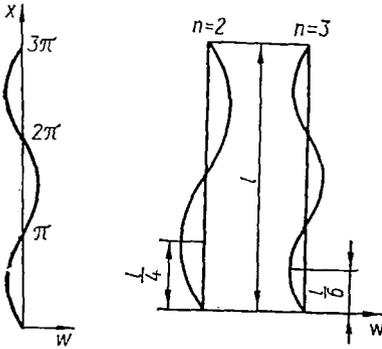


Рис. 500.

Рис. 501.

Однако первый корень  $kl = 0$  отпадает, так как он не соответствует исходным данным задачи. Таким образом,

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \quad (19.12)$$

Тогда из уравнения (19.7) получим выражение для сжимающей силы:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\text{мин}}}{l^2}. \quad (19.13)$$

Уравнение (19.13) представляет собой формулу, впервые полученную Эйлером.

Практически нас интересует наименьшее значение продольной сжимающей силы, при котором становится возможным продольный изгиб. Наименьшее значение критической силы  $P_{\text{кр}}$  получим при  $n = 1$  и  $kl = \pi$ :

$$\boxed{P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{l^2}}. \quad (19.14)$$

Возвращаясь к уравнениям (19.10) и (19.12), получим уравнение изогнутой оси стержня при малых деформациях:

$$\omega(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Наибольший прогиб стержня  $\omega_{\text{макс}} = f$  при  $\sin \frac{n\pi x}{l} = 1$ . Тогда  $\omega(x) = \omega_{\text{макс}} = A$ .

Следовательно, уравнение упругой линии сжатого стержня имеет вид

$$\omega = f \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (19.15)$$

График этой зависимости показан на рис. 500.

Максимум  $\omega$  имеет место при таком значении  $x$ , для которого

$$\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

т. е.

$$\frac{d\omega}{dx} = f \cdot \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ или } \cos \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Наименьшее значение аргумента, при котором косинус равен нулю, будет  $\frac{\pi}{2}$ , значит,

$$\frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } x = \frac{l}{2n}. \quad (19.16)$$

Если  $n = 1$ , то  $x = \frac{l}{2}$ , а максимум  $\omega$  имеет место посередине стержня, что соответствует так называемому основному случаю, показанному на рис. 499.

Из соотношения (19.16) или из уравнения (19.15) и рис. 501 следует, что  $n$  представляет собой число полуволн синусоиды, располагающихся на длине изогнутого стержня.

### § 118. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Выше был рассмотрен так называемый основной случай нагружения и закрепления концов сжатого стержня — стержня с шарнирно опертыми концами. Как было указано, после потери устойчивости на длине стержня укладывается только одна полуволна ( $n = 1$ ).

Рассмотрим другие случаи закрепления концов стержня:

1. Стержень длиной  $l$  заделан одним концом и сжат продольной силой, приложенной к свободному концу (рис. 502, а). Сравнивая рис. 502, а и б, видим, что изогнутая ось стержня, заделанного одним концом, находится в таких же условиях, как и верхняя половина стержня длиной  $2l$  с шарнирно закрепленными концами. Таким образом, критическая сила для стержня с одним заделанным, а другим свободным концом будет такой же, как и для стержня с шарнирно опертыми концами при длине  $L = 2l$ , т. е.

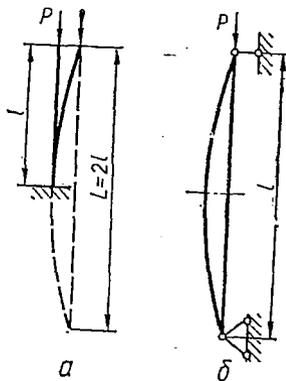


Рис. 502.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{4l^2}. \quad (19.17)$$

При этом изогнутая ось стержня (рис. 502, а) имеет вид половины полуволны синусоиды.

2. Стержень длиной  $l$ , у которого оба конца жестко заделаны (рис. 503). После потери устойчивости стержня вследствие симметрии

средняя часть его длиной  $\frac{l}{2}$  будет работать в тех же условиях, что и стержень при шарнирно опертых концах. При этом образуются две полуволны: средняя длиной  $L = \frac{l}{2}$  и две крайних половинки полу-волны длиной  $\frac{l}{2}$ .

Критическую силу в этом случае находим из уравнения (19.14) при  $L = \frac{l}{2}$ :

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ_{мин}}{l^2}. \quad (19.18)$$

3. Стержень длиной  $l$  заделан одним концом и шарнирно оперт на другом (рис. 504). После потери устойчивости правая часть  $CB$  стержня имеет вид полуволны синусоиды. Из сравнения рис. 504 и 502, б находим, что участок  $CB$  длиной  $L = 0,7l$  находится в таких же условиях, как и стержень с шарнирно закрепленными концами. Значит,

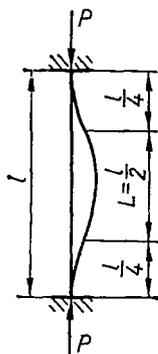


Рис. 503.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(0,7l)^2}. \quad (19.19)$$

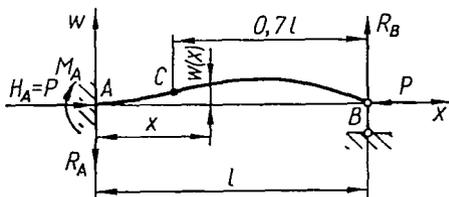


Рис. 504.

Соотношения (19.14), (19.17)—(19.19) можно объединить в одну формулу

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(\nu l)^2}, \quad (19.20)$$

где  $\nu l = l_{пр}$  — приведенная длина стержня;

$l$  — фактическая длина стержня;

$\nu$  — коэффициент приведения длины.

Таким образом, различные случаи опирания и нагружения стержня приводятся к основному случаю введением в формулу для  $P_{кр}$  так называемой приведенной длины  $l_{пр} = \nu l$ . Это понятие впервые было введено Ф. С. Ясинским.

Из формулы Эйлера (19.20) видно, что критическая нагрузка зависит от наименьшей жесткости  $EJ_{\text{мин}}$ , длины стержня  $l$  и коэффициента  $\nu$ .

На рис. 505 приведены значения  $\nu$  для рассмотренных стержней. Однако такие расчетные схемы на практике редко встречаются в чистом виде. Чаще закрепления концов бывают упругими. Наиболее распространены следующие случаи упругого закрепления концов:

- а) один конец стержня жестко заделан, а другой упруго оперт;
- б) оба конца упруго заделаны.

Рассмотрим первый случай (рис. 506). После потери устойчивости упруго опертый конец стойки перемещается в вертикальном направлении на величину  $f_B$ , при этом возникает упругая реакция  $R_B$ . Эта

реакция пропорциональна отклонению  $f_B$ :

$$R_B = cf_B,$$

где  $c$  — коэффициент упругости опоры  $B$ .

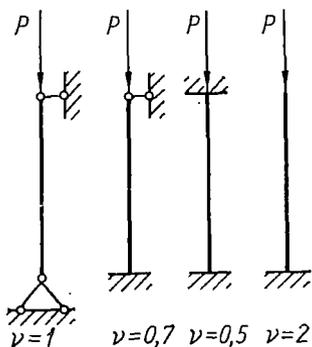


Рис. 505.

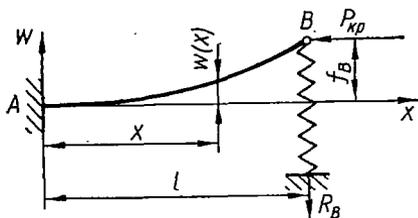


Рис. 506.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии сжатого стержня после потери устойчивости:

$$EJ_{\text{мин}} \frac{d^2w}{dx^2} = P_{\text{кр}}(f_B - w) - cf_B(l - x). \quad (19.21)$$

Разделив почленно на  $EJ_{\text{мин}}$  и обозначив, как обычно,

$$\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\text{мин}}} = k^2,$$

получим:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = k^2(f_B - w) - \frac{cf_B}{EJ_{\text{мин}}}(l - x),$$

или

$$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = k^2f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{\text{кр}}}\right) + k^2 \frac{cf_B}{P_{\text{кр}}}x. \quad (19.22)$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения будет

$$w = C \sin kx + D \cos kx + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}}\right) + \frac{c}{P_{\text{кр}}}f_B x. \quad (19.23)$$

Для определения постоянных интегрирования и критической нагрузки имеем такие граничные условия:

при  $x = 0$

$$\omega(0) = \omega_A = 0; \quad (19.24)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \Theta(0) = \Theta_A = 0; \quad (19.25)$$

при  $x = l$

$$\omega(l) = \omega_B = f_B. \quad (19.26)$$

Из граничных условий (19.24) находим:

$$D = -f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right).$$

Чтобы применить граничное условие (19.25), вычислим производную от перемещения  $\omega$ :

$$\frac{d\omega}{dx} = kC \cos kx - kD \sin kx + \frac{c}{P_{кр}} f_B,$$

откуда при  $x = 0$  находим:

$$kC + \frac{c}{P_{кр}} f_B = 0,$$

или

$$C = -\frac{c}{kP_{кр}} f_B.$$

Подставив полученные выражения для произвольных постоянных в формулу (19.23), получим окончательное уравнение изогнутой оси сжатого стержня:

$$\begin{aligned} \omega(x) = & -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kx - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kx + \\ & + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) + \frac{cf_B}{P_{кр}} x. \end{aligned} \quad (19.27)$$

Граничное условие (19.26) используем, чтобы получить определяющее уравнение для нахождения критической нагрузки. Положив в уравнении (19.27)  $x = l$ , находим, что

$$\begin{aligned} \omega(l) = & -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kl - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kl + \\ & + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) + \frac{c}{P_{кр}} f_B l = f_B, \end{aligned}$$

или

$$-\frac{c}{kP_{кр}} \sin kl - \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kl = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 - \frac{P_{кр}}{cl}\right). \quad (19.28)$$

Если это уравнение будет решено, т. е. определен наименьший корень  $k$ , то тем самым будет найдено значение критической нагрузки, так как

$$P_{кр} = k^2 EJ_{мин}.$$

Рассмотрим два предельных случая. Положив  $c = 0$ , получим:

$$\operatorname{tg} kl = \infty; \text{ т. е. } kl = \frac{\pi}{2},$$

и приходим к такой расчетной схеме стержня, когда один конец (левый) жестко заделан, а другой (правый) свободен. Величина критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{4l^2}.$$

Положив  $c = \infty$  (очень жесткая опора), получим определяющее уравнение

$$\operatorname{tg} kl = kl; \text{ т. е. } kl = 4,493 = \frac{\pi}{0,7}.$$

Величина критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(0,7l)^2},$$

что дает формулу для стержня, один конец которого заделан, а другой шарнирно оперт.

Таким образом, если коэффициент упругости опоры  $c$  будет меняться от нуля до бесконечности, то это может быть учтено коэффициентом приведения  $\nu$ , который будет при этом соответственно изменяться от 2 до 0,7.

## § 119. ПОНЯТИЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПРЕВЫШАЮЩИХ ПРЕДЕЛ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому воспользоваться этой формулой можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, т. е. пока критическое напряжение (напряжение сжатия, соответствующее критической силе) не превышает предела пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}. \quad (19.29)$$

Действительно, если прямолинейная форма стержня остается устойчивой и при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, то дифференциальное уравнение (19.3), предполагающее справедливость закона Гука, уже не будет пригодно для описания изгиба при потере устойчивости.

Выведем формулу для критического напряжения  $\sigma_{кр}$ . В соответствии с выражениями (19.29) и (19.20)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{F(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2}. \quad (19.30)$$

Здесь  $i^2 = i_{мин}^2 = \frac{J_{мин}}{F}$  — квадрат наименьшего из главных радиусов инерции стержня;

$F = F_{бр}$  — площадь брутто поперечного сечения стержня.

Введя безразмерную величину

$$\lambda = \frac{\nu l}{i}, \quad (19.31)$$

называемую *гибкостью стержня*, окончательно получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (19.32)$$

т. е. критическое напряжение стержня зависит только от упругих свойств материала (модуля упругости  $E$ ) и гибкости стержня ( $\lambda$ ).

Функциональная зависимость (19.32) представляет собой видоизменение формулы Эйлера. В системе координат  $\sigma_{кр} - \lambda$  эта зависимость может быть представлена гиперболической кривой, называемой *гиперболой Эйлера*. В качестве примера приведем такой график (рис. 507) для стержня из стали марки Ст. 3, для которой модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , предел текучести  $\sigma_{т} = 2400 \text{ кг/см}^2$ , а предел пропорциональности  $\sigma_{пц} = 2000 \text{ кг/см}^2$ .

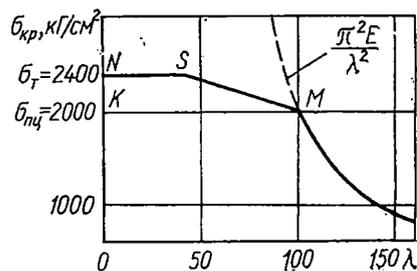


Рис. 507.

График показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжение стремится

к нулю, и наоборот, по мере приближения гибкости стержня к нулю критическое напряжение стремится к бесконечности.

Однако из условия (19.29) применимости формулы Эйлера в соответствии с формулой (19.32) имеем:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

и, следовательно,

$$\lambda_{пред} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (19.33)$$

Значит, формула Эйлера становится непригодной при гибкости стержня, меньшей предельного значения  $\lambda_{пред}$ , зависящего только от свойств материала, т. е. в рассматриваемом случае при

$$\lambda < \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100.$$

То же можно получить и графически. Если на оси ординат ( $\sigma_{кр}$ ) отложить величину предела пропорциональности ( $\sigma_{пн} = 2000 \text{ кг/см}^2$ ) и провести из полученной точки  $K$  прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку  $M$ , абсцисса которой и есть  $\lambda_{пред}$ .

Слева от точки  $M$  гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений, большие предела пропорциональности, т. е. не соответствующие условиям ее применимости.

Однако явление продольного изгиба продолжает существовать и за пределом упругости. Опытным путем было установлено, что действительные критические напряжения для стержней средней и малой гибкости ( $\lambda < \lambda_{пред}$ ) ниже значений, определенных по формуле Эйлера. Таким образом, в этом случае формула Эйлера дает завышенные значения критической силы, т. е. всегда переоценивает действительную устойчивость стержня. Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости, не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого количества опытных данных.

Ф. С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней, в результате чего составил таблицу критических напряжений в зависимости от гибкости для ряда материалов и предложил простую эмпирическую формулу для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (19.34)$$

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов даны в табл. 20.

Таблица 20

Материал	$\lambda_{пред}$	$a$	$b$
Ст. 2, Ст. 3 . . . . .	100	3100	11,4
Ст. 5 . . . . .	100	4640	32,6
Сталь 40 . . . . .	90	3210	11,6
Кремнистая сталь . . . . .	100	5890	38,2
Дерево (сосна) . . . . .	110	293	1,94
Чугун . . . . .	80	7760	120

Для чугуна пользуются параболической зависимостью

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (19.35)$$

где  $c = 0,53$ .

По этим данным для каждого материала при  $0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$  можно построить график зависимости критических напряжений от гибкости стержня.

При некотором значении гибкости (обозначим его  $\lambda_0$ ) величина  $\sigma_{\text{кр}}$ , вычисленная по формуле (19.34) или (19.35), становится равной предельному напряжению при сжатии, а именно: для пластичных материалов

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}},$$

а для хрупких материалов

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{в}}. \quad (19.36)$$

Стержни, у которых  $\lambda < \lambda_0$ , называются *стержнями малой гибкости*. Их рассчитывают только на прочность.

В рассматриваемом примере (рис. 507) часть графика критических напряжений за пределом пропорциональности (при  $40 < \lambda < 100$ ) представляет собой слегка наклоненную прямую  $SM$ , а часть (при  $0 < \lambda < 40$ ) — горизонтальную линию  $NS$ .

Следовательно, график  $\sigma_{\text{кр}} = f(\lambda)$  для стали Ст. 3 состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при  $\lambda > 100$ , наклонной прямой при  $40 < \lambda < 100$  и почти горизонтальной прямой при  $\lambda < 40 = \lambda_0$ . Наклонная прямая  $SM$  соответствует напряжениям между пределом пропорциональности и пределом текучести. Горизонтальная прямая  $SN$  соответствует напряжению, равному пределу текучести.

## § 120. РАСЧЕТЫ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОМОЩИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УМЕНЬШЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Можно считать, что центрально сжатые стержни теряют свою несущую способность от потери устойчивости раньше, чем от потери прочности, так как критическое напряжение всегда меньше предела текучести или предела прочности:

$$\sigma_{\text{кр}} < \sigma^0,$$

где  $\sigma^0 = \sigma_{\text{т}}$  — для пластичных материалов;

$\sigma^0 = \sigma_{\text{в}}$  — для хрупких материалов.

Необходимо напомнить, что для стержней малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ) трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы стержня, как это имеет место для стержней средней и большой гибкости. Несущая способность стержней малой гибкости определяется прочностью материала.

Критическое напряжение для центрально сжатых стержней средней и большой гибкости представляет, пожалуй, большую опасность, чем предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких материалов при простом растяжении. Очевидно, что при практическом решении вопроса об устойчивости стержня нельзя допустить возникновения в нем критического напряжения, а следует принять соответствующий запас устойчивости.

Чтобы получить допускаемое напряжение на устойчивость, нужно выбрать коэффициент запаса  $n_y$ . Тогда

$$\boxed{[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}} \quad (19.37)$$

Коэффициент запаса на устойчивость всегда принимают несколько больше основного коэффициента запаса на прочность ( $n_y > n_o$ ). Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств, неизбежных на практике (эксцентриситет приложения сжимающих сил, начальная кривизна и неоднородность стержня), способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах деформации эти обстоятельства почти не сказываются. Коэффициент запаса устойчивости для сталей выбирают в пределах 1,8—3,0; для чугуна — в пределах 5,0—5,5; для дерева — 2,8—3,2. Заметим, что меньшие значения  $n_y$  принимают при большей гибкости.

Допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$  и допускаемое напряжение на прочность при сжатии  $[\sigma_-] = \frac{\sigma^o}{n_o}$  взаимно связаны. Составим их отношение:

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \cdot \frac{n_o}{\sigma^o}, \text{ или } [\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma^o} \cdot \frac{n_o}{n_y} [\sigma_-]. \quad (19.38)$$

Обозначив

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma^o} \cdot \frac{n_o}{n_y} = \varphi,$$

получим:

$$\boxed{[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-]} \quad (19.39)$$

Здесь  $\varphi$  — коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость. Этот коэффициент для каждого материала можно вычислить при всех значениях гибкости  $\lambda$  и представить в виде таблицы или графика зависимости  $\varphi$  от  $\lambda$ . Значения коэффициента  $\varphi$  для сталей, чугуна и дерева приведены в табл. 21. Пользуясь аналогичными таблицами, можно достаточно просто произвести расчет стержней на устойчивость.

Составим условие устойчивости сжатых стержней:

$$\sigma < [\sigma]_y. \quad (19.40)$$

Так как

$$\sigma = \frac{N}{F_{6p}}, \text{ а } [\sigma]_y = \varphi [\sigma_-],$$

то условие устойчивости принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{F_{6p}} \leq \varphi [\sigma_-]. \quad (19.41)$$

Гибкость $\lambda$	Коэффициент $\varphi$ для			
	Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Ст. 5	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

При расчете на устойчивость местные ослабления сечения практически не изменяют величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь  $F_{бр}$  поперечного сечения.

Рассмотрим два вида расчета на устойчивость сжатых стержней — проверочный и проектировочный.

**Проверочный расчет сжатых стержней.** Порядок проверочного расчета на устойчивость при использовании таблицы коэффициентов  $\varphi$  следующий:

1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения, определяем наименьший осевой момент инерции  $J_{мин}$ , площадь  $F_{бр}$ , вычисляем минимальный радиус инерции

$$i_{мин} = \sqrt{\frac{J_{мин}}{F_{бр}}}$$

и гибкость

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{мин}};$$

2) по таблице находим коэффициент  $\varphi$  и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость по формуле

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-];$$

3) сравниваем действительное напряжение  $\sigma = \frac{P}{F_{бр}}$  с допускаримым напряжением  $[\sigma]_y$  на устойчивость:

$$\sigma \leq [\sigma]_y.$$

*Пример 75.* Произвести проверку устойчивости сжатой деревянной колонны (рис. 508) квадратного поперечного сечения ( $a = 15 \text{ см}$ ) длиной  $l = 5 \text{ м}$ , если основное допускаримое напряжение  $[\sigma_-] = 100 \text{ кг/см}^2$ , а сжимающая сила  $P = 10 \text{ Т}$ .

Определяем следующие величины:  
площадь —

$$F = a^2 = 225 \text{ см}^2;$$

момент инерции —

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4210 \text{ см}^4;$$

радиус инерции —

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 4,34 \text{ см};$$

приведенную длину —

$$l_{пр} = \nu l = 0,7l = 0,7 \cdot 5 = 3,5 \text{ м} = 350 \text{ см};$$

гибкость —

$$\lambda = \frac{\nu l}{i} = \frac{350}{4,34} = 80,6.$$

По табл. 21 интерполяцией находим, что

$$\varphi = 0,48 - \frac{0,48 - 0,38}{10} \cdot 0,6 = 0,474.$$

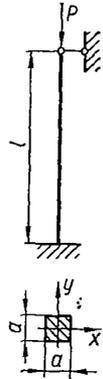


Рис. 508.

Тогда

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-] = 0,474 \cdot 100 = 47,4 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10\,000}{225} = 44,4 \text{ кг/см}^2.$$

Так как  $\sigma = 44,4 \text{ кг/см}^2 < 47,4 \text{ кг/см}^2$ , то устойчивость колонны обеспечена.

**Проектировочный расчет.** В расчетной формуле на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{бр}} \leq [\sigma_-], \text{ или } F_{бр} \geq \frac{P}{\varphi [\sigma_-]}, \quad (19.42)$$

имеются две неизвестные величины — коэффициент  $\varphi$  и искомая площадь брутто  $F_{бр}$  поперечного сечения. Поэтому при подборе сечений приходится пользоваться методом последовательных приближений, варьируя величину коэффициента  $\varphi$ . Обычно в первой попытке берут  $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$ . Принимая какое-либо из этих значений  $\varphi_1$ , определяют требуемую площадь  $F_{бр}$  и подбирают сечение. Подбранное сечение проверяют и устанавливают фактическое значение  $\varphi'_1$ . Если  $\varphi'_1$  значительно отличается от  $\varphi_1$ , то и напряжение будет отличаться от допускаримого. Тогда следует повторить расчет, т. е. сделать вторую попытку, приняв среднее по величине значение между  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$ :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}. \quad (19.43)$$

В результате второй попытки устанавливают  $\varphi'_2$ . Если требуется третья попытка, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$$

и т. д. Обычно при подборе сечений требуется не более двух-трех попыток.

*Пример 76.* Подобрать по сортаменту двутавровое поперечное сечение стержня длиной 5 м, находящегося под действием центральной сжимающей нагрузки 32 Т. Оба конца стержня заземлены. Материал — Ст. 3. Основное допускаемое напряжение  $[\sigma_-] = 1600 \text{ кг/см}^2$ .

Определяем расчетную длину стержня:

$$l_{\text{пр}} = \nu l = 0,5 \cdot 500 = 250 \text{ см.}$$

Подбираем поперечное сечение путем последовательных приближений.

Первая попытка: принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ ; требуемая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{P}{\varphi [\sigma_-]} = \frac{32000}{0,5 \cdot 1600} = 40 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 27 с площадью  $F = 40,2 \text{ см}^2$  и минимальным радиусом инерции  $i_{\text{мин}} = i_y = 2,54 \text{ см}$ . Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,54} = 98,5.$$

По табл. 21 при линейной интерполяции

$$\varphi'_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 8,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Перейдем ко второму приближению, приняв  $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557$ . Необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$F = \frac{P}{\varphi [\sigma_-]} = \frac{32000}{0,557 \cdot 1600} = 36 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 24а с площадью  $F = 37,5 \text{ см}^2$  и минимальным радиусом инерции  $i_{\text{мин}} = i_y = 2,63 \text{ см}$ . Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,63} = 95.$$

По табл. 21 находим коэффициент  $\varphi'_2$ :

$$\varphi'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Переходим к третьему приближению, приняв

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Вычисляем необходимую площадь:

$$F = \frac{32000}{0,60 \cdot 1600} = 33,3 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 24 с площадью  $F = 34,8 \text{ см}^2$  и минимальным радиусом инерции  $i_{\text{мин}} = i_y = 2,37 \text{ см}$ . Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

Для  $\lambda = 105$  коэффициент

$$\varphi = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 5 = 0,56.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{32\,000}{0,56 \cdot 34,8} = 1640 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{1640 - 1600}{1600} \cdot 100\% \approx 2,5\%.$$

Окончательно принимаем для сечения стержня двутавр № 24.

### § 121. О ВЫБОРЕ МАТЕРИАЛА И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для стержней большой гибкости ( $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ ), когда критические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала, модуль упругости  $E$  является единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости. В этом случае нецелесообразно применять сталь повышенной прочности, так как модули  $E$  для различных сталей практически одинаковы.

Для стержней малой гибкости применение специальных высокопрочных сталей целесообразно, так как в этом случае повышение предела текучести стали сопряжено с увеличением критических напряжений и, следовательно, с увеличением запаса устойчивости.

С экономической точки зрения наиболее рациональной будет такая форма поперечного сечения стержня, при которой величина наименьшего радиуса инерции  $i_{\text{мин}}$  при определенной площади является наибольшей. Для удобства сравнения различных сечений введем безразмерную характеристику

$$\frac{i_{\text{мин}}}{\sqrt{F}} = \xi,$$

которую можно назвать удельным радиусом инерции. Ниже приведены значения  $\xi$  для некоторых сечений:

	$\xi$
Трубчатое сечение ( $\alpha^1 = 0,95 \div 0,8$ ) . . . . .	2,25—1,64
Трубчатое сечение ( $\alpha = 0,7 \div 0,8$ ) . . . . .	1,2 —1,00
Уголок . . . . .	0,5 —0,3
Двутавр . . . . .	0,41—0,27
Швеллер . . . . .	0,41—0,29
Квадрат . . . . .	0,289
Круг . . . . .	0,283
Прямоугольник ( $h = 2b$ ) . . . . .	0,204

<sup>1</sup>  $\alpha = \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{нар}}}$ .

Анализ данных показывает, что наиболее рациональными являются трубчатые тонкостенные сечения. Столь же рациональны и коробчатые тонкостенные сечения. Однако следует заметить, что при проектировании тонкостенных трубчатых и коробчатых сечений необходимо предусматривать постановку диафрагм (ребер жесткости) на определенных расстояниях по длине стержня. Эти диафрагмы препятствуют появлению местных деформаций (короблений стенок). Наименее рациональными являются сплошные прямоугольные сечения.

При расчете сжатых стержней на устойчивость следует стремиться к тому, чтобы они были равноустойчивыми во всех направлениях. Для этого проектировать сечения надо так, чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми. Трубчатые сечения рациональны и с этой точки зрения. Этому критерию удовлетворяют также квадратные и круглые сечения. Нерационально применять двутавровые сечения и сечения в виде прямоугольника.

Однако, если приведенная длина в обеих главных плоскостях будет различна, то и главные моменты инерции также следует проектировать разными, с тем чтобы величины гибкостей стержня в обеих главных плоскостях были одинаковыми или хотя бы близкими между собой. Если не удастся сделать гибкости одинаковыми, то расчет следует вести по максимальной гибкости.

## § 122. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Изгиб прямого бруса называется продольно-поперечным, если в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты как от продольных, так и от поперечных нагрузок (рис. 509). При расчете на про-

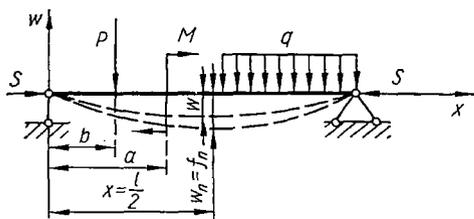


Рис. 509.

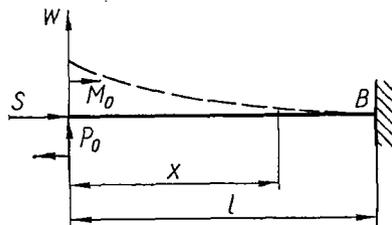


Рис. 510.

дольно-поперечный изгиб изгибающие моменты в поперечных сечениях вычисляют с учетом прогибов оси бруса:

$$|M_n| = |M| + |S w_n|, \quad (19.44)$$

где  $M_n$  — полный изгибающий момент;

$S w_n$  — дополнительный изгибающий момент от действия осевой силы  $S$ .

Вычисление полного изгибающего момента  $M_n$  осложняется тем, что в данном случае принцип независимости действия сил неприменим. Действительно, полный прогиб  $w_n$  можно рассматривать состоящим из прогиба  $w$ , возникающего от действия одной только поперечной нагрузки, и дополнительного прогиба  $w_n - w$ , вызванного силой

5. Совершенно очевидно, что, если осевые силы сжимающие, полный прогиб больше прогиба от одной только поперечной нагрузки.

**Точный способ расчета.** Рассмотрим точный метод определения величины изгибающего момента  $M_n$ . Пусть на консольную балку (рис. 510) действуют сжимающая сила  $S$  и поперечные нагрузки: момент  $M_0$  и сила  $P_0$ , приложенные на свободном конце, совпадающем с началом координат.

В этом случае дифференциальное уравнение (10.44) упругой линии запишется так:

$$\frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} = \frac{M_n(x)}{EJ}, \quad (19.45)$$

где  $M_n(x)$  — полный изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки.

При составлении выражения  $M_n(x)$ , подставляемого в правую часть уравнения (19.45), для изгибающих моментов, вызванных поперечными нагрузками, сохраняется обычное правило знаков, а момент от сжимающей силы  $S$  записывается со знаком минус, так как  $\frac{d^2\omega}{dx^2}$  и  $\omega$  всегда имеют противоположные знаки. Для нашего случая выражение (19.44) нужно представить так:

$$M_n(x) = M(x) - S\omega_n = M_0 + P_0x - S\omega_n. \quad (19.46)$$

Продифференцировав выражение (19.46) по  $x$  дважды, получим:

$$\frac{d^2M_n(x)}{dx^2} = -S \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2}. \quad (19.47)$$

Подставив сюда выражение для  $\frac{d^2\omega_n}{dx^2}$  из уравнения (19.45), запишем:

$$\frac{d^2M_n(x)}{dx^2} = -S \frac{M_n(x)}{EJ}. \quad (19.48)$$

Введя обозначение

$$\frac{S}{EJ} = k^2, \quad (19.49)$$

получим дифференциальное уравнение для изгибающих моментов:

$$\frac{d^2M_n(x)}{dx^2} + k^2M_n(x) = 0. \quad (19.50)$$

Общий интеграл уравнения (19.50) будет следующим:

$$M_n(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (19.51)$$

Продифференцировав уравнение (19.51) по  $x$ , получим уравнение для поперечных сил:

$$Q_n(x) = -Ak \sin kx + Bk \cos kx. \quad (19.52)$$

Физический смысл постоянного интегрирования установим, рассматривая начальные условия:

при  $x = 0$

$$M_{\Pi}(0) = A; \quad (19.53)$$

$$Q_{\Pi}(0) = Bk. \quad (19.54)$$

Эти начальные значения  $M_{\Pi}$  и  $Q_{\Pi}$  назовем начальными параметрами и обозначим через  $M_{\Pi}$  и  $Q_{\Pi}$  соответственно. Тогда уравнение изгибающих моментов при продольно-поперечном изгибе примет вид

$$M_{\Pi}(x) = M_{\Pi} \cos kx + \frac{Q_{\Pi}}{k} \sin kx. \quad (19.55)$$

Чтобы получить общее уравнение для изгибающих моментов при действии сжимающей силы и различных сосредоточенных или распределенных внешних нагрузок, можно применить метод начальных параметров. Действительно, уравнение (19.55) составлено с учетом одновременного действия продольной силы и поперечных нагрузок, и значит, здесь может быть применен принцип независимости и сложения действия сил.

Рассмотрим балку, нагруженную следующими поперечными нагрузками (рис. 511): силами  $P_0$  и  $P_i$ , моментами  $M_0$  и  $M_i$ , распределенной нагрузкой  $q_i$ . Приложим также сжимающую осевую силу  $S$ .

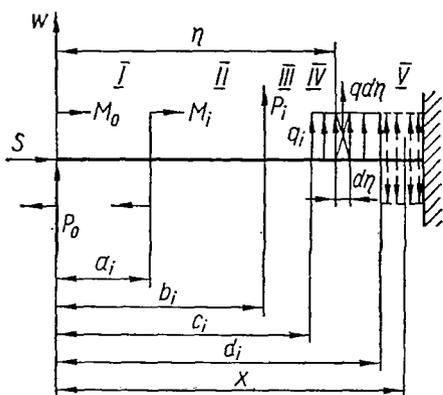


Рис. 511

Чтобы найти выражение для изгибающих моментов  $M_{\Pi}(x)$  на крайнем правом (т. е. V) участке балки, будем рассуждать следующим образом. Сначала допустим, что все нагрузки ( $P_i$ ,  $M_i$  и  $q_i$ ), за исключением начальных, отсутствуют. Тогда момент  $M_{\Pi}(x)$  будет выражаться в функции от начальных параметров  $M_{\Pi}$ ,  $Q_{\Pi}$  и абсциссы  $x$  по формуле (19.55). Пусть теперь начальные параметры равны нулю, но действуют сосредоточенные нагрузки  $P_i$  и  $M_i$ . Вдумываясь в геометрический и статический смысл этих силовых факторов,

приходим к выводу, что их можно принять за новые начальные параметры, если переместить начало координат соответственно расположению этих силовых факторов — в точки с абсциссами  $a_i$  или  $b_i$  соответственно. Тогда аргументами тригонометрических функций в формуле (19.55) будут отрезки

$$(x - a_i); \quad (x - b_i)$$

и уравнение для изгибающих моментов примет вид

$$M_{\Pi}(x) = M_i \cos k(x - a_i) + \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i). \quad (19.56)$$

Если сил и моментов на участке  $x$  будет несколько ( $m$ ), то придется ввести суммы. Тогда получим:

$$M_{\Pi}(x) = \sum_{i=1}^m M_i \cos k(x - a_i) + \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i). \quad (19.57)$$

При действии распределенных нагрузок  $q(x)$  второе слагаемое превращается в интеграл от элементарных силовых факторов  $qd\eta$  (рис. 511):

$$\int_c^d \frac{q}{k} \sin k(x - \eta) d\eta = \frac{q}{k^2} [\cos k(x - d) - \cos k(x - c)]. \quad (19.58)$$

Учитывая одновременное действие всех перечисленных силовых факторов, в том числе и начальных параметров  $M_{\Pi}$  и  $Q_{\Pi}$ , получим универсальное уравнение для моментов при продольно-поперечном изгибе:

$$M_{\Pi}(x) = M_{\Pi} \cos kx + \frac{Q_{\Pi}}{k} \sin kx + \sum M_i \cos k(x - a_i) + \sum \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i) + \sum \frac{q_i}{k^2} [\cos k(x - d_i) - \cos k(x - c_i)]. \quad (19.59)$$

Продифференцировав это уравнение по  $x$ , получим уравнение для поперечных сил:

$$Q_{\Pi}(x) = -M_{\Pi} k \sin kx + Q_{\Pi} \cos kx - \sum M_i k \sin k(x - a_i) + \sum P_i \cos k(x - b_i) - \sum \frac{q_i}{k} [\sin k(x - d_i) - \sin k(x - c_i)]. \quad (19.60)$$

Порядок применения этих уравнений к решению задач принципиально тот же, что и в рассмотренных выше случаях применения метода начальных параметров (см. гл. X).

Начальные параметры определяются из краевых условий балки. В общем виде эти условия можно представить так:

а) для шарнирно опертой балки

$$M_{\Pi}(0) = M_{\Pi}(l); \quad (19.61)$$

$$M_{\Pi}(l) = M_{\Pi}(0); \quad (19.62)$$

при отсутствии внешних моментов на концах балки  $M(0) = M(l) = 0$ ;

б) для консольной балки с левым защемленным концом

$$M_{\Pi}(l) = M_{\Pi}(0); \quad (19.63)$$

$$Q_{\Pi}(0) = Q_{\Pi}(l); \quad (19.64)$$

в) для консольной балки с защемлением справа

$$M_{\Pi}(0) = M_{\Pi}(l); \quad (19.65)$$

$$Q_{\Pi}(l) = Q_{\Pi}(0). \quad (19.66)$$

Напоминаем, что здесь  $M(0)$ ,  $M(l)$  и  $Q(l)$  — моменты и поперечные силы в концевых сечениях балки только от поперечной нагрузки.

Условия (19.64) и (19.66) вытекают из того, что в заделке продольная сила  $S$  не дает поперечной составляющей, так как касательная к оси балки здесь горизонтальна.

После того как найдены начальные параметры  $M_n$  и  $Q_n$ , легко определить полный изгибающий момент  $M_n$  в любом сечении балки. Зная величины изгибающих моментов, можем вычислить наибольшее нормальное напряжение:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{S}{F} + \frac{M_{n\text{макс}}}{W}. \quad (19.67)$$

Для определения прогибов воспользуемся уравнением (19.44), откуда получим:

$$w_n(x) = \frac{M_n(x) - M(x)}{S}. \quad (19.68)$$

*Пример 77.* Приняв для балки (рис. 510) следующие нагрузки:  $S = 100P_0$ ;  $M_0 = 2P_0l$ ;  $P_0 = 250 \text{ кг}$ , определить наибольшие нормальные напряжения в сечении  $B$ , если  $l = 200 \text{ см}$ . Поперечное сечение прямоугольное площадью  $F = 10 \times 10 \text{ см}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $J = \frac{a^4}{12} = 835 \text{ см}^4$ .

Составляем уравнения моментов и поперечных сил:

$$\begin{aligned} M_n(x) &= M_n \cos kx + \frac{1}{k} Q_n \sin kx; \\ Q_n(x) &= -M_n k \sin kx + Q_n \cos kx. \end{aligned}$$

Граничные условия рассматриваемой балки следующие:

$$M_n(0) = M_0 = 2P_0l; \quad Q_n(l) = Q(l) = P_0.$$

Из первого граничного условия находим:

$$M_n(0) = M_n = 2P_0l.$$

Второе граничное условие дает

$$Q_n(l) = -2P_0lk \sin kl + Q_n \cos kl = P_0,$$

откуда

$$Q_n = \frac{P_0 + 2P_0lk \sin kl}{\cos kl}.$$

Теперь запишем окончательное выражение для  $M_n(x)$ :

$$M_n(x) = 2P_0l \cos kx + \frac{P_0}{k} + \frac{2P_0l \sin kl}{\cos kl} \sin kx.$$

Так как нас интересует изгибающий момент  $M_n$  в сечении  $B$ , то при

$$k = \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 250}{2 \cdot 10^6 \cdot 835}} = 3,873 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см};$$

$$\sin kl = \sin 200k = \sin 0,775 = 0,700;$$

$$\cos kl = \cos 200k = \cos 0,775 = 0,713;$$

$$\text{tg } kl = \text{tg } 200k = \text{tg } 0,775 = 0,983$$

найдем:

$$M_{\text{п}}(l) = M_B = 2P_0 l \left[ \cos kl + \left( \frac{1}{2kl} + \sin kl \right) \operatorname{tg} kl \right] = 20,35 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

Наибольшие напряжения вычисляем по формуле (19.67):

$$\sigma_{\text{макс}} = 250 + 1219 = 1469 \text{ кг/см}^2.$$

**Приближенный расчет.** В практических расчетах широко распространены приближенные способы решения, основанные на допущении, что изогнутая ось балки при поперечной нагрузке принимает форму синусоиды, т. е.

$$w(x) \approx f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.69)$$

При наличии продольной силы также приближенно принимают, что

$$w_{\text{п}}(x) \approx f_{\text{п}} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.70)$$

Это предположение позволяет получить практически достаточно точные результаты для шарнирно-опертых балок при действии поперечных нагрузок, направленных в одну сторону, особенно если деформация балки оказывается симметричной относительно ее середины, где  $w_{\text{п}}\left(\frac{l}{2}\right) \approx f_{\text{п}}$ .

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_{\text{мин}}} \quad (19.71)$$

при продольно-поперечном изгибе балки с учетом выражения (19.46) запишется так:

$$\frac{d^2 w_{\text{п}}(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} - \frac{S w_{\text{п}}}{EJ}. \quad (19.72)$$

Исключив из уравнений (19.71) и (19.72)  $M(x)$  и учтя допущения (19.69) и (19.70), находим:

$$(f_{\text{п}} - f) \frac{d^2}{dx^2} \left( \sin \frac{\pi x}{l} \right) = - \frac{S}{EJ} f_{\text{п}} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.73)$$

Тогда после дифференцирования будем иметь:

$$\frac{\pi^2}{l^2} (f_{\text{п}} - f) = \frac{S}{EJ} f_{\text{п}}. \quad (19.74)$$

Введем обозначение

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_3 \quad (19.75)$$

и назовем  $P_3$  эйлеровой силой. Эта сила численно равна  $P_{\text{кр}}$ , определяемому по формуле (19.14). Из уравнения (19.74) найдем выражение

для прогиба посредине пролета балки при совместном действии продольной и поперечной нагрузок:

$$f_n = \frac{l}{1 - \frac{S}{P_3}}. \quad (19.76)$$

Применяя эту формулу, следует иметь в виду, что эйлерова сила  $P_3$  введена выражением (19.75) чисто формально. Поэтому в отличие от критической нагрузки  $P_{кр}$  сила  $P_3$  должна вычисляться по формуле (19.14) при любой гибкости балки (даже меньшей предельной). Вычисляя эйлерову силу, момент инерции следует брать относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна к плоскости действия поперечной нагрузки.

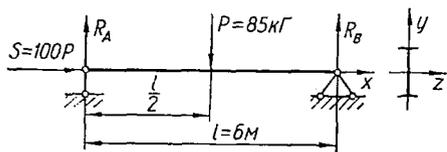


Рис. 512.

Выражение (19.76) обычно применяют и при других типах опорных закреплений сжато-изогнутых балок. В этом случае эйлерова сила должна вычисляться по формуле (19.20):

$$P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2}.$$

Выражение (19.76) дает удовлетворительные результаты, когда сжимающая сила  $S$  не превышает  $0,8P_{кр}$ .

Предполагая, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам, получим простую формулу для приближенного определения величины наибольшего момента при продольно-поперечном изгибе:

$$M_{n, \max} = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_3}}. \quad (19.77)$$

Тогда для вычисления наибольших напряжений согласно выражениям (19.67) и (19.77) получим формулу

$$\sigma_{n, \max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W \left(1 - \frac{S}{P_3}\right)}. \quad (19.78)$$

*Пример 78.* Вычислить максимальный момент и наибольшее нормальное напряжение в балке, показанной на рис. 512. Поперечное сечение балки — двутавр № 10; для него  $F = 12 \text{ см}^2$ ;  $W_z = 39,7 \text{ см}^3$ ;  $J_z = 198 \text{ см}^4$ .

Вычисляем  $P_3$  по формуле (19.75):

$$P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 198}{600^2} \approx 10\,846 \text{ кГ}.$$

Вычисляем момент посредине пролета для случая поперечного изгиба:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} = \frac{85 \cdot 600}{4} = 12\,750 \text{ кГ} \cdot \text{см},$$

а затем по формуле (19.77) находим наибольший момент при продольно-поперечном изгибе:

$$M_{\Pi} \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_3}} = \frac{12\,750}{1 - \frac{100 \cdot 85}{10\,846}} = \frac{12\,750}{1 - 0,784} = 58\,946 \text{ кг} \cdot \text{см},$$

Наибольшие напряжения вычисляем по формуле (19.67):

$$\sigma_{\max} = \frac{8500}{12} + \frac{58\,946}{39,7} = 2193 \text{ кг/см}^2.$$

**Определение допускаемой нагрузки при продольно-поперечном изгибе.** Расчет на продольно-поперечный изгиб обладает той особенностью, что напряжения при увеличении нагрузки возрастают значительно

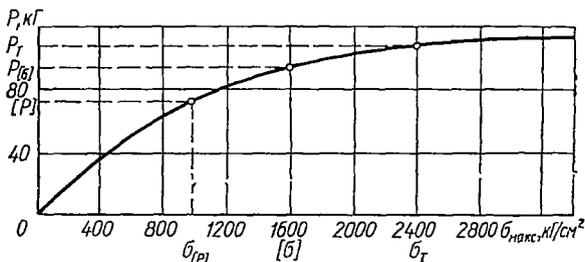


Рис. 513.

быстрее последней (рис. 513). График на рисунке построен по формуле (19.78) в соответствии с данными примера 76. Такая же нелинейная зависимость напряжений от нагрузки имеет место в любой задаче продольно-поперечного изгиба. Из графика следует, что если для пластичного материала напряжения  $\sigma_{\max}$  в стержне равны допускаемым напряжениям  $[\sigma]$ , то обеспечен запас прочности по напряжениям:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{[\sigma]} = n. \quad (19.79)$$

Казалось бы, что при этом прочность сжато-изогнутой балки обеспечена. Однако из графика также следует, что в этом случае коэффициент запаса по нагрузкам будет значительно меньше  $n$ , т. е.

$$n_P = \frac{P_T}{P} < n. \quad (19.80)$$

Это означает, что достаточно незначительного увеличения нагрузки (на величину  $P_T - P_{[\sigma]}$ ), чтобы напряжения достигли предела текучести, а это практически соответствует разрушению балки. Отсюда необходимо сделать вывод, что расчет сжато-изогнутых балок следует вести не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке

$$[P] = \frac{P_T}{n}. \quad (19.81)$$

Понятно, что при этом напряжения  $\sigma_{\max}$  будут значительно меньше допускаемых напряжений  $[\sigma]$ .

Таким образом, для определения допускаемой нагрузки необходимо сначала найти величину опасной (разрушающей) нагрузки  $P_T$ . Это можно сделать, воспользовавшись формулой (19.67) или (19.78), если предположить, что предел пропорциональности и предел текучести совпадают. При применении формулы (19.67) с вычислением  $M_n$  по точному способу задача решается методом последовательных приближений, при этом целесообразно воспользоваться построением графика, подобного изображенному на рис. 513. Применяя формулу (19.78), результат можно найти скорее. Для этого достаточно решить квадратное уравнение относительно  $P_T$ .

## Глава XX

### УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 123. ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Изучение колебательных процессов имеет важное значение для различных разделов механики, физики и техники. Вибрация сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, звуковые и ультразвуковые колебания — все эти не похожие друг на друга процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Рассмотрим механические колебания, с которыми приходится иметь дело в машиностроении и строительном деле. Изучение этих колебаний очень важно для решения задач прочности при переменных напряжениях.

Кратко остановимся на основных понятиях и зависимостях, которыми придется оперировать в настоящей главе.

Чтобы то или иное тело способно было совершать колебания, ему необходимо иметь определенную массу и упругость. Если упругое тело (нагруженная балка, скрученный вал или деформированная рессора) будет выведено из положения равновесия какой-либо посторонней причиной (ударом, внезапно приложенной силой), то сила упругости этого тела в новом положении уже не уравновесится нагрузкой и возникнут колебания.

Все колебательные процессы, с которыми приходится встречаться в технике, можно классифицировать по внешним признакам, форме того закона, по которому некоторая величина, участвующая в процессе, изменяется со временем. Такую классификацию можно назвать *кинематической*.

Различают два класса колебательных процессов: периодические и непериодические. В теории существенное значение имеет промежуточный класс — почти периодические колебания.

*Периодическим* называется такой процесс, при котором колеблющаяся величина, взятая в любой момент времени, через определенный

отрезок времени  $T$  (период) имеет то же самое значение. Математическое определение периодической функции следующее: функция  $f(t)$  называется периодической с периодом  $T$ , если существует такая постоянная величина  $T$ , для которой

$$f(t + T) = f(t)$$

при любом значении переменной  $t$ .

Непериодическими функциями называются все остальные функции, не удовлетворяющие указанному условию.

Почти периодическая функция определяется условием

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \epsilon$$

при любом  $t$ , где  $\tau$  и  $\epsilon$  — определенные постоянные величины. Величина  $\tau$ , которая, вообще говоря, есть функцией  $\epsilon$ , называется *почти периодом*. Очевидно, что если  $\epsilon$  очень мала по сравнению со средним значением модуля функции  $f_1(t)$  за время  $t$ , то почти периодическая функция будет близка к периодической.

Среди класса периодических колебаний огромную роль играют гармонические, или синусоидальные, колебания, при которых изменение физической величины со временем происходит по синусоиде (или косинусоиде).

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Наиболее часто из непериодических колебаний встречаются *затухающие* (или *нарастающие*) синусоидальные движения. Колебания, происходящие по закону затухающей синусоиды, или, как иногда их называют, *затухающие гармонические колебания*, показаны на рис. 514, а и математически представляются выражением

$$x = A^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\delta$  и  $\omega$  — постоянные величины;  
 $t$  — время.

Нарастающие гармонические колебания показаны на рис. 514, б. Математически они описываются последним выражением с той разницей, что должен быть изменен знак на обратный у величины  $\delta$ .

Строго говоря, о таких колебаниях следовало бы сказать: затухающие (или нарастающие) колебания близки к гармоническим при достаточно малом значении  $\delta$ . Поэтому название «затухающие синусоиды» или «затухающие периодические колебания» не совсем логично, так как гармонические колебания не могут затухать. Но название это обычно принято и мы также будем им пользоваться.

Перечисленные внешние признаки колебательных процессов, конечно, недостаточны для их систематизации и анализа. Поэтому целесообразно классифицировать колебания по основным физическим признакам рассматриваемых колебательных систем.

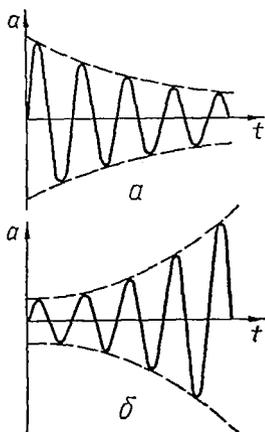


Рис. 514.

Вообще упругая система может давать колебания разных типов. Например, струна или балка во время колебаний могут принимать различные формы, зависящие от числа точек перегиба, разделяющих длину элемента. При исследовании колебательных движений упругих систем важно знать, какое число независимых параметров определяет положение системы в каждый данный момент времени. Число таких параметров называется *числом степеней свободы*.

В простейших случаях положение системы может быть определено только одной величиной. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*.

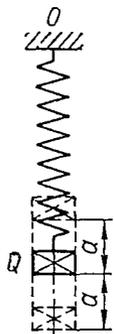


Рис. 515.

Рассмотрим простейший случай, изображенный на рис. 515. Если устройство таково, что возможны только вертикальные перемещения груза  $Q$ , и если масса пружины мала по сравнению с величиной массы груза  $Q$ , то систему можно рассматривать как имеющую одну степень свободы. Положение такой колебательной системы может быть определено одним параметром — вертикальным перемещением груза.

*Системой с двумя или несколькими степенями свободы* назовем такую систему, положение которой в произвольный момент времени может быть охарактеризовано двумя или несколькими независимыми параметрами. Двумя степенями свободы, например, обладает невесомая балка, несущая две массы (рис. 516, а). В качестве независимых параметров могут быть приняты перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$  по отношению к положению равновесия.

Рассматривая поперечные колебания балки, можно постепенно увеличивать число степеней свободы, присоединяя к балке сосредоточенные массы. В пределе получается балка с распределенной по всей длине массой (рис. 516, б) — *система с бесконечным числом степеней свободы*. При этом прогиб в любой точке балки меняется по особому закону. С одной стороны, прогиб балки при колебаниях является функцией абсциссы  $x$ , а с другой — непрерывной функцией времени  $t$ .

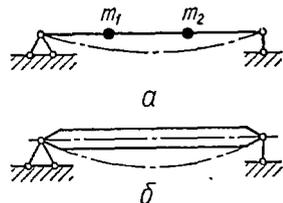


Рис. 516.

Классифицируя механические колебания по другим признакам, различают следующие четыре типа возможных колебаний: собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания.

*Собственными (свободными)* называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения («толчков»), вызывающего у точек системы начальные отклонения от положения равновесия или начальные скорости, и продолжающиеся затем благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

Классическим примером собственных колебаний упругой системы являются вертикальные колебания груза, подвешенного к концу пружины (рис. 515), если верхний конец ее закреплен, а груз первоначально оттянут вниз и затем отпущен.

При собственных колебаниях характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зави-

сящими от физического строения ее. Необходимая энергия, обеспечивающая процесс колебаний, поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний.

Наибольшее значение отклонений, т. е. амплитуда колебаний и скорость собственных колебаний, определяется из начальных условий. При этом период колебаний (время одного полного колебания) или частота колебаний, т. е. величина, обратная периоду, будет зависеть от самой системы. Эта величина является определенной для данной системы и называется *собственной частотой* колебаний системы.

Собственные колебания могут происходить не только около положения устойчивого равновесия, но и по отношению к устойчивому движению, например крутильные колебания равномерно вращающегося вала.

Вследствие наличия сил сопротивления колебательному движению (сопротивление среды, в которой происходит движение, трение в подшипниках, трение в сочленениях конструкции, силы внутреннего трения в материале) во всех реальных механических системах собственные колебания всегда затухают. В этом заключается важная особенность собственных колебаний по сравнению с другими типами колебательных движений.

С целью упрощения при теоретическом исследовании собственных колебаний в начале решения задачи силами сопротивления обычно пренебрегают.

*Вынужденными* называются колебания упругой системы, происходящие при действии на систему (на протяжении всего периода колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил, которые действуют непрерывно независимо от колебаний в системе. Характер процесса при этом определяется не только свойствами системы, но также существенно зависит от внешней силы.

Примером вынужденных колебаний системы могут служить поперечные колебания балки (рис. 517), служащей опорой для электродвигателя, если у него вращающиеся массы не вполне уравновешены. Период вынужденных колебаний равен периоду изменения возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

В отличие от собственных вынужденные колебания не затухают, хотя имеют место силы сопротивления. Это объясняется тем, что при вынужденных колебаниях в систему со стороны возмущающей силы непрерывно подводится энергия, которая и расходуется на преодоление имеющихся в системе сопротивлений.

В известных условиях, когда частота возмущающих сил близка или совпадает с частотой собственных колебаний рассматриваемой системы, вынужденные колебания сопровождаются значительным (часто опасным) увеличением амплитуд, вызывающим недопустимые для конструкции деформации. Это явление, как известно, носит название *резонанса*.

*Параметрическими* называются колебания упругой системы, в процессе которых периодически меняются физические параметры системы.



Рис. 517.

т. е. величины, характеризующие массу системы или ее жесткость. Существенной особенностью параметрических колебаний является то, что внешние силы влияют не непосредственно на колебательное движение, а на физические параметры системы.

Таким образом, параметрические колебания отличаются от вынужденных видом внешнего воздействия. При вынужденных колебаниях извне задана сила или какая-либо другая величина, вызывающая колебания, а параметры системы при этом остаются постоянными. Параметрические колебания вызываются периодическим изменением извне какого-либо физического параметра системы. Так например, вращающийся вал некруглого сечения, имеющий относительно различных осей сечения различные моменты инерции, входящие в характеристику жесткости при изгибе, испытывает поперечные колебания (см. с. 523) в определенной плоскости благодаря переменной жесткости, периодически изменяющейся за каждый оборот вала.

Изменение физического параметра вызывается внешними силами. В приведенном примере внешним фактором является двигатель, осуществляющий вращение вала. Параметрические колебания не затухают при наличии сил сопротивления. Поддержание параметрических колебаний происходит за счет подвода энергии внешними силовыми воздействиями, изменяющими физические параметры системы.

*Автоколебаниями*, или *самоколебаниями*, упругой системы называют незатухающие колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом.

Автоколебания возникают в системе без внешнего периодического воздействия. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, покрывающий потери ее в системе при колебаниях (главным образом на тепло), обычно составляет неотъемлемую часть системы.

Из сказанного следует, что *автоколебания отличны от собственных колебаний*, поскольку последние являются затухающими, в то время как *автоколебания не затухают*. С другой стороны, автоколебания отличаются от вынужденных и от параметрических колебаний, так как и те и другие так или иначе вызываются внешними силами, характер действия которых задан. В этом смысле *автоколебания могут быть названы также самовозбуждающимися*, так как процесс колебаний здесь управляется самими колебаниями. Источник дополнительной энергии, поддерживающей колебания системы, находится вне упругой системы. Например, энергия воздушного потока, набегающего на вибрирующие части самолета, вызывает особый вид автоколебаний, называемый *флаттером*.

Кроме указанной выше классификации колебаний, принято также различать колебания по виду деформации упругих элементов конструкций. В частности, применительно к стержневым системам различают продольные, поперечные и крутильные колебания.

К *продольным* колебаниям относят такие колебательные движения системы, в частности упругого стержня, при которых перемещения всех точек направлены вдоль оси стержня; при этом имеет место

деформация удлинения или укорочения его. Возникающие при такого рода колебаниях нормальные напряжения распределены равномерно по поперечному сечению. Следовательно, продольные колебания иначе можно назвать колебаниями растяжения — сжатия.

*Поперечными* колебаниями называются колебания изгиба, при которых основные компоненты перемещений (в данном случае прогибы) направлены перпендикулярно к оси стержня. Напряженное состояние при поперечных колебаниях, очевидно, будет таким же, как и при статическом изгибе балок. Поэтому поперечные колебания иначе можно назвать изгибными колебаниями.

*Крутильными* называются колебания стержней, сопровождаемые переменной деформацией кручения. С этими колебаниями в машиностроении приходится иметь дело главным образом при анализе деформаций различного рода валов, работающих преимущественно на кручение.

При рассмотрении тонкостенных конструкций, в частности конструкций самолета, часто приходится иметь дело с колебаниями смешанного типа, при которых одновременно имеют место напряженные состояния изгиба и кручения, так называемые изгибно-крутильные колебания.

#### § 124. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Задача о гармонических колебаниях системы с одной степенью свободы рассматривается в курсе теоретической механики. В качестве упругой системы здесь обычно рассматривается груз, подвешенный к вертикально расположенной пружине (рис. 518).

Дифференциальное уравнение колебаний груза весом  $Q$  (пренебрегая массой пружины) можно получить, пользуясь принципом Даламбера. Приравнявая нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на груз, получаем:

$$Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{x}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 0,$$

или

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}, \quad (20.1)$$

где  $\ddot{x}$  — вторая производная перемещения груза по времени  $t$ ;

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\delta_{ст}}. \quad (20.2)$$

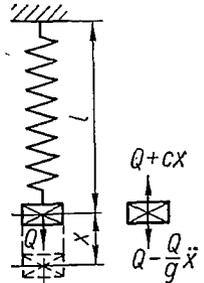


Рис. 518.

Здесь  $c$  — жесткость пружины, численно равная силе, вызывающей растяжение пружины, равное единице длины;

$g$  — ускорение силы тяжести;

$\delta_{ст}$  — статическая деформация растяжения пружины под действием подвешенного груза весом  $Q$ .

Уравнение (20.1) будет иметь, очевидно, следующее общее решение, устанавливающее зависимость между ординатой  $x$  груза и временем  $t$ :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (20.3)$$

где  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний, а  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий. За начало отсчета перемещений выбирается положение груза, соответствующее состоянию равновесия.

Если заданы начальная координата груза  $x_0$  и начальная скорость  $v_0 = \dot{x}$  при  $t = 0$ , то из уравнения (20.3) определяются постоянные интегрирования:

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \quad (20.4)$$

Полагая  $x_0 = a \sin \alpha$  и  $\frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha$ , уравнение (20.3) можно представить также в виде

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$

при этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{A^2 + B^2},$$

или

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Величина  $\omega t + \alpha$  носит название *фазы колебаний*, а величину  $\alpha$  называют *сдвигом фазы*. На основании выражений (20.4)  $\alpha$  может быть определено из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Из уравнения (20.2) круговая частота собственных колебаний определится формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}}. \quad (20.5)$$

Имея в виду, что  $\frac{Q}{g}$  представляет собой массу  $m$  подвешенного груза  $Q$ , круговую частоту можно также представить так:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Напомним, что под круговой частотой подразумевается число колебаний, совершаемых в течение  $2\pi$  сек; размерность круговой частоты  $1/\text{сек}$ .

Зная круговую частоту колебаний, можно найти период колебаний,  $T$  (время одного полного колебания) по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (20.6)$$

Величина, обратная периоду колебаний, определяет число колебаний в единицу времени (секунду) и носит название *секундной частоты*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Секундная частота колебаний обычно выражается в герцах; число герц равно числу колебаний в секунду.

В качестве реальной упругой колебательной системы с одной степенью свободы может служить система, состоящая из упругого тонкого стержня, верхний конец которого жестко закреплен, а к нижнему подвешен груз. Очевидно, в том случае, когда масса стержня значительно меньше массы груза, данная система ничем не будет отличаться от ранее рассмотренной (рис. 518). Поэтому для нахождения частоты, периода и амплитуды собственных колебаний груза, подвешенного к упругому стержню, можно пользоваться полученными выше формулами для груза, подвешенного к пружине. При этом необходимо установить жесткость стержня, эквивалентную жесткости  $c$  пружины.

При растяжении стержня длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $F$  абсолютное удлинение стержня, как известно, определяется формулой

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{Ql}{EF}.$$

Усилие, соответствующее статической деформации  $\delta_{\text{ст}}$ , равной единице, представляет собой искомую жесткость:

$$c = \frac{EF}{l}. \quad (20.7)$$

Тогда на основании выражения (20.5) собственная частота колебаний подвешенного груза  $Q$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \quad (20.8)$$

Имея в виду, что  $\frac{Q}{g}$  представляет собой массу груза, можно записать:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \quad (20.9)$$

Из формул (20.8) и (20.9) видно, что частота свободных колебаний системы возрастает с увеличением жесткости, или, что то же

самое, с уменьшением статической деформации, вызываемой данным грузом. Легко убедиться, что груз, подвешенный к упругому стержню, будет обладать значительно более высокой собственной частотой колебания, чем тот же груз, подвешенный к податливой пружине.

Отношение частот собственных колебаний груза, прикрепленного к двум различным стержням, обратно пропорционально корню квадратному из отношения статических удлинений стержней.

*Пример 79.* Определить собственную частоту колебаний груза весом  $Q = 20 \text{ кг}$ , подвешенного к концу стального стержня длиной  $40 \text{ см}$  и площадью поперечного сечения  $F = 1 \text{ см}^2$ , при модуле упругости материала  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

Круговая частота колебаний согласно формуле (20.8)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{gEF}{QL}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1}{20 \cdot 40}} = 1570 \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, соответствующая собственная частота колебаний груза

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1570}{2 \cdot 3,14} = 250 \text{ гц}.$$

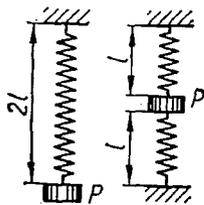


Рис. 519.

*Пример 80.* Определить, как изменится частота собственных колебаний груза  $P$ , если от первого способа крепления его перейти ко второму, разрезав пружину на две равные части и закрепив груз посередине (рис. 519).

Частота колебаний груза, подвешенного на пружине,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}};$$

$$\delta_{\text{ст}} = \lambda = \frac{4PR^3n}{Gr^4} = \frac{P}{c},$$

где  $c$  — жесткость пружины;

$R$  — средний радиус витка пружины;

$n$  — число витков;

$r$  — радиус проволоки пружины;

$G$  — модуль упругости при сдвиге.

Для первой схемы

$$c_1 = \frac{Gr^4}{4R^3n}.$$

Во второй схеме каждая часть пружины будет обладать большей жесткостью:

$$c_2 = \frac{Gr^4}{4R^3n} = 2c_1.$$

В первом случае перемещение груза

$$\delta_1 = \frac{P}{c_1}.$$

Во втором случае каждая половина пружины будет воспринимать нагрузку  $P/2$ . Поэтому перемещение груза

$$\delta_2 = \frac{P}{2c_2} = \frac{P}{2 \cdot 2c_1} = \frac{\delta_1}{4}.$$

Частота колебаний груза, подвешенного на пружине по первой схеме,

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gc_1}{P}}.$$

Частота колебаний груза, подвешенного по второй схеме,

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g4c_1}{P}}.$$

Соотношение частот колебаний

$$\frac{f_2}{f_1} = 2,$$

т. е. при замене способа подвеса груза частота увеличится в два раза.

*Пример 81.* Найти период колебаний груза  $Q$ , подвешенного на жесткой нити (рис. 520), пренебрегая трением в блоке. Жесткость верхней и нижней пружиной соответственно  $c_1$  и  $c_2$ .

Определяем перемещение статически подвешенного груза  $Q$ . Это перемещение будет складываться из удлинения верхней пружины  $\delta_{\text{в}}$  под действием силы  $2Q$  и удлинения нижней пружины  $\delta_{\text{н}}$  под действием силы  $Q$ , т. е. опускание груза  $Q$  будет

$$\delta_{\text{ст}} = \delta_{\text{в}} + \delta_{\text{н}} = \frac{2Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{c_1 c_2} (c_1 + 2c_2).$$

Тогда период колебаний определится так:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}} = \sqrt{\frac{Q(c_1 + 2c_2)}{g c_1 c_2}}.$$

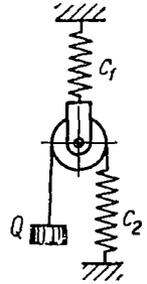


Рис. 520.

Изложенная выше теория расчета продольных колебаний может быть распространена также и на случаи расчета поперечных и крутильных колебаний. Например, рассматривая невесомую балку с одной степенью свободы, получим уравнение движения в виде (20.1). В этом случае вместо переменной  $x$  следует принять перемещение груза в направлении, перпендикулярном к оси, т. е. прогиб  $w$ .

Выражения для собственной частоты и периода колебаний сохраняют прежний вид (20.5) и (20.6). При этом  $\delta_{\text{ст}}$  представляет собой прогиб под грузом  $Q$  при статическом его приложении.

Для случая, изображенного на рис. 521,

$$\delta_{\text{ст}} = w_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

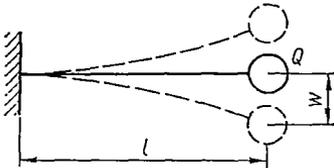


Рис. 521.

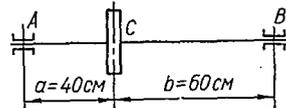


Рис. 522.

*Пример 82.* Определить частоту собственных поперечных колебаний стального вала диаметром  $d = 50$  мм, несущего диск весом  $Q = 100$  кг (рис. 522).

Собственная частота поперечных колебаний рассматриваемой системы с одной степенью свободы определится по формуле (20.5):

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

где  $\delta_{ст}$  — статический прогиб вала в месте расположения диска:

$$\delta_{ст} = w_{ст} = \frac{Qa^2b^2}{3EI} = \frac{100 \cdot 40^2 \cdot 60^2 \cdot 64}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 5^4 \cdot 100} = 0,0312 \text{ см.}$$

Подставляя полученное значение  $\delta_{ст}$  в формулу частоты, будем иметь:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0,0312}} \approx 177 \text{ 1/сек.}$$

Примером упругой системы, способной совершать крутильные колебания, может служить диск, сопряженный со стержнем по схеме, показанной на рис. 523. Если к диску в его плоскости приложена и внезапно удалена пара сил, то возникнут свободные колебания кручения стержня вместе с диском.

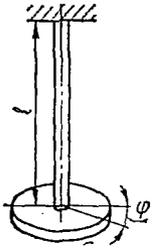


Рис. 523.

Обозначим крутильную жесткость вала (скручивающий момент, необходимый для закрутки вала на один радиан) через  $c = \frac{G\pi d^4}{l \cdot 32}$  ( $d$  — диаметр стержня,  $l$  — его длина), а полный угол закручивания стержня — через  $\varphi$ . Крутящий момент в циклически закручиваемом при колебаниях стержне в произвольный момент времени будет  $c\varphi$ . Пренебрегая силами инерции массы стержня по сравнению с массой диска и приравнявая крутящий момент в стержне моменту сил инерции диска, получаем следующее дифференциальное уравнение движения диска:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \quad (20.10)$$

где  $J$  — момент инерции диска относительно оси стержня, перпендикулярной к плоскости диска.

Для круглого диска постоянной толщины диаметром  $D$  с удельным весом его материала  $\gamma$

$$J = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32g} = \frac{QD^2}{8g},$$

где  $Q$  — вес диска.

В случае диска переменной толщины  $h(\rho)$

$$J = \frac{2\pi}{g} \int_0^{D/2} h(\rho) \gamma \rho^3 d\rho.$$

Обозначая  $\omega^2 = \frac{c}{J}$ , уравнение (20.10) можно переписать в виде (20.1):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

общее решение которого будет

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Отсюда видно, что период колебаний кручения рассматриваемой системы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Для стержня постоянного сечения диаметром  $d$  период и частота колебаний соответственно будут следующими:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32J}{G\pi d^4}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J}}. \quad (20.11)$$

Полученный результат применим также и к системам с двумя вращающимися дисками (рис. 524). Действительно, если закрутить диски один относительно другого, а затем мгновенно снять приложенные внешние моменты, то диски начнут совершать крутильные колебания навстречу друг другу. При этом некоторое промежуточное сечение вала будет оставаться неподвижным. Положение этого так называемого *узлового сечения*  $m-m$  можно найти из условия равенства частот колебаний обоих дисков с примыкающими к ним участками вала длиной  $a$  и  $b$ , для которых применимы формулы (20.11):

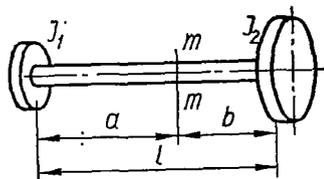


Рис. 524.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_1 a}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_2 b}},$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{J_2}{J_1},$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции соответственно первого и второго дисков.

Используя последнее соотношение, а также имея в виду, что  $a + b = l$ , найдем:

$$a = \frac{J_2 l}{J_1 + J_2}; \quad b = \frac{J_1 l}{J_1 + J_2}.$$

Тогда период и частота крутильных колебаний системы согласно формулам (20.11), в которых вместо  $l$  следует подставить выражение для  $a$  (или  $b$ ), будут следующими:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32J_1 J_2 l}{\pi G d^4 (J_1 + J_2)}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4 (J_1 + J_2)}{32J_1 J_2 l}}.$$

Заметим, что рассмотренная колебательная система имеет большое практическое значение, так как она является прототипом колебательной системы, к которой могут приводиться многие упругие системы, встречающиеся в инженерном деле, в частности, валы с двумя вращающимися массами.

**§ 125. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Если принять, что кроме постоянной силы тяжести груза  $Q$  (см. рис. 518) на него действует периодическая возмущающая сила  $P$ , то в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе свободных колебаний будем иметь случай вынужденных колебаний. Уравнение этих колебаний получим из выражения (20.1), прибавляя к его правой части силу  $P(t)$ :

$$\boxed{\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P(t)}. \quad (20.12)$$

Деля все члены уравнения на  $\frac{Q}{g}$ , получаем:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)g}{Q}. \quad (20.13)$$

Рассмотрим частный случай, когда сила  $P(t)$  пропорциональна  $\cos pt$ , т. е. когда период силы  $T_1 = \frac{2\pi}{p}$ , а частота  $f_1 = \frac{p}{2\pi}$ .

Обозначив

$$\frac{P(t)g}{Q} = q \cos pt,$$

приведем уравнение (20.13) к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt. \quad (20.14)$$

При медленном изменении  $P(t)$ , т. е. при  $p$ , малом по сравнению с  $\omega$ , можно пренебречь членом  $\ddot{x}$ , содержащим ускорение в уравнении (20.14), и тогда получить статическую деформацию

$$x_{ст} = \frac{q \cos pt}{\omega^2}. \quad (20.15)$$

Для определения динамической деформации нужно решить дифференциальное уравнение (20.14). Это решение, как известно, можно получить, если к решению однородного уравнения (20.1)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (20.16)$$

прибавить частное решение уравнения (20.14)

$$x = C \cos pt. \quad (20.17)$$

Подставляя частное решение (20.17) в дифференциальное уравнение (20.14), найдем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -pC \sin pt; \\ \ddot{x} &= -p^2 C \cos pt; \\ -p^2 C \cos pt + \omega^2 C \cos pt &= q \cos pt. \end{aligned}$$

Отсюда после сокращения на  $\cos pt$  получим:

$$C(\omega^2 - p^2) = q,$$

т. е. амплитуда

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \quad (20.18)$$

Тогда общее решение уравнения (20.14) окончательно примет вид

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt. \quad (20.19)$$

Первых два слагаемых правой части уравнения (20.19) характеризуют свободные колебания, которые обычно быстро затухают; последнее слагаемое характеризует вынужденные установившиеся колебания системы, которые происходят с частотой внешней возмущающей силы.

Амплитуда  $C$  вынужденных колебаний, как следует из формулы (20.18), зависит от частоты этих колебаний  $p$ . Отношение амплитуды  $C$  к статической деформации (20.15) определяет так называемый коэффициент нарастания колебаний  $\beta$ :

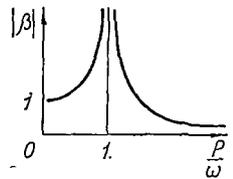


Рис. 525.

$$\beta = \frac{C}{x_{ст}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cdot \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}, \quad (20.20)$$

или

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}}, \quad (20.21)$$

где

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Из формулы (20.20) следует, что при малом отношении  $\frac{p}{\omega}$  коэффициент  $\beta$  близок к единице и амплитуда вынужденных колебаний лишь немного отличается от статической деформации. Когда же частота вынужденных колебаний приближается к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности, т. е. при  $\frac{p}{\omega} \rightarrow 1$  амплитуда  $C \rightarrow \infty$ . При  $p = \omega$  имеем состояние резонанса. Соответствующая частота возмущающей силы называется критической.

Рассматривая выражение (20.20), графическое изображение которого представлено на рис. 525, видим, что при частоте возмущающей силы  $p$ , большей собственной частоты  $\omega$  колебаний системы, т. е. при  $p > \omega$ , амплитуда  $C$  динамического перемещения уменьшается и при

$p \gg \omega$  делается очень малой по сравнению со статическим перемещением. В этом случае груз  $Q$  можно рассматривать как неподвижный.

При  $p < \omega$  вынужденные колебания и возмущающая сила находятся в одной фазе, т. е. сдвиг фаз  $\alpha = 0$ . Это значит, что в момент, когда колеблющийся груз (см. рис. 518) достигает своего наибольшего отклонения, предположим, вниз, возмущающая сила получает наибольшее значение в этом же направлении. При  $p > \omega$  разница в фазах вынужденных колебаний и возмущающей силы составляет величину  $\alpha = \pi$ , т. е. колебания будут происходить в противофазе с возмущающей силой. Это значит, что в то время, когда возмущающая сила имеет максимальное значение в направлении вниз, колеблющийся груз достигает своего максимального отклонения вверх. Такое явление

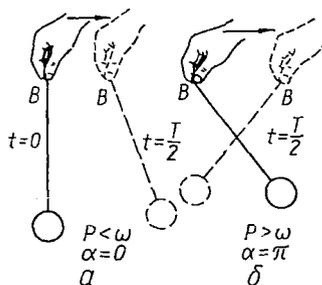


Рис. 52б.

можно хорошо понять на примере вынужденных колебаний математического маятника (рис. 526), возбуждения которого осуществляют путем горизонтального возвратно-поступательного периодического перемещения точки подвеса с различной частотой. Положение маятника, колеблющегося в одной фазе с возмущающим фактором, приведено на рис. 526, а; колебание маятника в противофазе с возмущающей силой показано на рис. 526, б.

Амплитуду собственных (независимых) колебаний можно определить из общего решения (20.19) при рассмотрении начальных условий. Так, полагая, что в начальный момент (при  $t = 0$ ) перемещение и скорость равны нулю, т. е.  $(x)_{t=0} = 0$  и  $(\dot{x})_{t=0} = 0$  из уравнения (20.19) будем иметь:

$$B = 0; \quad A = -\frac{q}{\omega^2 - p^2}.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (20.19), окончательно получаем

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t). \quad (20.22)$$

В начале действия возмущающей силы возникают вынужденные и свободные колебания одной амплитуды.

Если частота возмущающей силы приближается к частоте собственных колебаний, имеет место биение. Пусть

$$\omega - p = 2\Delta.$$

Тогда уравнение (20.22) при

$$\Delta = \frac{1}{2} (\omega - p)$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} \sin \frac{(p - \omega)t}{2} = \\ &= -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin(-\Delta)t \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{2q \sin t \Delta}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2}, \quad (20.23) \end{aligned}$$

т. е. получим уравнение синусоидального колебательного движения с периодом

$$T = 2\pi : \frac{p + \omega}{2} = \frac{4\pi}{p + \omega}$$

и переменной амплитудой

$$a = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin t \Delta,$$

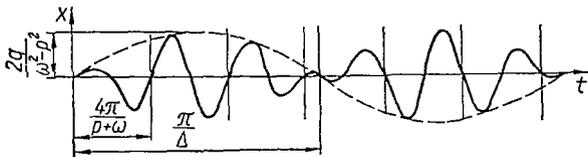


Рис. 527.

период изменения которой, или период биения, характеризуется величиной

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta}.$$

Графическое представление колебания с биением приведено на рис. 527. Из последней формулы следует, что период биения увеличивается с приближением частоты возбуждения  $p$  к частоте собственных колебаний  $\omega$  и становится равным бесконечности в случае резонанса (при  $p = \omega$ ). В последнем случае, когда  $p \rightarrow \omega$  и  $\Delta \rightarrow 0$ , уравнение (20.23) может быть представлено так:

$$x = \frac{2q t \Delta}{2\Delta(\omega + p)} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{qt}{2p} \sin pt, \quad (20.24)$$

т. е. амплитуда с течением времени возрастает безгранично. Заметим, что последнее заключение справедливо только при отсутствии в колебательной системе сил сопротивления. Таких реальных колебательных систем не существует.

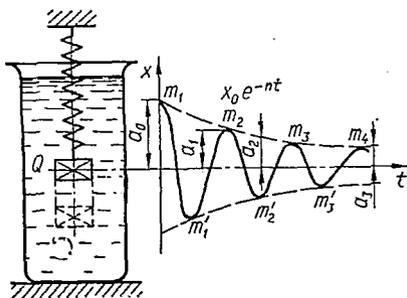


Рис. 528.

## § 126. РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Прежде всего рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы (рис. 528) в случае, когда силы сопротивления при колебании пропорциональны скорости движения. Для получения уравнения движения груза воспользуемся принципом Даламбера (условия динамического равновесия груза рассматриваем при отклонении его на расстояние  $x$  от положения статического равновесия):

$$Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} - a\dot{x} = Q + cx,$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности;

$\alpha\dot{x}$  — сила трения, пропорциональная скорости (действующая в направлении, обратном движению).

Отсюда дифференциальное уравнение колебаний системы с учетом рассеяния энергии можно представить в виде

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0,} \quad (20.25)$$

где

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}. \quad (20.26)$$

Обозначая

$$\boxed{\omega_1^2 = \omega^2 - n^2,} \quad (20.27)$$

общее решение дифференциального уравнения (20.25) можно представить так:

$$\boxed{x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t),} \quad (20.28)$$

где  $e = 2,718$ .

Из этого уравнения следует, что период колебаний рассматриваемой системы с затуханием будет

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}},} \quad (20.29)$$

т. е. он зависит от затухания, характеризуемого коэффициентом  $n$ .

Общее решение (20.28) может быть представлено также и так:

$$x = \mathfrak{M} e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \psi), \quad (20.30)$$

где  $\mathfrak{M}$  и  $\psi$  — некоторые постоянные, которые зависят от начальных условий и могут быть найдены таким же путем, как это было выполнено в § 124.

При  $n \ll \omega$  разница между круговой частотой  $\omega_1$  системы с затуханием и собственной частотой  $\omega$ , т. е.  $\epsilon = \omega_1 - \omega$ , является величиной второго порядка малости, поэтому период  $T$  будет мало отличаться от периода собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

т. е. можно считать, что небольшая сила сопротивления не влияет на период (частоту) колебаний системы.

Рассматривая решение (20.28), видим, что из-за множителя  $e^{-nt}$  амплитуда колебаний с течением времени убывает. Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$ , входящие в решение, определим из начальных условий. Так, полагая в начальный момент (при  $t = 0$ )  $x = x_0$  и  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , из уравнения (20.28) найдем, что

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1} (x_0 + nx_0).$$

Подставляя эти данные в уравнение (20.28), получаем:

$$x = e^{-nt} \left[ \frac{x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + x_0 \left( \cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].$$

В частном случае, когда  $A = 0$ , т. е. когда

$$\frac{x_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

последнее уравнение примет вид

$$x = x_0 e^{-nt} \cos \omega_1 t. \quad (20.31)$$

Графически зависимость (20.31) представлена на рис. 528. Уравнения верхней и нижней огибающих приведенной затухающей виброграммы соответственно будут  $x = x_0 e^{-nt}$  и  $x = -x_0 e^{-nt}$ . Точки  $m_1, m_2, m_3, \dots$  касания огибающей к виброграмме будут иметь координаты времени  $t = 0; t = T; t = 2T$  и т. д., а точки  $m'_1, m'_2, m'_3, \dots$  касания к нижней огибающей кривой будут иметь координаты  $t = \frac{T}{2}; t = \frac{3T}{2}$  и т. д. При этом указанные точки не будут совпадать с точками крайних перемещений системы из положения равновесия. Легко убедиться, что вследствие затухания время перемещения системы из среднего положения к следующему крайнему положению меньше времени, необходимого для возвращения из крайнего в следующее среднее положение.

Степень затухания колебаний системы зависит от величины постоянной  $n$  (характеристики затухания). Амплитуда колебаний после каждого цикла уменьшается в отношении

$$e^{-nT} : 1,$$

что видно из уравнения (20.31), т. е. уменьшение амплитуды соответствует геометрической прогрессии. Действительно, последовательные амплитуды при  $t = 0; t = T; t = 2T$  и т. д. имеют значения

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0 e^{-nT}; \quad a_2 = x_0 e^{-2nT}; \quad \dots;$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{x_0 e^{-nT}}{x_0} = e^{-nT}; \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{x_0 e^{-2nT}}{x_0 e^{-nT}} = e^{-nT} \text{ и т. д.}$$

Отношение какой-либо амплитуды колебаний к непосредственно следующей за ней амплитуде через один период равно

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{x_0 e^{-knT}}{x_0 e^{-(k+1)nT}} = e^{nT},$$

откуда

$$\boxed{\ln \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = \ln e^{nT} = nT = \delta.} \quad (20.32)$$

Величина  $\delta$  называется *логарифмическим декрементом колебаний* и обычно является основной характеристикой затухания колебаний.

В технике, в частности в машиностроении, величина декремента существенно отличается от единицы и составляет, например для таких колебательных систем, как турбинные лопатки, величину порядка 0,03, т. е. 3%.

Кроме сил сопротивления, пропорциональных скорости движения, затухание колебаний (демпфирование) в реальных конструкциях может обуславливаться и другими причинами, в частности, потерями на рассеяние энергии в самом материале упругого элемента системы, т. е. потерями гистерезисного типа, величина которых, оказывается, зависит уже не от скорости, а от амплитуды колебаний. Другим распространенным источником потерь энергии при колебаниях является рассеяние энергии за счет сил трения в сочленениях элементов конструкции, утечки энергии в фундамент и т. д.

Здесь мы лишены возможности останавливаться на расчете колебаний элементов конструкций с учетом различных видов рассеяния энергии<sup>1</sup> и ограничимся лишь случаем вынужденных колебаний, когда рассеяние энергии пропорционально скорости.

## § 127. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости. Уравнение движения для такого случая получим, если в дополнение к силе сопротивления  $S = a\dot{x}$  на груз в вертикальном направлении (рис. 528) будет действовать некоторая периодическая сила  $P \sin pt$ . Обозначив

$$q = \frac{gP}{Q},$$

получим уравнение движения для данного случая, добавляя в правую часть уравнения свободных колебаний с затуханием (20.25) член  $q \sin pt$ . При этом

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt. \quad (20.33)$$

Общее решение этого уравнения найдем, если к решению (20.28)

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) \quad (20.34)$$

однородного уравнения прибавим частное решение

$$x = K \sin pt + L \cos pt. \quad (20.35)$$

Тогда, имея в виду, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Kp \cos pt - Lp \sin pt; \\ \ddot{x} &= -Kp^2 \sin pt - Lp^2 \cos pt, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Детально этот вопрос освещен в монографиях Г. С. Писаренко «Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале». К., Изд-во АН УССР, 1955 и «Рассеяние энергии при механических колебаниях». К., Изд-во АН УССР, 1962.

и подставляя выражения  $x$ ,  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  в дифференциальное уравнение (20.33), а затем приравнявая коэффициенты при  $\sin pt$  и  $\cos pt$  правой и левой частей, получим:

$$\begin{aligned} -Lp^2 + 2Kpn + L\omega^2 &= 0; \\ -Kp^2 - 2Lpn + K\omega^2 &= q. \end{aligned}$$

Решая совместно полученную систему двух уравнений относительно неизвестных постоянных  $K$  и  $L$ , найдем:

$$\begin{aligned} K &= \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}; \\ L &= -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (20.33) может быть представлено в виде

$$\boxed{x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) - \frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt.} \quad (20.36)$$

Первые слагаемые, имеющие множитель  $e^{-nt}$ , со временем уменьшаются (затухают), два других слагаемых, пропорциональных  $q$ , характеризуют вынужденные колебания; они со временем не затухают.

Период незатухающих колебаний тот же, что и период возмущающей силы:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p},$$

а их амплитуда пропорциональна величине возмущающей силы. Эта амплитуда, как легко убедиться, зависит также от характеристики  $n$  затухания, а также от соотношения периода независимых колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

и периода  $T_1$  возмущающей силы.

Если ввести следующую замену:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \sin \alpha; \quad (20.37)$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \cos \alpha, \quad (20.38)$$

то вынужденные колебания можно представить несколько проще:

$$x = \mathfrak{A} (\cos \alpha \sin pt - \sin \alpha \cos pt) = \mathfrak{A} \sin (pt - \alpha). \quad (20.39)$$

Амплитуда  $\mathfrak{A}$  вынужденных колебаний на основании уравнений (20.37) и (20.38) определится из выражений

$$\begin{aligned} \frac{4q^2p^2n^2}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2]^2} &= \mathfrak{A}^2 \sin^2 \alpha; \\ \frac{q^2(\omega^2 - p^2)^2}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2]^2} &= \mathfrak{A}^2 \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

складывая которые и решая относительно  $\mathfrak{A}$ , находим:

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{4q^2 p^2 n^2 + q^2 (\omega^2 - p^2)^2}}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}}. \quad (20.40)$$

Угол сдвига фаз  $\alpha$  на основании тех же уравнений (20.37) и (20.38) можно определить делением первого из них на второе:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}. \quad (20.41)$$

При  $\omega > p$  угол  $\alpha$  будет положительный и меньше  $\frac{\pi}{2}$ , т. е.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Из уравнения (20.39) следует, что при этом вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы. Когда  $\omega < p$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , т. е. вынужденные колебания отстают больше, чем на  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Когда  $\omega = p$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ , т. е. во время колебательного движения система занимает свое среднее положение в тот момент, когда возмущающая сила достигает максимального значения.

Анализируя выражение для амплитуды  $\mathfrak{A}$  вынужденных колебаний, имея при этом в виду, что

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q},$$

находим:

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \delta_{\text{ст}}, \quad (20.42)$$

где  $\delta_{\text{ст}}$  — перемещение, которое возникло бы при статическом приложении максимального амплитудного значения возмущающей силы.

Имея в виду формулу (20.42) и деля числитель и знаменатель выражения (20.40) для амплитуды  $\mathfrak{A}$  на квадрат круговой частоты собственных колебаний  $\omega^2$ , получаем:

$$\mathfrak{A} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2 n^2}{\omega^4}}} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right)^2 + \frac{T^2 \gamma^2}{T_1^2}}}, \quad (20.43)$$

где  $\gamma = \frac{2n}{\omega}$  — коэффициент, зависящий от величины силы сопротивления.

При очень большом периоде вынужденных колебаний амплитуда вынужденных колебаний приближается к статическому перемещению ( $\mathfrak{A} \rightarrow \delta_{\text{ст}}$ ). При  $T_1 \rightarrow T$  и малом затухании  $\mathfrak{A} \rightarrow \infty$ .

Как указывалось, при расчетах амплитуд вынужденных колебаний удобно пользоваться *коэффициентом нарастания амплитуды колеба-*

ний  $\beta$ , представляющим собой отношение амплитуды  $\mathfrak{A}$  вынужденных колебаний к статическому перемещению  $\delta_{ст}$ :

$$\beta = \frac{\mathfrak{A}}{\delta_{ст}}.$$

На основании уравнения (20.43) выражение для коэффициента  $\beta$ , очевидно, будет

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2 n^2}{\omega^4}}}. \quad (20.44)$$

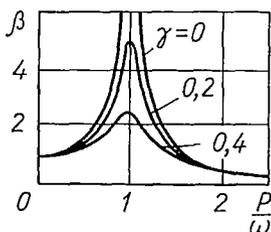


Рис. 529.

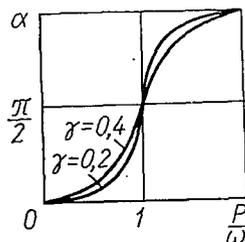


Рис. 530.

Представив  $\beta = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$  графически при различных значениях  $\gamma$  (рис. 529), получим так называемые *резонансные кривые*, наглядно иллюстрирующие зависимость амплитуды вынужденных колебаний от соотношения частот (периодов) свободных и вынужденных колебаний при различных демпфирующих характеристиках системы, определяемых значением коэффициента  $\gamma$ .

Графическое представление величины сдвига фазы  $\alpha = f_1\left(\frac{p}{\omega}\right)$  при различных значениях коэффициента  $\gamma$  приведены на рис. 530. Из этих диаграмм видно, что в области, близкой к резонансу, имеет место очень резкое изменение фазы вынужденных колебаний в том случае, если затухание мало.

*Пример 83.* Электродвигатель весом 400 кг, делающий  $n = 1000$  об/мин, установлен на двух швеллерах, консольно заделанных в стене. Подобрать сечение швеллеров, если расстояние от стены до центра тяжести двигателя  $l = 1$  м, вертикальная составляющая центробежной силы, возникающая от неуравновешенности двигателя, равна  $P \sin \omega t$ , где амплитуда центробежной силы  $P$  составляет 25% от веса двигателя.

Сечение швеллеров должно быть таким, чтобы собственная частота колебаний системы примерно на 30% была больше частоты возмущающей силы, т. е.

$$n_c = 1,3n = 1,3 \cdot 1000 = 1300 \text{ колебаний в минуту,}$$

или

$$\omega_c = \frac{\pi n_c}{30} = \frac{3,14 \cdot 1300}{30} = 136 \text{ 1/сек,}$$

а возникающее напряжение не превышало допустимого  $[\sigma] = 1000$  кг/см<sup>2</sup>.

Колебательную систему, представляющую собой мотор на швеллерах, с достаточной степенью точности можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, для которой собственная частота может быть определена по формуле (20.5):

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = 136 \text{ 1/сек},$$

откуда

$$\delta_{ст} = \frac{g}{\omega_c^2} = \frac{981}{136^2} = 0,053 \text{ см.}$$

С другой стороны, статический прогиб двух консольно закрепленных швеллеров

$$\delta_{ст} = f = \frac{Ql^3}{3E2J_z}.$$

Отсюда определим момент инерции одного швеллера:

$$J_z = \frac{Ql^3}{6E\delta_{ст}} = \frac{400 \cdot 100^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,053} = 629 \text{ см}^4.$$

Согласно таблице сортамента ближайший по размерам швеллер № 16 с моментом инерции

$$J_z = 741 \text{ см}^4.$$

Для швеллеров № 16 частота собственных колебаний системы

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 3E2J_z}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 741}{400 \cdot 100^3}} = 147 \text{ 1/сек},$$

или

$$n_c = \frac{30\omega_c}{\pi} = \frac{30 \cdot 147}{3,14} \approx 1400 \text{ колебаний в минуту},$$

что выше частоты возмущающей силы на

$$\frac{1400 - 1000}{1000} \cdot 100\% = 40\%.$$

Проверим напряжения, возникающие в швеллерах, с учетом вибрационной нагрузки. Напряжения в швеллерах (под действием веса мотора)

$$\sigma_{ср} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Ql}{2W_z} = \frac{400 \cdot 100}{2 \cdot 92,6} = 216 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент нарастания амплитуды колебаний согласно выражению (20.20) будет

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1000}{1400}\right)^2} = 2,04.$$

Тогда величина напряжения с учетом динамичности

$$\sigma_a = \beta \frac{Pl}{2W_z} = 2,04 \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 92,6} = \pm 110 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное напряжение в швеллере

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ср} + \sigma_a = 216 + 110 = 326 < [\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

## § 128. КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА

Из практики эксплуатации машин известно, что вращающиеся валы при некоторых вполне определенных для данной машины числах оборотов, попадая в резонанс, становятся динамически неустойчивыми и при этом могут возникать большие поперечные колебания. Число оборотов, при котором обнаруживается указанное явление резонанса, называется *критическим*. Легко показать, что критическая скорость для вала соответствует числу оборотов вала в секунду, равному собственной частоте его поперечных колебаний.

Для доказательства рассмотрим вращение вертикального вала с одним диском посередине (рис. 531, *a*).

Предположим, что центр тяжести  $C$  диска отстоит от оси его на расстоянии  $e$  (при посадке дисков на вал избежать эксцентриситета  $e$  практически не удастся). При вращении такой системы на вал будет действовать центробежная сила, вызывающая его изгиб:

$$T = \frac{Q}{g} \omega^2 (\omega + e),$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения вала;

$w$  — прогиб вала в месте посадки диска.

Найдем реакцию сил упругости вала в месте приложения центробежной силы:

$$P = c w,$$

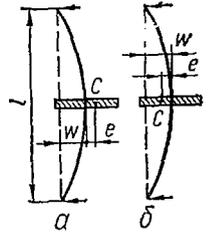


Рис. 531.

где  $c$  — изгибная жесткость вала, которая, например для вала постоянного сечения, при размещении диска посередине между опорами будет

$$c = \frac{48EJ}{l^3}. \quad (20.45)$$

Из условия равновесия очевидно, что  $T = P$ . Подставляя вместо  $T$  и  $P$  их выражения, получим следующее уравнение для определения  $w$ :

$$\frac{Q}{g} (\omega + e) \omega^2 = c w. \quad (20.46)$$

Из последнего уравнения

$$w = \frac{e}{\frac{c}{\omega^2} \cdot \frac{g}{Q} - 1}. \quad (20.47)$$

Имея в виду [см. формулу (20.26)], что

$$\frac{cg}{Q} = \omega_c^2$$

представляет собой квадрат собственной частоты поперечных колебаний вала, уравнение (20.47) можно переписать так:

$$w = \frac{e}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}. \quad (20.48)$$

Из этого уравнения видно, что прогиб вала  $w$  будет быстро увеличиваться с приближением значения угловой скорости вращения вала  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_c$  поперечных колебаний вала. Критическим значением скорости вращения вала будет

$$\omega_{кр} = \omega_c = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (20.49)$$

При этом знаменатель в выражении (20.48) равен нулю, а поэтому прогиб теоретически равен бесконечности, т. е. должен безгранично увеличиваться вплоть до разрушения вала. В действительности же из-за имеющихся в системе потерь энергии, которые в приведенном расчете не учитывались, на практике при попадании вала в резонанс прогибы не всегда принимают значения, опасные для эксплуатации.

Интересно отметить, что при скоростях вращения вала, больших критических, частота колебания вала изменяется и он начинает вращаться спокойно. Опыты показывают, что при  $\omega > \omega_c$  центр тяжести диска будет располагаться между линией, соединяющей опоры, и искривленной осью вала (рис. 531, б). В этом случае уравнение для определения прогиба будет иметь вид

$$\frac{Q}{g} (\omega - e) \omega^2 = c\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{e}{1 - \frac{cg}{\omega^2 Q}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}. \quad (20.50)$$

Отсюда видно, что с увеличением скорости вращения вала прогиб  $w$  уменьшается и приближается к эксцентриситету  $e$ , т. е. при очень больших скоростях центр тяжести диска достигает линии, соединяющей опоры, и изогнутый вал вращается вокруг центра тяжести  $S$  диска.

*Пример 84.* Определить диаметр вала турбогенератора мощностью  $N = 100$  л. с., несущего посредине пролета длиной  $l = 100$  см диск весом  $Q = 150$  кг, в двух случаях: 1) для жесткого вала с критическим числом оборотов выше  $n = 3000$  об/мин на 35%; 2) для гибкого вала с критическим числом оборотов ниже рабочего числа в три раза. Массой вала по сравнению с массой диска пренебречь. Дано: эксцентриситет  $e = 0,01$  см;  $[\sigma] = 800$  кг/см<sup>2</sup>;  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Для первого случая определяем собственную частоту колебаний системы:

$$\omega_{ж} = \omega_{кр} = 1,35 \frac{\pi n}{30} = 1,35 \frac{3,14 \cdot 3000}{30} = 424 \text{ 1/сек.}$$

Диаметр жесткого вала находим из выражения

$$\omega_{ж} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{g48EJ}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48gE\pi d^4}{64Ql^3}},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_{ж}^2 4Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{424^2 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 100^3}{3 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 8,75 \text{ см.}$$

Его максимальный прогиб при колебаниях

$$f = \frac{e}{\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{0,01}{1,35^2 - 1} = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 8,75 \cdot 1,22 \cdot 10^{-2}}{100^2} = 128 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения, вызванные скручиванием,

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{71 \text{ 620N}}{\frac{\pi d^3}{16} n} = \frac{71 \text{ 620} \cdot 100 \cdot 16}{3,14 \cdot 8,75^3 \cdot 3000} = 18 \text{ кг/см}^2.$$

Эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{128^2 + 4 \cdot 18^2} = 133 < [\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2.$$

Во втором случае собственная частота колебаний системы с гибким валом

$$\omega_r = \omega_{кр} = \frac{\omega}{3} = \frac{\pi n}{30 \cdot 3} = \frac{3,14 \cdot 3000}{3 \cdot 30} = 105 \text{ 1/сек.}$$

Диаметр гибкого вала

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_r^2 \cdot 4 \cdot Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{105^2 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 100^3}{3 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 4,35 \text{ см.}$$

Динамический прогиб

$$f = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2} = \frac{0,01}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4,35 \cdot 1,13 \cdot 10^{-2}}{100^2} = 59 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения кручения

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{71 \text{ 620N}}{\frac{\pi d^3}{16} n} = \frac{71 \text{ 620} \cdot 100 \cdot 16}{3,14 \cdot 4,35^3 \cdot 3000} = 146 \text{ кг/см}^2.$$

Эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{59^2 + 4 \cdot 146^2} = 298 < [\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2.$$

## § 129. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Системой с двумя, тремя и т. д. степенями свободы называется, как указывалось выше, такая система, положение которой в любой момент времени может определяться соответственно двумя, тремя и т. д. независимыми параметрами.

Типичными колебательными системами такого рода, часто встречающимися в машиностроении, являются вал с несколькими дисками (рис. 532), совершающий крутильные колебания, балка с несколькими сосредоточенными массами (рис. 533), совершающая поперечные колебания, и т. п. В первом случае движение описывается углом поворота вокруг продольной оси вала, а во втором — вертикальным перемещением сосредоточенных масс в направлении, перпендикулярном к оси балки. Примером колебательной системы, в которой движение

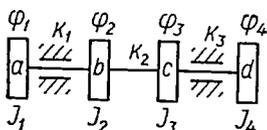


Рис. 532.

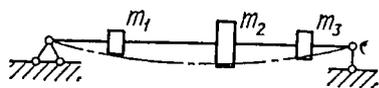


Рис. 533.

массы определяется одновременно линейным смещением и углом поворота, может служить кузов автомобиля, схема которого приведена на рис. 534.

Рассматривая колебания упругих систем с несколькими степенями свободы, дифференциальные уравнения движения во многих случаях можно получить, как и в случае систем с одной степенью свободы, пользуясь принципом Даламбера.

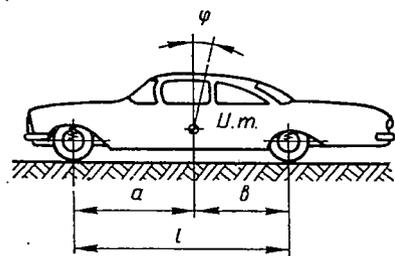


Рис. 534.

Движение массы  $m$  в пространстве рассмотрим в координатной системе  $xuz$ . Составляя уравнения равновесия, к равнодействующим  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  всех внешних сил, действующих на массу и направленных соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , необходимо добавить силы инерции. Составляющие сил инерции на направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны

соответственно  $-m\ddot{x}$ ,  $-m\ddot{y}$ ,  $-m\ddot{z}$ . Тогда уравнения движения будут

$$X - m\ddot{x} = 0; \quad Y - m\ddot{y} = 0; \quad Z - m\ddot{z} = 0. \quad (20.51)$$

Если рассматривается система из нескольких масс, свободных в пространстве, то уравнения (20.51) должны быть написаны для каждой массы системы.

Теперь рассмотрим применение принципа Даламбера для составления уравнения движения колебательной системы (рис. 535, а), состоящей из двух масс  $m_1$  и  $m_2$  и двух пружин с жесткостями  $c_1$  и  $c_2$ . Будем полагать,

что указанные массы могут перемещаться без трения только в горизонтальном направлении вдоль оси  $x$ . Перемещение первой массы обозначим через  $x_1$ , второй — через  $x_2$ .

В процессе колебания на массу  $m_1$  в качестве внешних сил будут действовать сила  $c_1 x_1$  натяжения внешней пружины и сила  $c_2(x_2 - x_1)$  натяжения второй пружины. Силами сопротивления пренебрегаем. Тогда, пользуясь принципом Даламбера, уравнение движения первой массы

$$X - m_1 \ddot{x} = 0$$

запишем в виде

$$-c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0,$$

или

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0.} \quad (20.52)$$

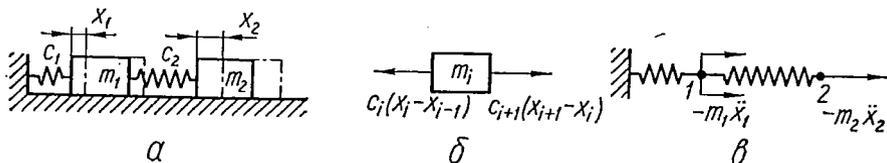


Рис. 535.

На массу  $m_2$  действует только сила натяжения второй пружины

$$-c_2(x_2 - x_1),$$

а уравнение движения будет

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0.} \quad (20.53)$$

Если бы система имела не две, а три или более последовательно соединенных масс, то уравнение движения для каждой из масс содержало бы три или более неизвестных координат. Так например, силы упругости пружины, действующие на  $i$ -ю массу, полностью определяются смещениями  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  и  $x_{i+1}$  (рис. 535, б).

Составляя дифференциальные уравнения движений, можно было воспользоваться и другим методом.

Действительно, при рассмотрении той же колебательной системы можно было бы считать, что имеются две связанные между собой пружины (рис. 535, в), которые подвергаются действию сил инерции  $-m_1 \ddot{x}_1$  и  $-m_2 \ddot{x}_2$ , приложенных соответственно в местах удаленных масс (точки 1 и 2). Тогда первая пружина нагружена силой  $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$ , а вторая — силой  $-m_2 \ddot{x}_2$ . При этом перемещение первой массы, равное удлинению первой пружины,

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1},$$

а перемещение второй массы определится суммарным удлинением обеих пружин:

$$x_2 = x_1 - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{c_2}.$$

Несколько преобразовав последние уравнения, окончательно получим:

$$x_1 c_1 + m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0; \quad (20.54)$$

$$x_2 c_1 c_2 + c_2 (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) + c_1 m_2 x_2 = 0. \quad (20.55)$$

Полученная система уравнений движений (20.54) и (20.55) эквивалентна системе уравнений (20.52) и (20.53), но отличается своей структурой.

Заметим, что второй способ в задачах рассмотренного типа является громоздким, так как смещение, например, концевой точки зависит от сил инерции всех масс, а следовательно, выразится через вторые производные от смещений всех точек.

Кроме указанных двух способов, существует третий, наиболее общий способ, основанный на применении известных из теоретической механики уравнений Лагранжа второго рода, которые при отсутствии сил сопротивления и внешних возмущающих сил имеют вид

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i},} \quad (20.56)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

где  $T$  и  $U$  — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы.

Применяя уравнения Лагранжа для составления уравнений движения рассматриваемой двухмассовой системы, прежде всего запишем выражения кинетической и потенциальной энергии этой системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2};$$

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Соответствующие производные, входящие в уравнение (20.56), будут такими:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

Тогда уравнение (20.56) применительно к рассматриваемому случаю примет вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0; \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Заметим, что уравнения, полученные из уравнений Лагранжа, всегда совпадают с уравнениями, полученными способом, основанным на использовании принципа Даламбера. В некоторых случаях, в частности для систем цепной структуры типа рассматриваемой, по соображениям простоты выкладок следует пользоваться первым способом; при расчете изгибных колебаний оказывается более удобным второй способ.

Итак, предположим, что уравнения движения системы с двумя степенями свободы одним из рассмотренных способов получены. Пусть эти уравнения имеют вид (20.52) и (20.53):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (20.57)$$

Решение системы этих двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в следующей форме:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ x_2 &= \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}} \quad (20.58)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\omega$  и  $\alpha$  — постоянные, которые нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись уравнения (20.57). Подставляя решения (20.58) в уравнения (20.57), получим:

$$\begin{aligned} -m_1 \lambda_1 \omega^2 + c_1 \lambda_1 - c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) &= 0; \\ -m_2 \lambda_2 \omega^2 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda_1 (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) - \lambda_2 c_2 &= 0; \\ -\lambda_1 c_2 + \lambda_2 (c_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (20.59)$$

Уравнения (20.59) содержат три неизвестных: амплитуды  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и частоту  $\omega$ . Из этих двух уравнений найти указанные три величины нельзя, однако из них можно определить частоту. Действительно, рассматривая систему уравнений (20.59), видим, что случай колебательного движения, когда  $\lambda_1 \neq 0$  и  $\lambda_2 \neq 0$ , возможен тогда, когда будет равен нулю определитель указанной системы однородных уравнений относительно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т. е.

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Написав этот определитель в развернутом виде, после преобразований получим:

$$\omega^4 - \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно  $\omega^2$ , и легко показать, что оно имеет два действительных положительных корня:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}};$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Соответственно могут быть получены и две собственные частоты:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \quad (20.60)$$

Получившийся в соответствии с выражениями (20.60) двухчастотный колебательный процесс в общем виде следует записать так:

$$x_1 = \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$x_2 = \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (20.61)$$

Здесь первый индекс у амплитуды  $\lambda$  показывает номер координаты, а второй — номер слагаемого в строке, или номер частоты.

Амплитуды колебаний связаны отношением, определяемым из первого или второго уравнений системы (20.59):

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2},$$

или в соответствии с принятой индексацией

$$x_{21} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2};$$

$$x_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2}.$$

Тогда уравнения (20.61) могут быть записаны в виде

$$x_1 = \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$x_2 = x_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + x_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (20.62)$$

При этом собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также отношения амплитуд  $x_{21}$  и  $x_{22}$  зависят от параметров колебательной системы. Что касается значений амплитуд  $\lambda_{11}$  и  $\lambda_{21}$ , а также углов сдвига фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , то они должны быть определены из четырех начальных условий, выражающих значения смещений и скоростей обеих масс в начальный момент времени.

В случае, когда движение системы вызвано ударом по массе  $m_2$ , что соответствует следующим начальным условиям при  $t = 0$ :

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0;$$

$$\dot{x}_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = v_0.$$

из уравнений (20.62) получим:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21} \lambda_{11} \sin \alpha_1 + \kappa_{22} \lambda_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ \lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21} \lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \kappa_{22} \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= v_0.\end{aligned}$$

Отсюда, поскольку  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\kappa_{21}$  и  $\kappa_{22}$  известны, находим, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\kappa_{21} - \kappa_{22}}; \quad \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\kappa_{22} - \kappa_{21}}.$$

Подбирая искусственным образом начальные условия так, чтобы амплитуда  $\lambda_{12} = 0$ , можно получить одночастотные колебания, описываемые одной гармоникой:

$$\begin{aligned}x_{11} &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ x_{21} &= \kappa_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1).\end{aligned} \quad (20.63)$$

Колебания, описываемые одной гармоникой, называются *первыми нормальными* колебаниями. Поскольку величина  $\kappa_{21}$  отношения амплитуд не зависит от начальных условий, то рассматриваемые одночастотные колебания характеризуются вполне определенным соотношением амплитуд, зависящим только от параметров системы. Следовательно,  $\kappa_{21}$  определяет первую нормальную форму колебаний.

Вторая форма колебаний, очевидно, определится отношением  $\kappa_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}}$  в том случае, когда начальные условия будут выбраны такими, при которых  $\lambda_{11} = 0$  и осуществляются вторые нормальные колебания, описываемые формулами

$$\begin{aligned}x_{12} &= \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_{22} &= \kappa_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).\end{aligned} \quad (20.64)$$

Заметим, что число нормальных форм колебаний и равное ему число собственных частот совпадает с числом степеней свободы колебательной системы и что любые две нормальные формы колебаний ортогональны, т. е. имеет место соотношение

$$m_1 \lambda_{11} \lambda_{12} + m_2 \lambda_{21} \lambda_{22} = 0.$$

Установив общие принципы определения основных параметров колебаний упругих систем с несколькими степенями свободы, перейдем к рассмотрению важнейших видов колебаний, часто встречающихся в инженерном деле.

### § 130. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОВ И СИСТЕМ ПЕРЕДАЧ

Представим себе механическую систему, состоящую из упругого вала с насаженными на него дисками (рис. 53б, а), совершающую крутильные колебания. Пусть  $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$  — моменты инерции масс дисков относительно оси вала, а  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  — углы пово-







Эти коэффициенты могут быть вычислены также при помощи формулы Верещагина

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\overline{\Omega_i M_{ck}}}{EJ},$$

где  $\overline{\Omega_i}$  — площадь эпюры  $\overline{M_i}$  (или части  $\overline{M_i}$ );

$\overline{M_{ck}}$  — ордината эпюры  $\overline{M_k}$ , расположенная против центра тяжести площади  $\overline{\Omega_i}$ .

Напомним также, что согласно теореме о взаимности перемещений (теореме Максвелла)

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Основная система уравнений (20.74) в простейшем случае для колебательной системы с одной степенью свободы приводит к одному уравнению с одним неизвестным:

$$w_1 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{11},$$

что эквивалентно известному уравнению

$$m \ddot{w} + c_1 w = 0,$$

поскольку

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Для системы с двумя степенями свободы на основании уравнений (20.74) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями прогиба  $w_1$  и  $w_2$ :

$$w_1 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{12};$$

$$w_2 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{22}.$$

При решении системы уравнений (20.74) функцию прогиба можно принять в виде

$$w_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha).$$

Подставляя это выражение в основные уравнения (20.74), получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд  $\lambda_i$  и частот  $\omega_i$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 + \dots + \lambda_n m_n \delta_{1n} \omega^2 &= 0; \\ \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 + \lambda_2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) + \dots + \lambda_n m_n \delta_{2n} \omega^2 &= 0; \\ \dots &\dots \\ \lambda_1 m_1 \delta_{n1} \omega^2 + \lambda_2 m_2 \delta_{n2} \omega^2 + \dots + \lambda_n (m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (20.75)$$

При наличии колебаний амплитуда  $\lambda_i$  не обращается в нуль, если определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (20.75), равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 & \dots & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20.76)$$

Написав этот определитель в развернутом виде и обозначив через  $a_i$  коэффициенты при различных степенях  $\omega$ , получим частотное уравнение  $n$ -й степени для квадрата частоты  $\omega$ :

$$1 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \dots + (-1)^n a_n\omega^{2n} = 0. \quad (20.77)$$

Из уравнения (20.77) получим:

$$\omega_1 = + \sqrt{\omega_1^2}; \quad \omega_2 = + \sqrt{\omega_2^2}; \quad \dots; \quad \omega_n = + \sqrt{\omega_n^2};$$

$$(\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_n).$$

Тогда общее решение системы уравнений можно записать так:

$$\omega_i = \lambda_{i1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{i2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{in} \sin(\omega_n t + \alpha_n),$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{1n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ \omega_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{2n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ &\dots \\ \omega_n &= \lambda_{n1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{n2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{nn} \sin(\omega_n t + \alpha_n). \end{aligned} \quad (20.78)$$

Таким образом, в каждом направлении  $i = 1, 2, \dots, n$  происходят многочастотные (многотонные колебания).

В частном случае системы с двумя степенями свободы уравнения (20.75) примут вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2\delta_{12}\omega^2 &= 0; \\ \lambda_1 m_1\delta_{21}\omega^2 + \lambda_2 (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Определитель (20.76) при этом будет

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Записав определитель в развернутом виде, найдем частотное уравнение

$$\omega^4 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0,$$

откуда первая и вторая частоты колебаний определяются соответственно формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_2} \left[ \delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_2} \left[ \delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}$$

*Пример 85.* Определить собственную частоту колебаний балки (рис. 539), несущей три одинаковых сосредоточенных груза массой  $m$  каждый.

Прежде всего определим перемещения точек приложения грузов под действием единичных сил  $\bar{P}_1 = 1$ ,  $\bar{P}_2 = 1$  и  $\bar{P}_3 = 1$ . С этой целью построим эпюры изгибающих моментов от указанных единичных сил (рис. 540). Пользуясь фор-

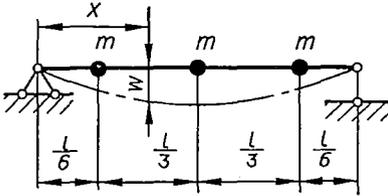


Рис. 539.

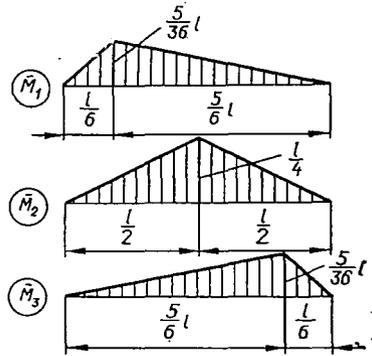


Рис. 540.

мулой Верещагина, найдем перемещения от единичных нагрузок:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = 75k; \quad \delta_{22} = 243k; \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{23} = 117k; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 51k,$$

где 
$$k = \frac{l^3}{9 \cdot 1296EJ}.$$

Имея значения  $\delta_{in}$ , составим определитель, аналогичный выражению (20.76):\*

$$\begin{vmatrix} 75mk\omega^2 - 1 & 117mk\omega^2 & 51mk\omega^2 \\ 117mk\omega^2 & 243mk\omega^2 - 1 & 117mk\omega^2 \\ 51mk\omega^2 & 117mk\omega^2 & 75mk\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Записав полученный определитель в развернутом виде, найдем уравнение частоты:

$$77\,760 (mk\omega^2)^3 - 12\,096 (mk\omega^2)^2 + 393mk\omega^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет следующих три корня, соответствующих трем значениям собственных круговых частот колебаний рассматриваемой упругой системы:

$$\omega_1 = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad (20.80)$$

$$\omega_2 = \frac{22,05}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad (20.81)$$

$$\omega_3 = \frac{36,00}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}. \quad (20.82)$$

§ 132. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

**Поперечные колебания струны.** Выведем дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Для этого рассмотрим отклонение струны, закрепленной в точках  $A$  и  $B$  (рис. 541, а). Первоначальное ее натяжение пусть будет  $P$ . Будем считать отклонение незначительным, а изменением усилия натяжения  $P$  при этом пренебрежем, т. е.  $P = \text{const}$ . Длина струны  $l$ .

Полагая, что при отклонении все точки струны находятся в плоскости  $xy$ , рассмотрим элемент струны, имеющий массу  $dm$ ; конечные точки его будут  $x$  и  $x + dx$ . Проведем касательные к струне в крайних точках элемента; углы наклона касательных к оси  $x$  будут соответственно  $\alpha$  и  $\alpha_1$  (рис. 541, б). Считаем их также малыми.

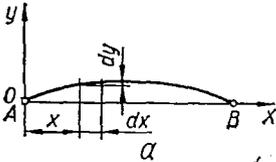
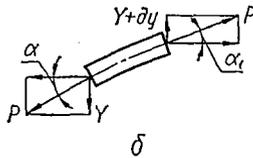


Рис. 541.



Составляющая натяжения по оси  $Oy$  в точке  $x$

$$Y = -P \sin \alpha,$$

а в точке  $x + dx$

$$Y + \partial Y = P \sin \alpha_1.$$

В силу малости углов можно принять, что

$$\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x};$$

$$\sin \alpha_1 \approx \text{tg } \alpha_1 = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Сумма проекций натяжений на ось  $y$  составляет

$$\partial Y = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Чтобы найти уравнение движения, нужно, следуя принципу Даламбера, эту силу приравнять силе инерции элемента струны, равной  $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , что дает

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (20.83)$$

Обозначив через  $Q$  вес всей струны, для  $dm$  получим следующее выражение:

$$dm = \frac{Q}{gl} dx,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Тогда уравнение (20.83) примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Pgl}{Q} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (20.84)$$

Обозначая

$$\frac{Pgl}{Q} = a^2,$$

выражение (20.84) запишем так:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}. \quad (20.85)$$

Это и есть уравнение плоских поперечных колебаний натянутой струны.

Теперь задача состоит в том, чтобы отыскать  $y$  как функцию от  $x$  и  $t$ , т. е.

$$y = F(x, t).$$

Эта функция должна удовлетворять:

1) дифференциальному уравнению (20.85);

2) граничным условиям, т. е. при  $x = 0$  и  $x = l$  ордината  $y = 0$ , или

$$F(0, t) = 0; \quad F(l, t) = 0; \quad (20.86)$$

3) начальным условиям, т. е. при  $t = 0$  она должна обращаться в заданную функцию провесов:

$$F(x, 0) = f(x). \quad (20.87)$$

Кроме того, частная производная по  $t$  при  $t = 0$  должна обращаться в заданную функцию  $v(x)$  (начальная скорость):

$$\frac{\partial F(x, 0)}{\partial t} = v(x). \quad (20.88)$$

Условие (20.87) означает, что в начальный момент, т. е. при  $t = 0$ , струна имеет заданную форму, например такую, какую она примет, если будет оттянута штифтом  $S$  (рис. 542). В момент  $t = 0$  штифт убирают и струна начинает свои колебания.

Условие (20.88) означает, что в начальный момент все точки струны имеют заданную скорость, в частности могут находиться в состоянии покоя, как это имеет место в случае, показанном на рис. 542.

Решение уравнения (20.85), следуя методу Фурье, ищем в виде

$$\boxed{y = XT}, \quad (20.89)$$

где  $X$  и  $T$  — соответственно функции  $x$  и  $t$ :

$$X = f_1(x); \quad T = f_2(t).$$

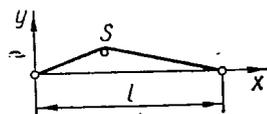


Рис. 542.

Продифференцировав выражение (20.89) по  $x$  и  $t$ , получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (20.85) последнее примет вид

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

или

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (20.90)$$

Приравнивая правую и левую части последнего уравнения одной и той же постоянной величине —  $k^2$ , получим два уравнения:

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 T; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{k^2}{a^2} X.} \quad (20.91)$$

Частные решения этих двух обыкновенных дифференциальных уравнений следующие:

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \cos kt; & T_2 &= \sin kt; \\ X_1 &= \cos \frac{k}{a} x; & X_2 &= \sin \frac{k}{a} x. \end{aligned}} \quad (20.92)$$

В этом легко убедиться, подставив их в уравнение (20.91).

Из функций (20.92)  $\cos \frac{k}{a} x$  следует исключить как выражение, не удовлетворяющее первому из условий (20.86), так как оно не обращается в нуль при  $x=0$ . Чтобы  $\sin \frac{k}{a} x$  равнялся нулю при  $x=l$ , нужно, чтобы  $kl = a n \pi$ , откуда  $k = \frac{a n \pi}{l}$ , где  $n$  — целое число. Равенство  $kl = a n \pi$  называется *уравнением периодов* или *уравнением частоты*. Оно получается непосредственно из граничных условий.

Теперь имеем два частных решения уравнения (20.85):

$$y_1 = \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{a n \pi}{l} t; \quad y_2 = \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{a n \pi}{l} t. \quad (20.93)$$

Умножив каждое из этих решений на неопределенные коэффициенты  $A$  и  $B$  и сложив эти два решения, получим общее решение в виде

$$\boxed{y = \sin \frac{n\pi}{l} x \left( A_n \cos \frac{a n \pi}{l} t + B_n \sin \frac{a n \pi}{l} t \right),} \quad (20.94)$$

или, полагая

$$A_n = C_n \cos \frac{a n \pi}{l} \tau_n; \quad B_n = C_n \sin \frac{a n \pi}{l} \tau_n.$$

где  $C_n$  и  $\tau_n$  — постоянные, уравнение (20.94) запишем в виде

$$y = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{an\pi}{l} (t - \tau_n). \quad (20.95)$$

Полученное уравнение характеризует движение как периодическое, т. е. колебательное. Период колебаний

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{an\pi}{l}} = \frac{2l}{an}, \quad (20.96)$$

а частота колебаний

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{an}{2l}. \quad (20.97)$$

При  $n = 1$  струна колеблется в основном тоне (с одной полуволной). При  $n = 2$  струна будет колебаться, образуя две полуволны, при  $n = 3$  — с тремя полуволнами (рис. 543).

Характер колебаний, которые струна совершает в действительности, зависит от начальных условий. Например, струна будет колебаться только в основном тоне, если при  $t = 0$  она имела форму первой кривой ( $n = 1$ ) и все ее точки были в покое. Если же начальная форма струны иная, то, кроме основного тона, появляются и обертоны, так как колебания струны представляют совокупность налагающихся друг на друга отдельных колебаний. Уравнение движения примет в этом случае такой вид:

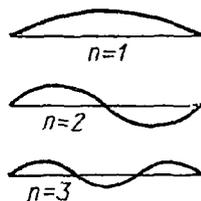


Рис. 543.

$$y = \sum_n \left( A_n \cos n \frac{\pi a}{l} t + B_n \sin n \frac{\pi a}{l} t \right) \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (20.98)$$

Для окончательного решения задачи нужно из начальных условий (20.87) и (20.88) определить коэффициенты  $A$  и  $B$  уравнения (20.98).

Из условия (20.87)

$$(y)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad (20.99)$$

а из условия (20.88)

$$\left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = v(x). \quad (20.100)$$

Здесь  $f(x)$  и  $v(x)$  — функции, заданные в интервале от 0 до  $l$ .

Равенства (20.99) и (20.100) требуют разложения этих функций в ряды, члены которых представляют собой тригонометрические функции углов, кратных  $\frac{\pi x}{l}$ . Эта задача решается методом Фурье, который, как известно, заключается в том, что равенство (20.99) умножают на

$\sin m \frac{\pi x}{l}$  и интегрируют по всей длине от 0 до  $l$ . В результате этого интегрирования получают:

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (20.101)$$

Все члены правой части этого равенства, кроме одного, обращаются в нуль, так как при  $n \neq m$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad (20.102)$$

а при  $n = m$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}. \quad (20.103)$$

Для доказательства равенств (20.102) и (20.103) вспомним, что

$$\begin{aligned} \cos(x - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(x + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

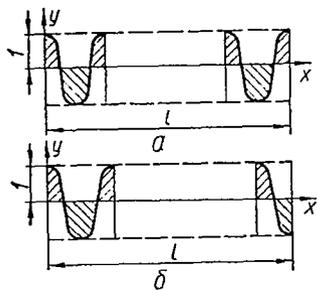


Рис. 544.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin n \frac{\pi x}{l} \sin m \frac{\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй интеграл правой части этого равенства. Он представляет собой площадь, ограниченную кривой

$$y = \cos(n+m) \frac{\pi x}{l}$$

и ординатами  $x=0$  и  $x=l$ . Если  $n+m$  — четное число, то кривая имеет вид, показанный на рис. 544, а, если  $n+m$  — нечетное число — вид на рис. 544, б. Площади отдельных частей в обоих случаях взаимно уничтожаются. Интеграл

$$\int_0^l \cos(n-m) \frac{\pi x}{l} dx$$

также обращается в нуль для всех значений  $n \neq m$ , а при  $n = m$  его величина равна  $l$ .

Таким образом, в правой части равенства (20.101) только один член, содержащийся в равенстве (20.103), не обращается в нуль. Он по доказанному равен  $\frac{A_n l}{2}$ , откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (20.104)$$

Аналогично

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l v(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (20.105)$$

С помощью этих равенств вполне можно определить ряд (20.98), а вместе с тем и движение струны.

**Продольные колебания стержней.** Перейдем к рассмотрению колебаний призматических стержней, обладающих в отличие от струны значительной поперечной жесткостью. Прежде всего напомним, что различают три типа их колебаний: продольные, поперечные и крутильные.

При продольных колебаниях все частицы стержня движутся параллельно его оси (рис. 545, а). Сжатие и растяжение поочередно следуют друг за другом как во времени, так и в пространстве.

Выведем дифференциальное уравнение колебаний стержня. С этой целью рассмотрим условие динамического равновесия участка колеблющегося стержня. Сечения  $a$  и  $b$  (рис. 545, б), ограничивающие элементарную длину  $dx$ , периодически перемещаются. Перемещение  $u$  произвольного сечения с координатой  $x$  может быть выражено как  $u = f(x, t)$ . Это уравнение указывает на наличие в стержне относительных перемещений отдельных его поперечных сечений. Если сечение  $a$  перемещается на  $u$ , а  $b$  — на  $u + du$ , то  $du$  есть изменение расстояния между  $a$  и  $b$ , т. е. изменение длины  $dx$ . Вследствие относительного удлинения части  $I$  стержня на величину  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  в сечении  $a$  элемента  $dx$  (рис. 545, в) действует осевая сила

$$N_a = EF \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В сечении  $b$ , расположенном на бесконечно близком расстоянии  $dx$ , осевая сила

$$N_b = N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x} dx = EF \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right].$$

Равнодействующая этих усилий должна быть равна силе инерции элемента, величина которой при массе стержня  $m$  и длине  $l$  будет

$$j = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

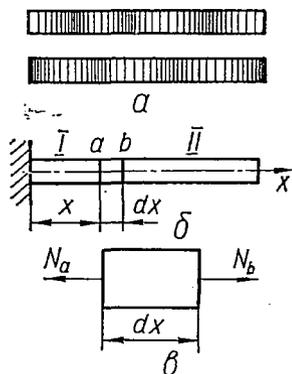


Рис. 545.

Тогда уравнение движения

$$EF \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (20.106)$$

После сокращения на  $dx$  и замены  $\frac{m}{lF}$  на  $\rho$  (плотность материала) получим:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (20.107)$$

Это уравнение замечательно тем, что выражаемое им движение не зависит от размеров стержня. Если положить

$$\frac{E}{\rho} = a^2,$$

то получим уравнение, совпадающее по форме с уравнением (20.85) движения струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (20.108)$$

Поэтому формулы, полученные при рассмотрении колебаний струны, могут быть автоматически использованы для расчета продольных колебаний стержней. При этом только потребуется подставить соответствующее значение для коэффициента  $a$ .

**Крутильные колебания стержней.** При колебаниях кручения какого-нибудь, например цилиндрического, стержня движение лучше всего охарактеризовать волнистой линией, вычерчивая ее на развернутой поверхности стержня (рис. 546, а).

Пусть сечение на расстоянии  $x$  закручивается относительно неподвижного сечения на угол  $\varphi$ , а сечение на расстоянии  $x + dx$  — на угол  $\varphi + d\varphi$  (рис. 546, б). Тогда величина относительного угла закручивания элемента длиной  $dx$  будет  $\frac{d\varphi}{dx}$  и крутящие моменты в обоих поперечных сечениях соответственно будут

$$GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } GJ_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right).$$

Приравнявая равнодействующую этих крутящих моментов моменту инерции вращения элемента длиной  $dx$ , равному  $\rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx$ , получим уравнение движения

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \rho J_p dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

которое после сокращения на  $J_p$  и  $dx$  примет вид

$$\boxed{G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \quad (20.109)$$

Обозначая  $\frac{G}{\rho}$  через  $a^2$ , вновь получаем уравнение в форме колебания струны:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} \quad (20.110)$$

Поэтому и в данном случае формулы, выведенные при рассмотрении колебаний струны, остаются в силе.

### § 133. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

При выводе дифференциального уравнения поперечных колебаний стержня рассмотрим динамическое равновесие участка  $dx$ , выделенного из произвольно закрепленной балки, предположим по схеме, показанной на рис. 547, а.

Пользуясь принципом Даламбера, спроектируем на ось  $w$  силы, действующие на рассматриваемый элемент (рис. 547, б), и приравняем их нулю:

$$Q - q_i dx - Q - \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0,$$

откуда

$$q_i = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (20.111)$$

где  $Q$  — поперечная сила;

$q_i$  — интенсивность сил инерции массы балки, направленных параллельно оси прогибов  $w$ ;

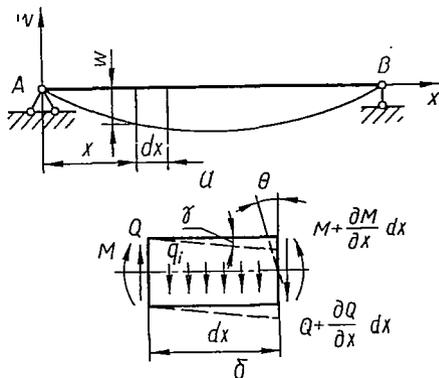


Рис. 547.

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (20.112)$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения стержня;  
 $\rho$  — плотность материала.

Подставляя выражение (20.112) в уравнение (20.111), найдем уравнение поступательного движения элемента колеблющегося стержня в виде

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (20.113)$$

Кроме поступательного движения, рассматриваемый элемент совершает также вращательное движение в плоскости  $wx$ . Для вывода

уравнения движения элемента с учетом его вращения выразим угол между осью элемента и осью  $x$ , зависящий не только от поворота поперечного сечения  $\Theta$ , но и от сдвига  $\gamma$ , следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Theta + \gamma. \quad (20.114)$$

Учитывая известную связь между изгибающим моментом  $M$  в сечении и углом поворота  $\Theta$  поперечного сечения

$$M = EJ \frac{d\Theta}{dx}, \quad (20.115)$$

а также между поперечной силой  $Q$  и углом сдвига  $\gamma$ , который в нашем случае будет отрицательным:

$$Q = -k\gamma FG, \quad (20.116)$$

где  $k$  — коэффициент формы сечения, на основании зависимости (20.114) выражение для  $Q$  согласно формуле (20.116) можно записать в виде

$$Q = -kFG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \Theta \right). \quad (20.117)$$

Момент инерции вращения массы рассматриваемого элемента будет

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \int y^2 dm = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \int y^2 \rho F(x) dx = \rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} dx. \quad (20.118)$$

Учитывая выражение (20.118) и рассматривая, пользуясь принципом Даламбера, динамическое равновесие вращения стержня, будем иметь:

$$Q dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx = -\rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} dx. \quad (20.119)$$

Поделив уравнение (20.119) на  $dx$  и учитывая формулы (20.115) и (20.117), запишем его в виде

$$-kFG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \Theta \right) - EJ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0. \quad (20.120)$$

Продифференцировав последнее уравнение по  $x$ , получим:

$$-kFG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - EJ \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} + \rho J \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial t^2} = 0. \quad (20.121)$$

Переписав уравнение (20.113) с учетом выражения (20.117) в виде

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kFG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (20.122)$$

и исключая из уравнений (20.121) и (20.122) угол  $\Theta$ , легко получить дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня постоянного сечения.

Действительно, определив из уравнения (20.122)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\rho}{kG} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

а также выразив  $\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2}$  и подставив их в уравнение (20.121), окончательно получим:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (20.123)$$

Если пренебречь силами инерции вращения элемента, а также влиянием на прогиб поперечной силы, как это обычно и принято в инженерной практике при рассмотрении поперечных колебаний тонких длинных стержней, то уравнение (20.123) существенно упрощается и его можно будет записать в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (20.124)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (20.125)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (20.126)$$

представляет собой скорость распространения волны деформации по стержню.

Простейшим периодическим решением уравнения (20.125) свободных поперечных колебаний стержня является так называемое *главное колебание*, в котором функция прогиба колеблющегося стержня изменяется с течением времени по гармоническому закону:

$$w = \varphi(x) \sin(\omega t + \alpha). \quad (20.127)$$

Функция  $\varphi(x)$ , устанавливающая закон распределения максимальных амплитудных отклонений точек оси стержня, называется *формой главного колебания*, или *собственной формой*. Собственных форм колебаний прямого стержня, как известно, бесконечное множество, и каждой из них соответствует определенное значение частоты  $\omega$ , которая называется *собственной частотой*. Эти частоты и соответствующие им собственные формы определяют с помощью уравнения собственных форм и краевых условий задачи.

Для получения уравнения собственных форм подставим выражение (20.127) в уравнение (20.125). После сокращения на  $\sin(\omega t + \alpha)$  получим:

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} - k^4 \varphi(x) = 0, \quad (20.128)$$

где

$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}. \quad (20.129)$$

Уравнение (20.128) имеет четыре независимых частных решения:  
 $\cos kx$ ;  $\sin kx$ ;  $\operatorname{ch} kx$ ;  $\operatorname{sh} kx$ ,

а его общее решение может быть записано так:

$$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx. \quad (20.130)$$

Четыре произвольные постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  следует подбирать так, чтобы функция  $\varphi(x)$  удовлетворяла условиям закрепления концов стержня.

В обычных случаях число краевых условий равно числу произвольных постоянных — по два на каждом конце. Все они выражаются равенством нулю двух из следующих четырех величин:

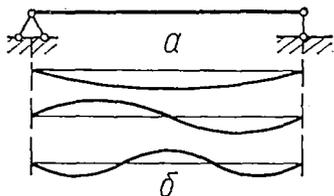


Рис. 548.

$$\varphi(x); \quad \varphi'(x); \quad \varphi''(x); \quad \varphi'''(x),$$

пропорциональных соответственно прогибу, углу поворота (геометрические условия), изгибающему моменту и поперечной силе (динамические условия) при  $x = 0$  и  $x = l$ . Выполняя эти условия, получим четыре однородных уравнения, из которых найдем

соотношения между  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и частотные уравнения для определения собственных частот колебаний рассматриваемой системы.

Так, например, для стержня на двух опорах (рис. 548,  $a$ ) условия на концах следующие: при  $x = 0$   $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi''(x) = 0$ ; при  $x = l$   $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi''(x) = 0$ .

Запишем эти условия, исходя из формулы (20.130):

$$\begin{aligned} A + C &= 0; & B \sin kl + D \operatorname{sh} kl &= 0; \\ -A + C &= 0; & -B \sin kl + D \operatorname{sh} kl &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A = C = D = 0$$

и

$$B \sin kl = 0.$$

Так как для нетривиального решения  $B \neq 0$ , то

$$\sin kl = 0. \quad (20.131)$$

Выражение (20.131) и будет уравнением частоты для рассматриваемого случая поперечных колебаний балки, свободно опирающейся своими концами. Из уравнения (20.131) следует, что

$$k_i l = i\pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

но так как

$$k_i^4 = \frac{m\omega_i^2}{EJ} \quad (m = \rho F),$$

то собственные круговые частоты колебания рассматриваемой балки будут

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (20.132)$$

а частоты колебаний в герцах

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (20.133)$$

Для собственных форм колебаний балки согласно формуле (20.130) получим уравнение

$$\varphi_i(x) = B_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (20.134)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots$

Первые три собственные формы графически представлены на рис. 548, б.

Общее решение дифференциального уравнения (20.125) применительно к рассматриваемой балке на двух опорах будет иметь вид

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Коэффициенты  $a_i, b_i$  находят из начальных условий, выражающихся соотношениями

$$w(x, 0) = u(x); \quad \dot{w}(x, 0) = v(x),$$

имеющими место в момент  $t = 0$ , где  $u(x)$  и  $v(x)$  — некоторые заданные функции переменной  $x$ , определяющие начальное распределение по оси стержня поперечных отклонений и скоростей отдельных его элементов.

#### § 134. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ

Во многих случаях при решении задач колебаний систем удобно исходить из рассмотрения принципа сохранения энергии системы. Так, рассматривая простейшую колебательную систему с одной степенью свободы (см. рис. 515), легко убедиться, что кинетическая энергия такой системы во время колебаний (массой пружины пренебрегаем) составляет величину

$$T = \frac{Q}{2g} \dot{x}^2,$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии деформации пружины и потенциальной энергии груза, зависящей от его положения.

При любом перемещении  $x$  нижнего конца пружины растягивающая сила в пружине будет  $(\delta_{\text{ст}} + x)c$ , а соответствующая потенциальная энергия, накапливаемая при этом в пружине,

$$U_{\text{п}}' = c \frac{(\delta_{\text{ст}} + x)^2}{2},$$

где  $\delta_{\text{ст}}$  — деформация пружины под действием статически приложенного груза  $Q$ .

Энергия пружины в положении равновесия, т. е. при  $x = 0$ , составляет

$$U_{\text{п}}'' = \frac{c\delta_{\text{ст}}^2}{2}.$$

Следовательно, увеличение потенциальной энергии в пружине при перемещении на величину  $x$

$$\begin{aligned} U_{\text{п}} = U_{\text{п}}' - U_{\text{п}}'' &= \frac{c(\delta_{\text{ст}} + x)^2}{2} - \frac{c\delta_{\text{ст}}^2}{2} = \\ &= c\delta_{\text{ст}}x + \frac{cx^2}{2} = Qx + \frac{cx^2}{2}. \end{aligned} \quad (20.135)$$

Потенциальная энергия, обусловленная положением груза при перемещении его на величину  $x$ , уменьшится на величину

$$U_{\text{г}} = Qx. \quad (20.136)$$

Тогда на основании последних двух равенств полное изменение потенциальной энергии колебательной системы при перемещении груза на величину  $x$

$$U = U_{\text{п}} - U_{\text{г}} = \frac{cx^2}{2}. \quad (20.137)$$

Благодаря тому, что груз  $Q$  всегда уравнивается начальной растягивающей силой, возникающей при статических растяжениях  $\delta_{\text{ст}}$ , окончательное выражение (20.137) для потенциальной энергии системы будет то же, что и для случая, когда  $Q = 0$  и удлинение пружины равно  $x$ .

Пользуясь принципом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии в системе при колебаниях, следует положить, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы остается постоянной, т. е.

$$T + U = \text{const},$$

или

$$\boxed{\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \text{const}.} \quad (20.138)$$

Величина постоянной в правой части равенства (20.138) зависит от начальных условий. Так, например, полагая, что при  $t = 0$  пере-

мещение  $x = x_0$ , а начальная скорость  $\dot{x}_0 = 0$ , будем иметь

$$\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.139)$$

Уравнение (20.139) показывает, что при колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергии остается равной начальной энергии деформации. При этом, когда колеблющийся груз находится в своем крайнем положении и его скорость равна нулю, вся энергия системы будет состоять только из потенциальной энергии деформации. При  $x = 0$ , т. е. когда груз проходит среднее положение, скорость достигает своего наибольшего значения и вся энергия системы будет состоять из кинетической энергии. На основании уравнения (20.139) имеем:

$$\frac{Q(\dot{x}^2)_{\max}}{2g} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.140)$$

Последнее уравнение можно использовать для вычисления частот колебаний системы. Как уже отмечалось, в данном случае мы имеем простое гармоническое движение, т. е. можем положить, что

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad (\dot{x})_{\max} = x_0 \omega.$$

Подставляя значения  $x$  и  $(\dot{x})_{\max}$  в уравнение (20.140), получим:

$$\frac{Qx_0^2 \omega^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}. \quad (20.141)$$

Это совпадает с ранее полученной формулой (20.2).

Описанный способ, основанный на принципе сохранения энергии, весьма часто используют для решения различных инженерных задач колебаний, в том числе более сложных, чем здесь были рассмотрены.

В заключение заметим, что изложенный здесь энергетический метод может быть использован для получения дифференциального уравнения колебаний рассматриваемой системы с одной степенью свободы. Действительно, продифференцировав уравнение (20.139), найдем:

$$\frac{Q}{2g} 2x\dot{x} + c \frac{2x\dot{x}}{2} = 0.$$

Отсюда получим ранее найденное дифференциальное уравнение движения (20.1):

$$\frac{Q\ddot{x}}{g} + cx = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}.$$

Сказанное здесь применительно к колебательной системе с одной степенью свободы справедливо также и по отношению к упругим колебательным системам с несколькими и с бесконечным числом степеней свободы.

### § 135. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

**Способ Рейлея.** При рассмотрении колебаний упругих систем с одной и с несколькими степенями свободы мы, как правило, пренебрегали массой упругого элемента по сравнению с колеблющейся сосредоточенной массой. Это имело место и в случае вертикальных колебаний груза, подвешенного на пружине (см. рис. 515) и в случае крутильных колебаний диска на валу (рис. 523), и в случае поперечных колебаний грузов, расположенных на балке (рис. 533), и в других случаях.

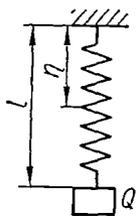


Рис. 549.

Хотя эти упрощения во многих практических случаях не вносят особых погрешностей в получаемые решения, тем не менее для некоторых технических задач желательно более детальное рассмотрение точности этих приближений. Для оценки влияния этих упрощений на получаемое значение частоты колебания упругой системы воспользуемся приближенным методом Рейлея.

Приближенность этого метода состоит в том, что при его применении делают некоторые допущения относительно конфигурации колебательной упругой системы во время колебания. Частоту колебаний по способу Рейлея определяют из баланса энергии системы.

Проиллюстрируем применение метода Рейлея на примере колебаний груза, подвешенного на пружине (рис. 549).

При допущении, что масса пружины мала по сравнению с массой подвешенного груза  $Q$ , тип колебания груза не может существенно зависеть от массы пружины и с достаточной точностью можно принять, что перемещение любого поперечного сечения ее на расстоянии  $\eta$  от закрепленного конца то же, что и в случае невесомой пружины, т. е. равно

$$\frac{x\eta}{l},$$

где  $l$  — длина пружины.

Если перемещение согласно принятому допущению не зависит от массы пружины, то, очевидно, потенциальная энергия системы будет такой же, как и в случае, если бы пружина была невесомой.

Кинетическую энергию системы определим следующим образом. Пусть  $q$  — вес единицы длины пружины. Тогда масса элемента пружины  $d\eta$  будет  $\frac{q}{g} d\eta$ , а соответствующая кинетическая энергия

$$dT_n = \frac{q}{2g} \left( \frac{\eta}{l} \cdot \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta.$$

Полная кинетическая энергия пружины, очевидно,

$$T_n = \int_0^l \frac{q}{2g} \left( \eta \cdot \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta = \frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{ql}{3}.$$

Это значение кинетической энергии пружины следует прибавить к кинетической энергии груза

$$T_Q = \frac{Q}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия, подлежащая учету при колебании системы,

$$T = T_n + T_Q = \frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left( Q + \frac{ql}{3} \right).$$

В то же время полное изменение потенциальной энергии системы при перемещении груза за величину  $x$  согласно уравнению (20.137)

$$U = \frac{cx^2}{2}.$$

Условие сохранения энергии должно быть записано в виде

$$\frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left( Q + \frac{ql}{3} \right) + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.142)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (20.139), можем заключить, что для оценки влияния массы пружины на период собственных колебаний нужно к весу груза  $Q$  прибавить одну треть веса пружины.

Это заключение, полученное при допущении, что вес пружины очень мал по сравнению с грузом, можно с достаточной степенью точности использовать и для случаев, когда вес пружины будет того же порядка, что и вес груза. Так, для  $ql = = 0,5Q$  ошибка приближенного решения составляет 0,5%, для  $ql = Q$  — около 0,75% и для  $ql = 2Q$  — около 3%.

В качестве второго примера рассмотрим колебания груза, расположенного посередине балки (рис. 550).

Следуя методу Рейлея и полагая, что вес  $ql$  балки мал по сравнению с весом  $Q$  груза, с достаточной точностью можно допустить, что кривая прогибов балки при колебании имеет такую же форму, как и кривая статических прогибов. Тогда, обозначая через  $f$  перемещение груза  $Q$  при колебании, получим перемещение любого элемента  $qdx$  балки на расстоянии  $x$  от опоры:

$$w = f \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3}. \quad (20.143)$$

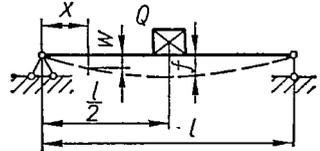


Рис. 550.

Кинетическая энергия самой балки

$$T_0 = 2 \int_0^{l/2} \frac{q}{2g} \left( \frac{df}{dt} \cdot \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_r = \frac{Q}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия колеблющейся системы

$$T = T_0 + T_r = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2. \quad (20.144)$$

Потенциальная энергия деформации балки при изгибе

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ},$$

или, учитывая, что

$$M = EJ \frac{d^2\omega}{dx^2},$$

а на основании выражения (20.143)

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{24}{l^3} fx,$$

получим:

$$U = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dx^2} \right)^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{EJ}{2} \left( \frac{24}{l^3} fx \right)^2 dx = \frac{24EJ}{l^3} f^2. \quad (20.145)$$

Условие (20.138) сохранения энергии тогда примет вид

$$T + U = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{24EJ}{l^3} f^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя последнее уравнение по  $t$ , найдем:

$$\frac{Q + \frac{17}{35} \gamma Fl}{2g} 2 \frac{d^2f}{dt^2} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{2 \cdot 24EJ}{l^3} f \frac{df}{dt} = 0,$$

откуда после сокращения получим:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{48EJ}{l^3} \cdot \frac{f}{\left( Q + \frac{17}{35} \gamma Fl \right)} = 0,$$

или, вводя понятие приведенного прогиба  $\delta_{пр}$ :

$$\delta_{пр} = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma Fl}{48EJ} l^3, \quad (20.146)$$

дифференциальное уравнение колебания груза на балке с учетом ее массы можно представить в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{g}{\delta_{пр}} f = 0. \quad (20.147)$$

Отсюда частота  $\nu$  собственных колебаний груза согласно выражению (20.6) будет

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{пр}}}.$$

Из формулы (20.146) следует, что для учета массы балки при определении частоты или периода свободных колебаний следует балку считать невесомой, а к весу груза прибавлять  $\frac{17}{35} = 0,486$  веса балки.

Величина  $\frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{g}$  называется *приведенной массой балки*.

В заключение рассмотрим случай поперечных колебаний грузов, связанных с балкой, лежащей на двух опорах (см. рис. 538). Предположим, что кинетическая энергия системы обусловлена только поступательным перемещением грузов, а потенциальная — только изгибом балки. Далее полагаем, что колебания всех точек оси балки происходят с одной частотой и находятся в одной фазе, тогда свободные колебания сечения балки с абсциссой  $x$  в функции времени можно описать синусоидальным законом

$$\varphi(x, t) = w(x) \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $w(x)$  — уравнение кривой максимальных отклонений от равновесного состояния, определяющее форму колебаний.

Имея в виду, что скорость перемещения точек оси балки определится выражением

$$v(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = w(x) \omega \cos(\omega t + \alpha),$$

максимальное значение скорости запишем в виде

$$v_{\max} = \omega w(x),$$

а кинетическая энергия, соответствующая максимальной скорости, будет

$$T_{\max} = \frac{m_1 v_{1 \max}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2 \max}^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_{n \max}^2}{2},$$

или

$$T_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\omega_i^2 \omega^2), \quad (20.148)$$

где  $\omega_i$  — амплитуда перемещения сечения балки в месте расположения сосредоточенной  $i$ -й массы.

Значение максимальной потенциальной энергии деформации изгиба балки, которое будет при наибольшем отклонении балки, определится выражением

$$U_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (20.149)$$

Приравнивая выражения (20.148) и (20.149), найдем следующую основную формулу Рейлея для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left[ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.150)$$

В случае непрерывного распределения массы суммирование в знаменателе последней формулы заменяется интегрированием:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m \omega^2 dx}. \quad (20.151)$$

Поскольку в рассмотренном случае форма колебаний балки принята была приближенно в виде синусоиды, то формула (20.150) дает приближенное значение частоты. Когда же известна действительная форма  $w(x)$  колебаний, то формула (20.150) дает точное значение частоты. Вообще же уравнение функции прогиба  $w(x)$  заранее не известно и им обычно приходится задаваться. При выборе формы кривой необходимо стремиться отразить хотя бы примерно форму колебаний и соблюдать граничные условия задачи (в нашем случае условия на опорах).

Практически вместо того, чтобы задаваться формой колебаний, задаются некоторой статической нагрузкой и определяют форму упругой линии, которую и принимают за форму колебаний. Этот способ удобен тем, что граничные условия всегда будут удовлетворены автоматически, какой бы ни была выбрана нагрузка. Принимая на-

грузки в виде какой-либо системы сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , потенциальную энергию изгиба можно выразить через работу внешних сил:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} P_i \omega_i,$$

где  $\omega_i$  — прогибы, вызываемые принятой системой нагрузок.

Тогда формула (20.150) примет вид

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.152)$$

Вообще говоря, за систему сил  $P_i$  целесообразно принять фактическую нагрузку  $P_i = m_i g$ . Тогда на основании выражения (20.152) получим:

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.153)$$

*Пример 86.* Определить наименьшую собственную частоту двухопорной балки, несущей три одинаковых груза массой  $m$  (см. рис. 539).

При решении поставленной задачи примем синусоидальную форму колебаний:

$$\omega(x) = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Это выражение удовлетворяет условиям на концах балки. Действительно, при  $x=0$  и  $x=l$  прогиб и изгибающий момент отсутствуют, т. е.  $\omega(x) = 0$  и  $\frac{d^2\omega}{dx^2} = 0$ , в то же время угол поворота и поперечная сила не равны нулю, т. е.

$$\frac{d\omega}{dx} \neq 0 \text{ и } \frac{d^3\omega}{dx^3} \neq 0.$$

Для определения частоты воспользуемся формулой (20.150).

Поскольку

$$\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 = \left(-\frac{a\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}\right)^2 = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l},$$

то числитель, входящий в указанную формулу, будет

$$\int_0^l EJ \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^l EJ a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3}. \quad (20.154)$$

Чтобы определить знаменатель формулы (20.150), нужно вычислить значения прогибов балки в местах расположения грузов, т. е. значения  $\omega(x)$  при  $x = \frac{l}{6}$ ;

$$x = \frac{l}{2} \text{ и } x = \frac{5}{6} l;$$

$$\omega_1 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left( \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6} \right) = \frac{a}{2};$$

$$\omega_2 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left( \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} \right) = a;$$

$$\omega_3 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left( \frac{\pi}{l} \cdot \frac{5l}{6} \right) = \frac{a}{2}.$$

Тогда знаменатель формулы (20.150) будет

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \omega_i^2 = m \left( \frac{a}{2} \right)^2 + ma^2 + m \left( \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} ma^2. \quad (20.155)$$

Подставляя выражения (20.154) и (20.155) в формулу (20.150), определим квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i \omega_i^2} = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3 \frac{3}{2} ma^2} = \frac{\pi^4 EJ}{3ml^3}.$$

Частота

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EJ}{3ml^3}} = \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}. \quad (20.156)$$

Заметим, что полученное значение частоты, определенное приближенным энергетическим методом Рейля, мало отличается от точного ее значения, определяемого формулой (20.80).

**Способ Ритца.** При использовании способа Рейля делается определенное допущение относительно формы упругой линии колебаний стержня. Выбор этой формы равносильно введению некоторых добавочных ограничений, которые приводят сложную систему к системе, имеющей только одну степень свободы. При этом указанные добавочные ограничения могут только увеличить жесткость системы, что дает несколько преувеличенное значение частоты по сравнению с фактическим ее значением.

Более точные значения основной частоты, а также частот высших видов колебаний можно получить, пользуясь методом Ритца, который является дальнейшим развитием метода Рейля.

При использовании метода Ритца в уравнение упругой линии, представляющей вид колебаний, вводят несколько параметров, величины которых выбирают таким образом, чтобы частота основного типа колебания была минимальной.

Так например, рассматривая поперечные колебания стержня, задаемся функцией прогиба стержня в виде ряда

$$\omega(x) = a_1 \omega_1(x) + a_2 \omega_2(x) + \dots, \quad (20.157)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям. Подставляя выражение (20.157) в формулу Рейля (20.151), легко убедимся, что

результат будет зависеть от конкретного выбора коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  (а точнее — от отношений  $\frac{a_2}{a_1}$ ,  $\frac{a_3}{a_2}$  и т. п.).

Согласно способу Ритца указанные коэффициенты должны быть выбраны так, чтобы формула (20.151) давала наименьшее значение для частоты  $\omega$ . Условием минимума, очевидно, будет следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m w^2 dx} \right) = 0,$$

или

$$\int_0^l m w^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l m w^2 dx = 0.$$

Деля это уравнение на  $\int_0^l m w^2 dx$  и учитывая формулу (20.151), получим:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l \left[ EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 m w^2 \right] dx = 0.} \quad (20.158)$$

Очевидно, таких уравнений будет столько, сколько членов в ряду (20.157). Эти уравнения будут однородными и линейными относительно коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . Приравнявая определитель указанной системы уравнений нулю, получим частотное уравнение.

Этот способ позволяет определить не только низшую частоту, но и значения высших частот, хотя и с меньшей точностью. При этом можно определить столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (20.157).

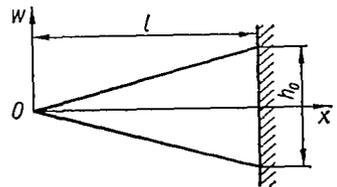


Рис. 551.

*Пример 87.* Определить способом Ритца низшую частоту поперечных колебаний консольно закрепленного стержня переменного сечения (рис. 551), имеющего толщину, равную единице, а высоту, меняющуюся по линейному закону

$$h(x) = \frac{x}{l} h_0.$$

В этом случае

$$J = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h_0^3}{12l^3} x^3; \quad m = \frac{\rho h_0}{l} x.$$

Для приближенного решения примем, что

$$\begin{aligned} \omega(x) &= a_1 \omega_1(x) + a_2 \omega_2(x) + \dots = \\ &= a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (20.159)$$

Каждый член этого разложения удовлетворяет граничным условиям задачи: при  $x=l$   $\omega_i(x) = 0$ ;  $\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x} = 0$ .

Принимая в выражении (20.159) два члена разложения и подставляя их в уравнение (20.158), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \frac{h_0^3}{12l^3} \left[ (a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} (a_1 - 2a_2) a_2 + 6a_2^2 \right] - \right. \\ \left. - \omega^2 \rho \frac{h_0}{E} \left( \frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по  $a_1$  и по  $a_2$ , найдем следующую систему уравнений:

$$\left( \frac{Eh_0^2}{12\rho l^4} - \frac{\omega^2}{30} \right) a_1 + \left( \frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_2 = 0; \quad (20.160)$$

$$\left( \frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_1 + \left( \frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) a_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим уравнение частоты, решая которое найдем:

$$\omega = \frac{2,66h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \quad (20.161)$$

Эта формула дает ошибку 0,1% по сравнению с точным решением рассматриваемой задачи, данным Кирхгофом, согласно которому

$$\omega = \frac{2,657h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

**Способ Бубнова—Галеркина.** Этот метод, разработанный Н. Г. Бубновым и Б. Г. Галеркиным, получил широкое распространение для приближенного решения различных задач статики и динамики упругих тел. Для большей наглядности рассмотрим применение этого способа на примере решения задачи о поперечных колебаниях стержня переменного сечения, описываемых дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (20.162)$$

Решение этого уравнения, как известно, можно получить, представляя функцию прогиба  $w$  в виде произведения двух функций, одна из которых  $X$  является функцией только координаты сечения, а вторая  $T$  — только времени:

$$w = X(x)T(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (20.162), получаем два уравнения для определения функций  $X$  и  $T$ . Первое из них имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] - m\omega^2 X = 0.$$

Согласно способу Бубнова—Галеркина действительная кривая прогиба  $X(x)$  заменяется некоторой приближенно выбранной функцией  $\Psi(x)$ , удовлетворяющей граничным условиям закрепления и являющейся ортогональной к исходному дифференциальному оператору. С этой целью образуют интеграл

$$\int_0^l \{ [EJ(x) \Psi''(x)]'' - m\omega^2 \Psi(x) \} \Psi(x) dx = 0. \quad (20.163)$$

Отсюда, в частности, может быть получена формула Рейлея (20.151):

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [EJ(x) \Psi''(x)]'' \Psi(x) dx}{\int_0^l m \Psi^2(x) dx}.$$

Если принять  $\Psi(x)$  в виде

$$\Psi(x) = a_1 \Psi_1(x) + a_2 \Psi_2(x) + \dots \quad (20.164)$$

и рассмотреть каждое из слагаемых  $\Psi_i(x)$  как возможное перемещение, то вместо равенства (20.163) получится соотношение, выражающее равенство нулю виртуальной работы:

$$\int_0^l \{ [EJ(x) \Psi''(x)]'' - m\omega^2(x) \} \Psi_i(x) dx = 0. \quad (20.165)$$

Таких равенств можно записать столько, сколько слагаемых имеет принятое выражение  $\Psi(x)$ .

Каждое из уравнений (20.165) однородно и содержит неизвестные значения коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в первой степени. Приравняв нулю определитель полученной таким образом системы однородных уравнений (20.165), получим частотное уравнение.

*Пример 88.* Определим способом Бубнова—Галеркина низшую частоту поперечных колебаний консоли переменного сечения (рис. 551), имеющей толщину, равную единице; высота изменяется по линейному закону

$$h(x) = \frac{x}{l} h_0; \quad J = \frac{h_0^3}{12l^3} x^3; \quad m = \frac{\rho h_0}{l} x.$$

Для приближенного решения поставленной задачи по способу Бубнова—Галеркина примем:

$$\Psi(x) = a_1 \Psi_1(x) + a_2 \Psi_2(x) + \dots = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \dots$$

Выбранная функция, очевидно, удовлетворяет граничным условиям задачи: при  $x = l$

$$\Psi(x) = 0; \quad \Psi'_i(x) = 0;$$

при  $x = 0$

$$EJ\Psi_l''(x) = 0 \text{ и } EJ\Psi_l'''(x) = 0.$$

Дифференцируя  $\Psi(x)$  два раза, умножая на  $EJ(x) = \frac{Eh_0^3}{12l^3}x^3$  и вновь дифференцируя два раза, будем иметь:

$$[EJ(x)\Psi''(x)]'' = \frac{Eh_0^3}{l^5} \left[ (a_1 - 2a_2)x + 6 \left( \frac{a_2x^2}{l} \right) \right].$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (20.165), получим:

$$\int_0^l \left\{ \frac{Eh_0^3}{l^5} \left[ (a_1 - 2a_2)x + \frac{6a_2x^2}{l} \right] - \frac{\omega^2\rho h_0}{l} \left[ a_1x \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = 0;$$

$$\int_0^l \left\{ \frac{Eh_0^3}{l^5} \left[ (a_1 - 2a_2)x + \frac{6a_2x^2}{l} \right] - \frac{\omega^2\rho h_0}{l} \left[ a_1x \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^3 + a_2 \frac{x^2}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\} \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^3 dx = 0.$$

Выполняя указанное интегрирование, после преобразования будем иметь такую же систему однородных уравнений, как и (20.160) по способу Ритца. Приравняв нулю определитель системы, получим уже известную формулу (20.161) для определения частоты.

## Глава XXI

### СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЕЙСТВИЮ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

#### § 136. ЯВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов действию нагрузок, меняющихся во времени по величине или по величине и знаку, существенно отличается от сопротивления действию статической нагрузки. При этом под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок. Типичным примером детали, испытывающей переменные нагрузки, является шток поршневой машины, знак напряжений в котором меняется в соответствии с изменением направления движения поршня.

Практикой установлено, что если элемент той или иной конструкции многократно подвергать переменному нагружению, то после определенного числа перемен напряжений в нем появится трещина, которая постепенно будет развиваться. В конце концов деталь разрушится, не дав при этом заметных остаточных деформаций даже в том случае, когда материал ее высоко пластичен.

Число циклов до появления первой трещины и до полного разрушения стержня будет тем больше, чем меньше напряжение. Характерно, что разрушение материала под действием повторно-переменных нагрузок может произойти при напряжениях ниже предела текучести. Разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений называется *разрушением от усталости*.

Вообще же *усталостью материалов* (в частности металлов) называют явление разрушения в результате постепенного накопления в них повреждений, приводящих к возникновению усталостной трещины при многократном повторении нагружений.

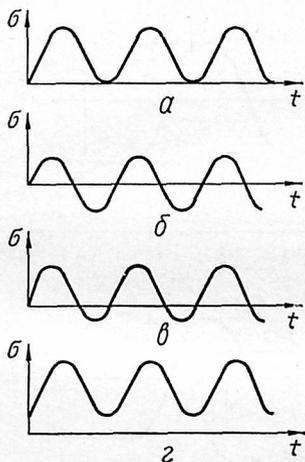


Рис. 552.

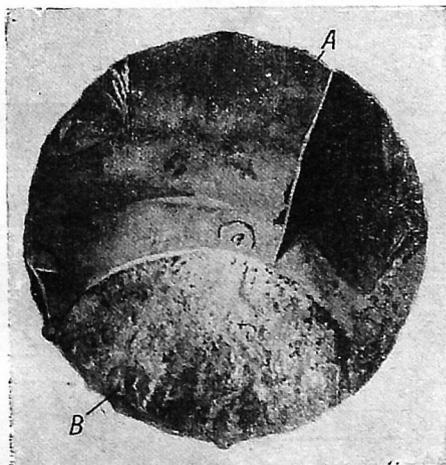


Рис. 553.

Способность металлов сопротивляться разрушению при действии повторно-переменных напряжений называется *выносливостью материала*.

Изучение вопросов усталости в сопротивлении материалов имеет чрезвычайно большое значение. Такие ответственные детали, как оси железнодорожных вагонов, коленчатые валы, шатуны моторов, гребные винты, клапанные пружины, воздушные винты, поршневые пальцы и многие другие детали, выходят из строя главным образом вследствие разрушений усталостного характера.

Усталостное разрушение наблюдается при наличии одной из следующих двух особенностей приложения нагрузки:

1) многократного приложения нагрузки одного знака, например периодически изменяющейся от нуля до максимума (рис. 552, а);

2) многократного повторения нагрузки, периодически изменяющейся не только по величине, но и по знаку (знакопеременной нагрузки), когда на выносливость материала одновременно оказывают влияние и повторность и переменность нагружения. При этом различают изменение нагрузки по симметричному циклу (рис. 552, б) и изменение нагрузки несимметричное (рис. 552, в, г).

Для разрушения от усталости недостаточно переменности напряжений. Необходимо также, чтобы напряжения имели определенную величину.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе повторений переменных нагрузок, называется пределом выносливости, или пределом усталости.

Излом детали от усталости имеет характерный вид (рис. 553). На нем почти всегда можно наблюдать две зоны. Одна из них (А) — гладкая, притертая, образованная вследствие постепенного развития трещины; другая (В) — крупнозернистая, образовавшаяся при

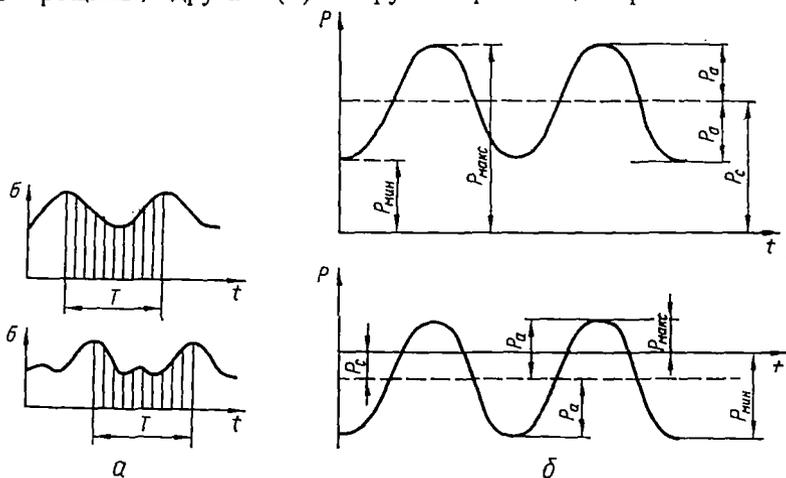


Рис. 554.

окончательном изломе ослабленного развившейся трещиной сечения детали. Зона В у хрупких деталей имеет крупнокристаллическое, а у вязких — волокнистое строение.

Предел выносливости определяют экспериментально. Он зависит от целого ряда факторов, в частности, от формы и размеров детали, способа ее обработки, состояния поверхности детали, вида напряженного состояния (растяжение—сжатие, кручение, изгиб и т. п.), закона изменения нагрузки во времени при испытаниях и т. п.

При рассмотрении сопротивления материалов действию переменных напряжений в большинстве случаев инженерной практики предполагается, что эти напряжения представляют собой периодические функции времени  $p = f(t)$  с периодом, равным  $T^1$ .

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется циклом напряжений (рис. 554, а).

На усталостную прочность в основном влияют максимальные  $p_{\max}$  и минимальные  $p_{\min}$  напряжения цикла. Кроме них в сопротивлении

<sup>1</sup> В настоящем учебнике не рассматриваются расчеты на выносливость под действием случайных переменных нагрузок, встречающихся в ряде конструкций.

материалов вводят понятие *постоянного*, или *среднего*, напряжения цикла  $\rho_c$  (рис. 554, б):

$$\rho_c = \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} \quad (21.1)$$

и понятие об амплитуде  $\rho_a$  цикла, характеризующее переменность напряжений:

$$\rho_a = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} \quad (21.2)$$

Среднее напряжение может быть как положительным, так и отрицательным, амплитуда же цикла определяется абсолютной величиной (без учета знака). В соответствии с выражениями (21.1) и (21.2)

$$\rho_{\max} = \rho_c + \rho_a; \quad \rho_{\min} = \rho_c - \rho_a.$$

Удвоенная величина амплитуды колебаний напряжений называется *размахом цикла*. Отношение минимального напряжения цикла к максимальному с учетом знаков этих напряжений называется *характеристикой цикла*, или *коэффициентом асимметрии цикла*, и обозначается буквой  $r$ , т. е.

$$r = \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \quad (21.3)$$

Наиболее опасным является так называемый симметричный цикл, когда  $\rho_{\max} = -\rho_{\min}$  и  $\rho_c = 0$ , при котором

$$r = \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} = -1.$$

Предел усталости при симметричном цикле является минимальным для данного типа деформации и обозначается через  $\rho_{-1}$ . В случае напряжения, изменяющегося от нуля до максимума, т. е. при отнулевом, или пульсирующем, цикле, когда  $\rho_{\min} = 0$ ,

$$r = \frac{0}{\rho_{\max}} = 0,$$

а предел усталости, соответствующий данному циклу, обозначается через  $\rho_0$ .

При  $\rho = \text{const}$ , т. е. когда действует постоянная статическая нагрузка,  $\rho_{\max} = \rho_{\min} = \rho$  и характеристика цикла

$$r = \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} = \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

В самом общем случае предел выносливости, полученный при характеристике цикла  $r$ , обозначают  $\rho_r$ , предел выносливости, полученный при каком-то определенном значении  $r$ , предположим при  $r = -0,5$ , обозначают соответственно  $\rho_{-0,5}$ .

Циклы, имеющие одинаковые характеристики  $r$ , называются *подобными*. Характеристика цикла, или коэффициент асимметрии, может меняться от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Значения коэффициентов асимметрии цикла для различных видов циклов приведены в табл. 22. Очевидно, для полного суждения о характере действия циклической нагрузки, кроме характеристики цикла  $r$ , должно быть известно хотя бы максимальное или минимальное напряжение цикла.

Таблица 22

Вид цикла	$p_{\max}, p_{\min}$	$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$ , $p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$	$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$
	$p_{\max} = p_{\min} > 0$	$p_c = p_{\max} = p_{\min} > 0$ $p_a = 0$	$r = +1$
	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} > 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$0 < r < +1$
	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} = 0$	$p_c = 1/2 p_{\max}$ $p_a = 1/2 p_{\max}$	$r = 0$
	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$-1 < r < 0$
	$p_{\max} = -p_{\min} > 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c = 0$ $p_a = p_{\max}$	$r = -1$
	$p_{\max} > 0, p_{\min} < 0$ $p_{\max} <  p_{\min} $	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$-\infty < r < -1$
	$p_{\max} = 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c = 1/2 p_{\min}$ $p_a = 1/2  p_{\min} $	$r = \pm \infty$
	$p_{\max} < 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$+1 < r < +\infty$
	$p_{\max} = p_{\min} < 0$	$p_c = p_{\max} = p_{\min} < 0$ $p_a = 0$	$r = +1$

В заключение заметим, что в частных случаях, когда речь будет идти о нормальных или касательных напряжениях (в первом случае при циклическом растяжении — сжатии или изгибе, во втором — при циклическом кручении) буква  $p$  в принятых выше обозначениях должна быть заменена соответственно на  $\sigma$  или на  $\tau$  при сохранении соот-

ветствующих индексов. Так например, при циклическом растяжении — сжатии или изгибе вместо  $\rho_{\max}$ ,  $\rho_{\min}$ ,  $\rho_c$  и  $\rho_a$  должны соответственно фигурировать  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_c$  и  $\sigma_a$ , тогда предел усталости при характеристике цикла  $r$  будет обозначаться  $\sigma_r$ , а, например, при симметричном цикле, т. е. при  $r = -1$ , будет  $\sigma_{-1}$ . В случае кручения с циклическим изменением напряжений характерные напряжения цикла будут соответственно обозначаться через  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$ ,  $\tau_c$ ,  $\tau_a$ , а предел выносливости — через  $\tau_r$ ,  $\tau_{-1}$ ,  $\tau_0$  и т. д.

### § 137. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЗМЕ ЯВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

Все металлы, применяемые в технике, являются поликристаллическими веществами, состоящими из отдельных зерен и не представляющими того однородного монолита, каким считают материал согласно основным гипотезам сопротивления материалов. Зерна технических металлов представляют собой совокупность кристаллов, имеющих неправильную огранку, которые обычно называют *кристаллитами*. Поликристаллическость материала и неизбежная его неоднородность приводят к тому, что под действием тех или иных нагрузок в отдельных зернах возникают перенапряжения и создаются возможности появления микротрещин. При этом в случае напряжений, вызванных статическими нагрузками, подобные микротрещины не опасны. Если же напряжения переменны во времени, то имеет место тенденция к развитию микротрещин, приводящая в конечном итоге к усталостному излому детали.

Кроме указанной гипотезы, существует и несколько другой подход к объяснению физической природы явления усталости. В частности, возникновение усталостных трещин можно объяснить истощением способности кристаллических зерен сопротивляться сдвигу.

Зерна большинства металлов состоят из ряда элементарных кубиков с размерами сторон  $3 \cdot 10^{-8}$  —  $6 \cdot 10^{-8}$  см. Кубики, в свою очередь, состоят из системы взаимодействующих между собой атомов, расположенных в строго определенном для данного материала порядке, образуя так называемую пространственную атомную решетку. Форма и размеры элементов последней зависят от сил взаимодействия атомов и определяют характерные свойства данного вещества.

Деформация материала обычно связана с искажением кристаллической решетки и изменением межатомных расстояний. При этом в случае небольших напряжений взаимодействие между атомами не нарушается и при последующих разгрузках указанные искажения решетки исчезают. Если же напряжения большие, то в кристаллических зернах пластических материалов по некоторым плоскостям, которые называются плоскостями скольжения, или плоскостями слабости, кристаллита, происходят необратимые сдвиги. Сдвинутые относительно друг друга группы атомов уже не образуют единой атомной решетки. Получившееся при этом новое образование оказывается более прочным в результате усиления плоскостей скольжения внутри отдельных зерен. Теперь для его разрушения требуется большее усилие.

Однако упрочнению при сдвигах сопутствует разупрочнение (разрыхление). Поэтому процесс сдвига обязательно сопровождается появлением зон, где атомные связи нарушаются, а новые не создаются. Проявляется это в том, что образуются мельчайшие микротрещины, каждая из которых в определенных условиях (например при соседстве нескольких зерен, ослабленных трещиной) может явиться очагом развития усталостной трещины, приводящей в конечном итоге к разрушению от усталости.

Таким образом, из сказанного видно, что механизм образования трещин при повторно-переменных нагрузках весьма сложен и не может считаться полностью изученным.

Из несомненных положений теории усталости можно отметить следующие:

1) процессы, проходящие при повторно-переменных нагрузках в металле, носят резко выраженный местный характер;

2) из двух видов напряжений — нормальных и касательных — решающее влияние на процессы усталости до образования первой трещины включительно имеют касательные напряжения, вызывающие пластические сдвиги и разрушение путем среза.

Развитие усталостной трещины, несомненно, может ускоряться при наличии растягивающих напряжений как у пластичных, так и, в особенности, у малопластичных и хрупких материалов типа чугуна, в которых появление трещины отрыва значительно повышает чувствительность к растягивающим напряжениям.

Образование трещин чаще всего наблюдается в зернах, лежащих ближе к поверхности детали. Объясняется это тем, что поверхностные слои материала в известной степени имеют следы повреждений различными технологическими операциями при обработке детали (внутренние напряжения, следы механической обработки), не говоря уже о тех случаях, когда наружные слои при повторно-переменных нагрузках испытывают наибольшие напряжения (при изгибе и кручении).

### § 138. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ. ДИАГРАММЫ УСТАЛОСТИ

Чтобы определить предел выносливости того или иного материала, нужно на соответствующей испытательной машине испытать партию образцов из данного материала в количестве не менее 6—12 шт. Для этого чаще всего берут гладкие цилиндрические образцы диаметром 7—10 мм.

Пределы выносливости материала при выбранной характеристике цикла  $r$ , разумеется, будут различными в зависимости от вида деформации, при которой испытывают образцы, т. е. в зависимости от того, при переменных напряжениях растяжения—сжатия, переменном кручении, изгибе или в условиях сложного напряженного состояния их испытывают. Поэтому, ставя перед собой цель получения предела выносливости, следует заранее указать, при каком виде деформации и характере изменения напряжений за цикл требуется определить предел выносливости.

В соответствии с поставленными требованиями выбирают необходимую испытательную машину. Для испытания материала на выносливость при переменном растяжении — сжатии можно взять инерционную машину, схема которой приведена на рис. 555. Здесь переменные усилия в образце возникают под действием четырех вращающихся неуравновешенных масс I, II, III и IV. Необходимое среднее напряжение  $p_c$  создают соответствующим натяжением имеющейся на установке пружины.

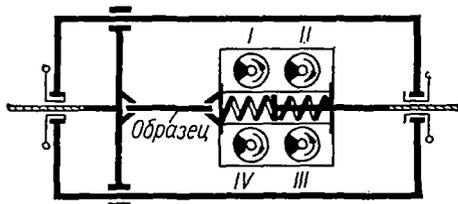


Рис. 555.

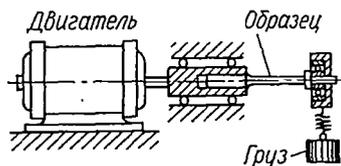


Рис. 556.

В лабораторных условиях симметричный цикл осуществить проще, чем любой другой. Схема простейшей установки для определения предела выносливости при изгибе в случае симметричного цикла показана на рис. 556. При вращении образца его наружные волокна будут испытывать попеременно то растяжение (когда они расположены сверху), то сжатие (при повороте образца на  $180^\circ$ ).

Число оборотов в минуту наиболее распространенных усталостных машин обычно порядка 3000 (50 *гц*). Поэтому испытание на усталость с целью получения предела выносливости требует продолжительного времени, исчисляемого неделями непрерывной работы машины. За последнее время во многих случаях при исследовании выносливости материалов и конструктивных деталей применяют более быстроходные машины — 100—500 *гц*, а в некоторых случаях и 20 000 *гц* (ультразвуковые частоты). В последнем случае для испытания требуются только десятки минут.

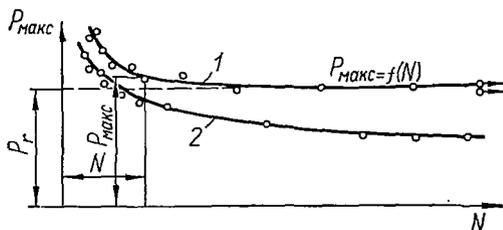


Рис. 557.

При испытании партии образцов с целью получения предела выносливости необходимо давать такие нагрузки на отдельные образцы, чтобы они разрушались, выдержав различное число циклов нагружения.

Обработка полученных экспериментальных данных обычно сопровождается построением *кривой усталости*, которая в литературе часто называется *кривой Веллера* (рис. 557). Кривую усталости строят по точкам в координатах числа циклов  $N$  и напряжения  $p_{\max}$ . Каждому разрушившемуся образцу на диаграмме соответствует одна точка с координатами  $N$  (число циклов до разрушения) и  $p_{\max}$  (напряжение), т. е. кривая усталости представляет собой функцию  $p_{\max} = f(N)$ .

Порядок установления нагрузок на испытываемые образцы в большинстве случаев принимают ниспадающим, т. е. на первый образец дают нагрузку, значительно превышающую предел выносливости, а нагрузку на последующие образцы постепенно снижают. Разумеется, каждый из менее нагруженных образцов будет выдерживать

все большее и большее число циклов. Может быть принят и другой порядок установления нагрузок.

Строя кривую усталости по точкам разрушившихся образцов, легко убедиться, что, например при испытании стали (рис. 557, кривая 1), при высоком уровне напряжений кривая круто падает, а по мере снижения их крутизна уменьшается и кривая асимптотически приближается к некоторой горизонтальной прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, величиной которого и определяется предел выносливости. Ордината точки на кривой, где последняя практически начинает совпадать с указанной асимптотой, соответствует такому напряжению, при котором образец не разрушится, пройдя число циклов, соответствующее заранее заданной величине, так называемой базе испытания  $N_0$ .

Нетрудно понять, что за базу испытания  $N_0$  как раз и принимают то число циклов, при котором правый конец кривой усталости проходит практически параллельно оси абсцисс. Исходя из этого, базой испытания на выносливость называется наибольшее число повторно-переменных нагрузок, существенное превышение которого не должно приводить к усталостным разрушениям испытываемого образца при данном напряжении.

Для черных металлов (стали, чугуна и т. п.) за базу испытаний

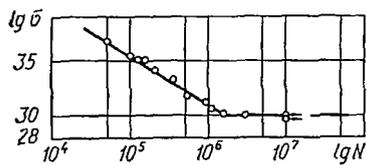
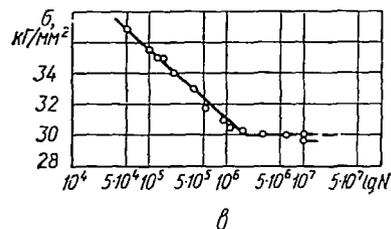
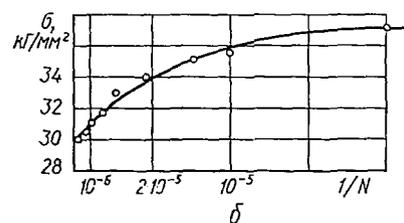
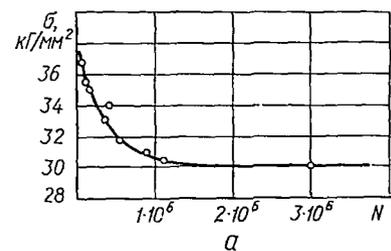


Рис. 558.

обычно принимают 10 млн. циклов, а для цветных (меди, алюминия и т. п.) — число, в 5—10 раз большее. Из рассмотрения характера усталостной кривой для цветных металлов (рис. 557, кривая 2) видно, что на большом участке она спадает весьма постепенно, т. е. кривая стремится к асимптоте медленно, поэтому и приходится в данном случае за базу испытания принимать большее число циклов. Вообще для таких металлов можно говорить только о некотором условном пределе усталости. Условным пределом усталости называется макси-

мальное напряжение, при котором не происходит разрушения при осуществлении определенного наперед заданного числа циклов, соответствующего той или иной принятой базе испытания.

В связи с тем, что по кривой усталости, построенной в координатах  $N - P$ , или, что то же самое,  $N - \sigma$  (рис. 558, а), часто бывает затруднительно определить предел выносливости, применяют два других способа построения диаграмм усталости.

Первый способ заключается в том, что по оси абсцисс откладывают величину, обратную числу циклов (рис. 558, б). Предел усталости тогда определяют как ординату в месте пересечения кривой усталости с осью напряжений.

Второй способ основан на представлении результатов испытаний в полулогарифмических (рис. 558, в) или логарифмических (рис. 558, г) координатах. Как видно из чертежа, критерием для суждения о пределе усталости здесь является перелом кривой.

В заключение отметим, что, согласно многочисленным экспериментальным данным, для некоторых материалов можно заметить определенные соотношения между пределами выносливости при различных видах деформации, и в частности, между пределами выносливости при изгибе  $\sigma_{-1}^H$ , кручении  $\tau_{-1}$  и растяжении — сжатии  $\sigma_{-1}^o$  при симметричных циклах.

Для гладких образцов эти соотношения приблизительно следующие: для стали  $\sigma_{-1}^o = 0,7\sigma_{-1}^H$ ; для чугуна  $\sigma_{-1}^o = 0,65\sigma_{-1}^H$ ; для сталей и легких сплавов  $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}^H$ ; для чугуна  $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}^H$ .

Имея величину временного сопротивления  $\sigma_B$ , пределы выносливости стали при симметричном цикле можно приближенно найти по следующим эмпирическим соотношениям соответственно для растяжения — сжатия, изгиба и кручения:

$$\sigma_{-1}^o = 0,28\sigma_B; \quad \sigma_{-1}^H = 0,40\sigma_B; \quad \tau_{-1} = 0,22\sigma_B. \quad (21.4)$$

Для цветных металлов наблюдается менее устойчивое соотношение между пределом усталости и временным сопротивлением; согласно опытным данным в этом случае  $\sigma_{-1}^H = (0,24 \div 0,50) \sigma_B$ .

**Диаграмма предельных напряжений.** Чтобы охарактеризовать сопротивляемость материала действию переменных напряжений с различной асимметрией цикла, строят так называемую *диаграмму предельных напряжений* (рис. 559). В ней по оси ординат откладывают наибольшее  $\sigma_{\max}$  и наименьшее  $\sigma_{\min}$  напряжения цикла, а по оси абсцисс — среднее напряжение цикла  $\sigma_c$  (диаграмма Смита). Их предельные значения  $\sigma_{r_{\max}}$ ,  $\sigma_{r_{\min}}$ ,  $\sigma_{r_c}$  определяются при данной характеристике цикла опытным путем в результате построения кривых усталости.

Обычно начинают с симметричного цикла ( $r = -1$ ). Предельным напряжением в этом случае будет предел выносливости  $\sigma_{-1}$ . Следовательно,

$$\sigma_{-1_{\max}} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_{\min}} = -\sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_c} = 0.$$

Этому циклу на диаграмме соответствуют точки  $A$  и  $A'$ , лежащие на оси ординат.

Испытав партию образцов из данного материала при определенном значении характеристики цикла  $r = \frac{\sigma_{\text{мин}}}{\sigma_{\text{макс}}}$ , определим наибольшее и наименьшее значения напряжений, при которых материал работает на пределе выносливости  $\sigma_r$ , т. е.

$$\sigma_{r_{\text{макс}}} = \sigma_r; \quad \sigma_{r_{\text{мин}}} = r\sigma_r; \quad \sigma_{r_c} = \frac{\sigma_{r_{\text{макс}}} + \sigma_{r_{\text{мин}}}}{2}.$$

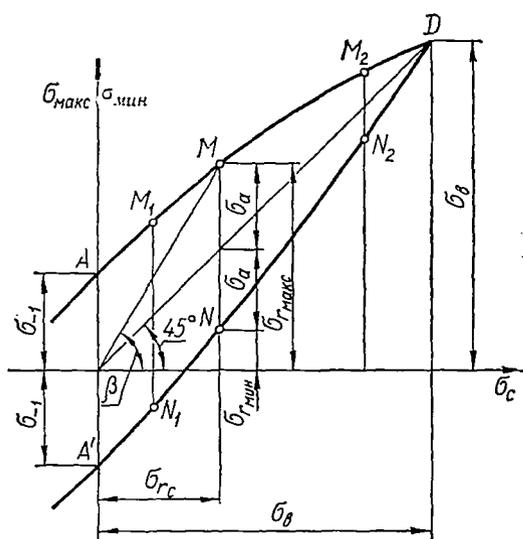


Рис. 559.

Нанесем на диаграмму точки  $M$  и  $N$ , абсцисса которых равна  $\sigma_{r_c}$ , а ординаты — соответственно  $\sigma_{\text{макс}}$  и  $\sigma_{r_{\text{мин}}}$ . Поступая подобным образом для ряда других значений  $r$ , получаем точки  $M_1, N_1; M_2, N_2$  и т. д.

Соединяем линиями все точки, изображающие максимальные и минимальные предельные напряжения циклов. Очевидно, правая крайняя точка диаграммы (точка  $D$ ) соответствует циклу, при котором  $\sigma_{\text{макс}} = \sigma_{\text{мин}} = \sigma_c$ ,  $r = 1$ , т. е. постоянной нагрузке. Предельной нагрузкой в этом случае является предел прочности материала. Следовательно,

но, абсцисса и ордината точки  $D$  равны пределу прочности материала. Таким образом, ординаты точек линии  $AD$  соответствуют пределам выносливости материала при различных значениях коэффициента асимметрии циклов.

Легко убедиться, что лучи, проходящие через начало координат диаграммы предельных напряжений, являются геометрическим местом точек, характеризующих циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии  $r = \frac{\sigma_{\text{мин}}}{\sigma_{\text{макс}}}$ . Действительно,

$$\text{tg } \beta = \frac{\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_{\text{макс}} + \sigma_{\text{мин}}} = \frac{2}{1+r}.$$

Для определения предела выносливости материала при данном значении коэффициента асимметрии  $r$  нужно вычислить по приведенной формуле угол  $\beta$  и провести луч под этим углом до пересечения с линией  $AD$ ; ордината точки пересечения равна величине  $\sigma_r$ .

В случае циклического кручения диаграмма строится по одну сторону от оси ординат и имеет такой вид, как показано, например, для конструкционной стали на рис. 560.

Диаграмму предельных напряжений можно строить также в координатах  $\sigma_a - \sigma_c$  (диаграмма Хейя), т. е. по оси ординат откладывать предельную амплитуду  $\sigma_a$  цикла, а по оси абсцисс — среднее напряжение  $\sigma_c$  цикла (рис. 561). На этой диаграмме прямая, проведенная из начала координат под некоторым углом, характеризует циклы с одинаковой асимметрией, так как

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}}{\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}} = \frac{1 - r}{1 + r}.$$

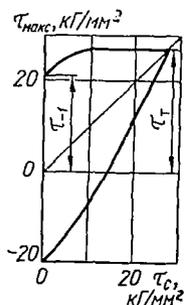


Рис. 560.

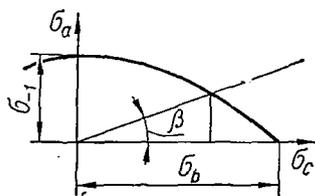


Рис. 561.

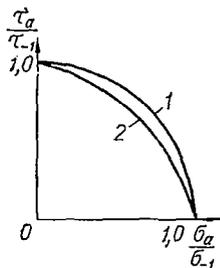


Рис. 562.

Таким образом, при постоянном  $\beta$  оказывается постоянным и коэффициент асимметрии  $r$ .

В случае плоского или объемного напряженного состояния сопротивление усталости можно охарактеризовать, исходя из соответствующих гипотез прочности, согласующихся с экспериментальными данными.

Для исследования действительного поведения материала в условиях сложных переменных напряжений, например при сочетании изгиба с кручением, используют специальные испытательные машины, позволяющие одновременно нагружать образец переменными изгибающим и крутящим моментами.

По результатам испытаний, полученным при различных сочетаниях переменных  $\sigma$  и  $\tau$ , строят диаграммы в координатах  $\sigma_a - \tau_a$  или в относительных величинах  $\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}$  и  $\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}$ . Точки таких диаграмм определяют напряженные состояния, характеризуемые величинами  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  при сложном напряженном состоянии. Типичная диаграмма для конструкционных сталей, построенная по экспериментальным данным, показана на рис. 562 (кривая 1). Она соответствует дуге окружности, уравнение которой

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1.$$

Для высокопрочных сталей и чугунов экспериментальные данные располагаются ближе к эллиптическим дугам (рис. 562, кривая 2).

В случае симметричного цикла с соблюдением синхронности и синфазности напряжений условие прочности в амплитудах главных напряжений в соответствии с гипотезой наибольших касательных напряжений запишется так:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}$$

Исходя из теории прочности энергии формоизменения, условие прочности можно записать в виде

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (21.5)$$

Для сложного напряжения, характеризуемого совместным действием растяжения и кручения или изгиба и кручения, с поправкой на соотношение величин пределов выносливости условие прочности выражается так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \quad (21.6)$$

Последнее условие совпадает с ранее приведенной экспериментально полученной зависимостью, характеризующейся в координатах  $\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}$ ;  $\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}$  дугой круга.

### § 139. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

На величину предела выносливости образцов или деталей, изготавливаемых из того или иного материала, кроме характеристики цикла, влияет целый ряд различных факторов. К ним относятся форма образца, размеры, состояние поверхности, среда, в которой происходят испытания, температура испытаний, режим циклического силового воздействия (тренировка, паузы, перегрузки, частота нагружения и т. п.), предварительная внутренняя напряженность материала и др.

Для выяснения влияния того или иного фактора в качестве эталона принят предел усталости  $\rho_{-1}$ , полученный испытанием на воздухе при симметричном цикле партии гладких полированных образцов диаметром 7—10 мм. Тогда влияние различных факторов на выносливость может быть оценено отклонением предела выносливости  $\rho'_{-1}$  партии рассматриваемых образцов от предела выносливости  $\rho_{-1}$  эталонных.

**Влияние концентрации напряжений.** Наиболее важным фактором, снижающим предел выносливости, является концентрация напряжений, вызванная резким изменением сечения детали. Концентраторами напряжений на практике являются шпоночные канавки, отверстия в детали, нарезки на поверхности, малые радиусы закруглений в местах резкого изменения размеров сечения и т. п. Концентрация напряжений, как правило, содействует зарождению усталостной трещины, которая, развиваясь, приводит в конце концов к разрушению детали.

Как показывают опыты, в случае действия переменных напряжений предел выносливости с концентрацией напряжений больше, чем частное от деления предела выносливости гладкого образца на теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$  (см. § 33), т. е.

$$\rho_{-1к} \geq \frac{\rho_{-1}}{\alpha_\sigma}.$$

Такое расхождение объясняется тем, что теоретический коэффициент концентрации  $\alpha_\sigma$  отражает характер распределения напряжений лишь для идеально упругого материала. В реальных же материалах за счет пластических деформаций в микрообласти места концентрации происходит некоторое перераспределение и сглаживание напряжений. Учитывая это, наряду с теоретическим коэффициентом концентрации при рассмотрении вопросов усталости вводят понятие *эффективного*, или *действительного*, *коэффициента концентрации*, представляющего собой отношение предела выносливости гладкого образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца с концентрацией напряжений, имеющего такие же абсолютные размеры сечений. Эти коэффициенты в дальнейшем обозначены так:

для нормальных напряжений

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}};$$

для касательных напряжений

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}},$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  — пределы выносливости гладких образцов;

$\sigma_{-1к}$  и  $\tau_{-1к}$  — пределы выносливости образцов с концентрацией напряжений.

В дальнейшем все рассуждения будем вести применительно к нормальным напряжениям, имея в виду, что для касательных напряжений все сказанное останется в силе, только следует индекс « $\sigma$ » при коэффициентах заменить на « $\tau$ ».

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений имеют меньшие значения, чем коэффициенты концентрации  $\alpha_\sigma$ , определяемые теоретическим путем в предположении «упругого» распределения напряжений.

Количественная оценка указанной разницы коэффициентов  $k_\sigma$  и  $\alpha_\sigma$  может быть получена введением так называемого коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений:

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{\alpha_\sigma - 1}.$$

Зная коэффициенты чувствительности  $q_\sigma$ , для которых в справочной литературе имеются соответствующие графики (рис. 563), можно по  $\alpha_\sigma$  определить значения эффективных коэффициентов концентрации:

$$\boxed{k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1)}. \quad (21.7)$$

Очевидно, для материала, не чувствительного к концентрации напряжений, т. е. при  $q_\sigma = 0$ ,  $k_\sigma = 1$ . Когда  $q_\sigma = 1$ ,  $k_\sigma = \alpha_\sigma$ , т. е. материал обладает полной чувствительностью к концентрации напряжений.

Как видно из графиков (рис. 563), чувствительность металла к концентрации напряжений зависит прежде всего от его свойств. При этом чем выше прочность стали, тем выше ее чувствительность к концентрации напряжений. Поэтому применение высокопрочных сталей при переменных напряжениях не всегда оказывается целесообразным.

Чувствительность металла к концентрации напряжений у крупнозернистых сталей меньше, чем у мелкозернистых. Металлы и сплавы с неоднородной структурой, такие, как, например, серый чугун, имеют

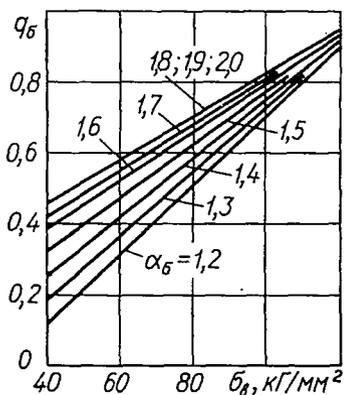


Рис. 563.

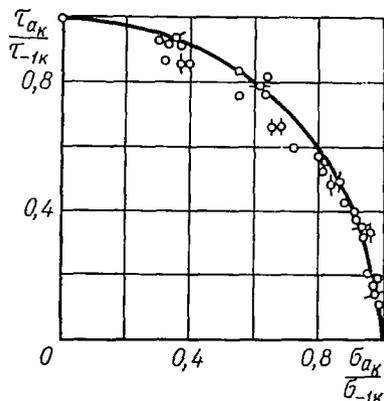


Рис. 564.

пониженную чувствительность к концентрации напряжений вследствие того, что структурная неоднородность является внутренним источником концентрации напряжений и снижает предел выносливости гладких образцов, поэтому внешние концентраторы уже мало снижают предел выносливости.

Коэффициенты чувствительности к концентрации напряжений, как показывают эксперименты, зависят не только от механических свойств, но и от конструктивной формы самой детали, а также распределения в ней напряжений.

Влияние концентрации напряжений в расчетах деталей машин, подвергающихся действию переменных напряжений с асимметричным циклом, следует учитывать на основе экспериментальных данных, так как теоретически этот вопрос пока не решен.

Согласно экспериментальным данным, полученным на лабораторных образцах небольшого сечения, отношение предельных амплитуд гладких образцов и образцов с концентрацией, соответствующих одному и тому же среднему напряжению  $\sigma_c$ , не зависит от амплитуды цикла. Это обстоятельство используют для расчета деталей машин на выносливость при асимметричных циклах.

Оценку влияния концентрации напряжений при изгибе с кручением обычно осуществляют на основании соответствующих усталостных испы-

таний на машине, позволяющей создавать одновременное нагружение образца крутящими и изгибающими моментами при различном их соотношении. На рис. 564 представлены результаты экспериментов при синфазном изменении нормальных и касательных напряжений при симметричном цикле ( $\sigma_{-1к}$ ,  $\tau_{-1к}$  — пределы выносливости при симметричном цикле для образцов с концентрацией только при изгибе и только при кручении соответственно;  $\sigma_{ак}$ ,  $\tau_{ак}$  — предельные амплитуды для образцов с концентрацией при одновременном действии изгиба и кручения).

Рассматривая рис. 564, видим, что большая часть экспериментальных данных вполне отвечает эллиптической зависимости

$$\left( \frac{\sigma_{ак}}{\sigma_{-1к}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{ак}}{\tau_{-1к}} \right)^2 = 1, \quad (21.8)$$

т. е. такой же зависимости, как и при отсутствии концентрации напряжений.

**Влияние размеров (масштабный фактор).** Эффективность концентрации напряжений связана с абсолютными размерами сечения детали, а именно: с увеличением размеров детали при сохранении ее геометрического подобия значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений увеличиваются.

Как показывают результаты экспериментов, при увеличении диаметра образца свыше 30—40 мм дальнейший рост эффективных коэффициентов концентрации практически прекращается. Можно полагать, что по достижении некоторого размера сечения эффективный коэффициент не отличается от теоретического, т. е.  $k_s = \alpha_s$ . Для легированных сталей с пределом прочности  $\sigma_b \geq 120 \text{ кг/мм}^2$  равенство указанных коэффициентов при средних уровнях концентрации напряжений  $\alpha_s = 2 \div 3$  достигается уже при  $d = 40 \div 50 \text{ мм}$ . Что касается углеродистых сталей, то там предельный размер, после которого  $k_s = \alpha_s$ , оказывается значительно большим.

Повышение эффективных коэффициентов концентрации с ростом размеров детали связано с уменьшением градиента напряжений по сечению при увеличении размеров.

Абсолютные размеры сечений детали наряду с влиянием на эффективность концентрации напряжений оказывают существенное влияние и на пределы выносливости образцов без концентрации напряжений. При этом с ростом абсолютных размеров сечений пределы выносливости понижаются. Отношение предела выносливости детали размером  $d$  к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации, имеющего малые размеры ( $d_0 = 7 \div 10 \text{ мм}$ ), называют *коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения* и обозначают, например применительно к нормальным напряжениям, так:

$$\epsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}. \quad (21.9)$$

Коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения можно определять и на образцах с концентрацией напряжений. В этом случае

$$\epsilon_{\sigma_k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}, \quad (21.10)$$

причем деталь размером  $d$  и образец малого размера  $d_0$  должны быть геометрически подобны.

Для расчета элементов машин с учетом масштабного коэффициента как при наличии концентраторов напряжений, так и без них существуют специальные графики типа приведенных на рис. 565 (здесь шкала  $d$  — логарифмическая), полученные на основании экспериментов. Здесь кривая 1 соответствует детали из углеродистой стали без источ-

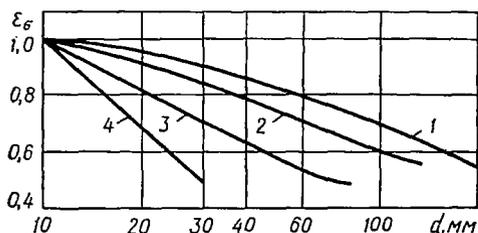


Рис. 565.

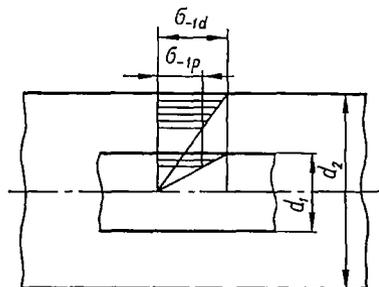


Рис. 566.

ника концентрации напряжений, а кривая 2 — детали из легированной стали ( $\sigma_b = 100 \div 120 \text{ кг/мм}^2$ ) при отсутствии концентрации напряжений и углеродистой стали при наличии умеренной концентрации напряжений. Кривая 3 соответствует детали из легированной стали при наличии концентрации напряжений, а кривая 4 — любой стали при весьма большой концентрации напряжений типа нарезки.

При диаметрах до 25 мм снижение предела усталости за счет масштабного фактора  $\epsilon_\sigma$  (величина  $\epsilon_\sigma$  берется из графика, приведенного на рис. 565) не превышает 5%, а потому его можно не принимать во внимание.

Как показывают эксперименты, при увеличении диаметра до 150—200 мм снижение пределов выносливости образцов при ротационном изгибе (рис. 555) может достигать 30—45%. Опытные данные свидетельствуют об отсутствии влияния абсолютных размеров на выносливость при однородном напряженном состоянии — растяжении — сжатии. Это, по-видимому, следует отнести за счет роли градиента напряжений, влияние которого в последнем случае исключено.

При кручении снижение пределов выносливости с ростом размеров детали проявляется в такой же степени, как и при изгибе.

Снижение пределов выносливости с ростом абсолютных размеров сечений детали можно отнести за счет следующих факторов:

1) уменьшения механической прочности материала по мере увеличения диаметра заготовок даже при условии соблюдения их надлежащей термической обработки;

2) изменений свойств поверхностного слоя после механической обработки, поскольку эти изменения оказываются различными при разных размерах детали;

3) неоднородности механических свойств и напряженности различных зерен в связи с поликристаллической структурой металла и вытекающего отсюда повышения вероятности более раннего усталостного разрушения с ростом размеров детали; этот фактор, по-видимому, является главным.

Падение предела прочности с ростом размеров особенно сильно выражено у неоднородных металлов, например у серого чугуна: с увеличением размера с 5—10 до 50 мм снижение  $\sigma_B$  и  $\sigma_{-1}$  для него может достигать 60—70%. Исходя из условий вероятности усталостного разрушения, которую следует считать пропорциональной количеству опасных дефектов на единицу объема наиболее напряженного слоя металла, можно вывести уравнение для коэффициента влияния абсолютных размеров сечения. На рис. 566 представлены эпюры напряжений при изгибе для образцов различных диаметров без концентрации напряжений. Заштрихованная зона представляет собой слой, в котором напряжения превышают предел выносливости  $\sigma_{-1p}$  (который получается при однородном распределении напряжений), определенный либо при растяжении — сжатии, либо при изгибе на образцах достаточного большого размера. Из рис. 566 видно, что с ростом диаметра образца растет объем опасно напряженного слоя, а следовательно, и вероятность разрушения от усталости, приводящая к снижению пределов выносливости. При увеличении диаметра образцов с 7 до 150 мм снижение предела выносливости для углеродистой стали достигает 45%.

Объяснение зависимости пределов выносливости от размеров сечений, как и других закономерностей и характеристик усталости, дают *статистические теории усталости*. Эти теории освещают вопросы изменения эффективных коэффициентов концентрации в зависимости от величин градиентов напряжений и абсолютных размеров.

Гипотезы, объясняющие ослабление эффективности концентрации напряжений по сравнению с тем, которое должно вытекать из распределения напряжений в упругой области, и зависимость коэффициентов  $k_\sigma$ ,  $k_\tau$  от ряда факторов (размеров, свойств материала и т. д.), высказанные различными авторами, не позволяют пока вычислять значения этих коэффициентов для различных случаев расчетной практики исходя из первичных свойств металла. Поэтому для расчета деталей машин следует использовать экспериментальные данные, применяя в случае необходимости интерполяцию.

Сопrotивление усталости материала оценивается по пределу выносливости  $(\sigma_{-1})_{d_0}$ , определяемому на гладких лабораторных образцах малого диаметра, а для суждения о прочности детали при переменных напряжениях необходимо знать ее предел выносливости  $(\sigma_{-1k})_d$ . Поэтому вводят дополнительное понятие *эффективного коэффициента концентрации напряжений детали*  $(k_\sigma)_d$ , определяемого по формуле

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d}. \quad (21.11)$$

Коэффициент  $(k_\sigma)_d$  учитывает суммарное влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров на выносливость и обычно определяется по данным испытаний образцов и моделей различных сечений.

Если эффективный коэффициент концентрации  $(k_\sigma)_d$  определяется на образцах достаточно большого диаметра  $d$  (после которого дальнейшее увеличение его размеров влияет на величину  $(k_\sigma)_d$  слабо), то

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\varepsilon_\sigma)_d (\sigma_{-1k})_d} = \frac{(k_\sigma)_d}{(\varepsilon_\sigma)_d}$$

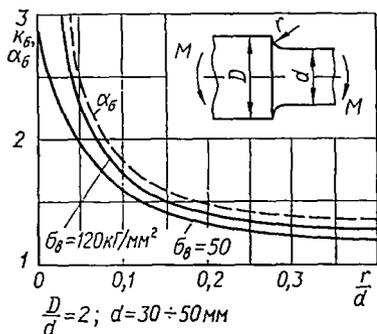


Рис. 567.

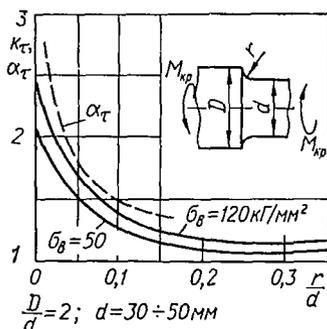


Рис. 568.

Заметим, что степень влияния концентрации напряжений на пределы выносливости зависит от вида напряженного состояния. При циклическом кручении например, эффективные коэффициенты концентрации оказываются обычно более низкими, чем при изгибе для одних

и тех же конструктивных форм (рис. 567 и 568). Соотношение между коэффициентами при изгибе и кручении, представленными на рис. 567 и 568, можно выразить приближенной формулой

$$k_\tau = 1 + 0,6(k_\sigma - 1). \quad (21.12)$$

Что касается эффективного коэффициента концентрации при растяжении — сжатии, то его величина обычно равна или несколько превышает коэффициенты концентрации при изгибе (рис. 567 и 569).

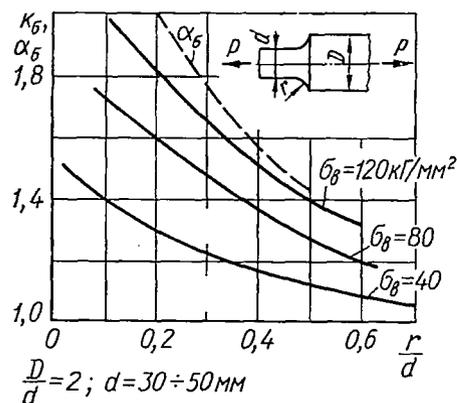


Рис. 569.

**Влияние состояния поверхности.** В большинстве случаев поверхностные слои элемента конструкции, подверженного действию циклических нагрузок, оказываются более напряженными, чем внутренние (в частности, это имеет место при изгибе и кручении). Кроме того, поверхность детали почти всегда имеет много дефектов, связанных с качеством механической обработки, а также с коррозией вследствие

воздействия окружающей среды. Поэтому усталостные трещины, как правило, начинаются с поверхности, а плохое качество последней приводит к снижению сопротивления усталости.

Влияние состояния обработанной поверхности на выносливость оценивается коэффициентом  $\beta$ , который равен отношению предела выносливости испытываемого образца с определенной обработкой поверхности к пределу выносливости тщательно полированного образца. Зависимость коэффициентов  $\beta$  от предела прочности  $\sigma_b$  для различных видов обработки приведена на рис. 570, где кривая 1 соответствует полиро-

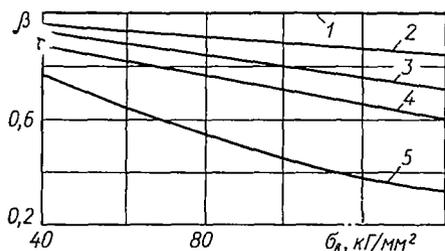


Рис. 570.

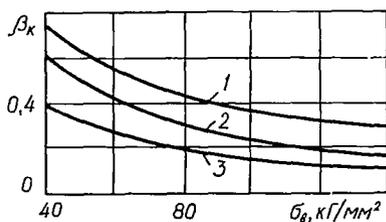


Рис. 571.

ваным образцам, 2 — шлифованным, 3 — образцам с тонкой обточкой; 4 — с грубой обточкой; 5 — с наличием окалины. Как видим, предел выносливости стальных образцов при грубой обточке снижается на 40%, а при наличии на поверхности окалины — на 70%.

Влияние качества поверхности на предел выносливости связано с изменениями микрогеометрии и состоянием металла в поверхностном слое после механической обработки. Наиболее существенно влияет на прочность наличие микрорельефа и наклепа поверхностного слоя, его нагрев, а также образование остаточных напряжений.

Вредное влияние микронеровностей поверхности во многих случаях смягчается пластической деформацией, вызываемой в поверхностном слое механической обработкой и распространяющейся на некоторую глубину, зависящую от режимов резания и, в частности, от величины подачи. При грубой обточке она может достигать 1 мм и более, а при шлифовании и полировании измеряется сотыми долями миллиметра и микронами. Пластическая деформация поверхностного слоя может дать повышение предела выносливости на 10—20%.

На предел выносливости существенное влияние оказывает коррозия. Это влияние будет различным в том случае, когда металл, подвергавшийся коррозии до испытания на усталость, не подвергается ей при испытаниях, и в случае, когда металл подвергается коррозии во время испытаний. В обоих указанных случаях, особенно во втором, коррозия вызывает резкое снижение пределов выносливости, достигающее до 70—80%. При этом снижение предела выносливости при наличии коррозии тем более сильно выражено, чем выше предел прочности металла и чем больше последний склонен к коррозии.

Влияние коррозии при расчете можно учесть коэффициентом  $\beta_k$ , представляющим отношение предела выносливости  $\sigma_{k-1}^*$  корродированного образца к пределу выносливости  $\sigma_{-1}$  полированного образца,

т. е.  $\beta_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{-1}}$ . Влияние коррозии в процессе испытания на предел выносливости стальных образцов при ротационном изгибе показано на рис. 571, где кривая 1 характеризует влияние коррозии в пресной воде при наличии концентрации напряжений; 2 — в пресной воде при отсутствии концентрации или в морской воде при наличии концентрации, 3 — в морской воде при отсутствии концентрации.

Причиной столь резкого снижения выносливости вследствие коррозии являются коррозионные повреждения поверхности, вызывающие значительную концентрацию напряжений, а также ослабление сопротивления образованию трещин.

Уменьшить влияние состояния поверхности на усталость можно соответствующими технологическими методами обработки, приводящими к упрочнению поверхностных слоев. К числу таких методов относятся: наклеп поверхностного слоя путем накатки роликом, обдувки дробью и т. п.; химико-термические методы — азотирование, цементация, цианирование; термические — поверхностная закалка токами высокой частоты или газовым пламенем. Указанные методы обработки приводят к увеличению прочности поверхностного слоя и созданию в нем значительных сжимающих остаточных напряжений, затрудняющих образование усталостной трещины, а потому влияющих на повышение предела выносливости.

При наличии концентрации напряжений помимо глубины слоя и абсолютных размеров существенное влияние на эффект упрочнения оказывает уровень концентрации напряжений и градиент напряжений у поверхности. Эффект упрочнения растет с увеличением концентрации.

**Влияние пауз.** На предел выносливости имеют влияние паузы (перерывы в нагружении). При этом в одних случаях влияние пауз незначительно, в других число циклов до разрушения увеличивается за счет пауз на 15—20%. Увеличение числа циклов тем больше, чем чаще паузы и чем они длительнее (последний фактор влияет слабее).

**Влияние перегрузок.** Влияние перегрузок, т. е. нагрузок выше предела выносливости, на величину его зависит от характера перегрузки. При недогрузках (напряжениях ниже предела выносливости) и малых перегрузках до определенного количества циклов прочность повышается, при больших перегрузках после определенного числа циклов — понижается.

**Влияние тренировки.** Если приложить к образцу напряжения немного ниже предела выносливости и затем постепенно повышать величину переменной нагрузки, то сопротивление усталости можно значительно повысить. Это явление, называемое *тренировкой* материала, широко используется в технике.

Упрочнение можно получить при сравнительно кратковременных тренировках (порядка 50 000 циклов), но сильных перегрузках. Опыты показывают, что если вначале действует меньшая, а затем большая перегрузка, то выносливость материала оказывается более высокой, чем в том случае, когда сначала действует большая, а затем меньшая перегрузка.

**Влияние температуры.** С повышением температуры предел выносливости обычно падает, а с понижением ее — растет как у гладких образцов, так и у образцов с концентраторами.

Для стали при температуре выше  $300^{\circ}\text{C}$  наблюдается понижение предела усталости примерно на 15—20% на каждые 100 град повышения температуры. Правда, у ряда сталей при повышении температуры от 20 до  $300^{\circ}\text{C}$  предел усталости повышается. Однако это повышение, по-видимому, связано с физико-химическими процессами, происходящими при одновременном влиянии нагрева и переменных нагрузок.

При повышенных температурах даже при очень большом числе циклов кривая усталости не имеет горизонтального участка. Так, для гладких образцов даже при 100 млн. циклов горизонтальный участок не наблюдается. Влияние концентрации напряжений с повышением температуры в общем уменьшается, однако для ряда сталей, по-видимому, опять-таки за счет физико-химических процессов чувствительность к надрезу сплава увеличивается. При температурах порядка  $500\text{—}600^{\circ}\text{C}$  в стали начинаются процессы ползучести, имеющие место также и при переменных нагрузках даже при симметричном цикле.

При понижении температуры с 20 до  $-190^{\circ}\text{C}$  предел выносливости у некоторых сталей увеличивается более чем вдвое, хотя ударная вязкость их при этом понижается. Это еще раз указывает на принципиальное отличие между усталостным и хрупким разрушениями путем отрыва при статических и ударных нагрузках.

#### § 140. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

В случае простых видов деформации при изменении напряжений в детали по симметричному циклу запас прочности при действии, например, нормальных напряжений можно вычислить по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

где  $(\sigma_{-1k})_d$  — предел выносливости детали при растяжении — сжатии или при изгибе;

$\sigma_a$  — номинальные фактически действующие знакопеременные напряжения.

Для расчета на прочность при переменных нагрузках в случае сложного напряженного состояния можно использовать соответствующие гипотезы прочности. При этом для материалов в пластическом состоянии, как известно, применяют третью и четвертую гипотезы прочности. В рассматриваемом случае эти гипотезы должны быть записаны в виде

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} \quad (21.13)$$

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} \quad (21.14)$$

В соответствии с экспериментальными данными условие прочности в форме эллиптической зависимости (см. рис. 562) при изгибе и кручении выражается формулой (21.6), а применительно к детали достаточно больших размеров с концентрацией напряжений — формулой

$$(\sigma_{-1K})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[ \frac{(\sigma_{-1K})_d}{(\tau_{-1K})_d} \right]^2 \tau_a^2}, \quad (21.15)$$

или

$$\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1K})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1K})_d^2} = 1. \quad (21.16)$$

Тогда, имея в виду, что  $n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1K})_d}{\sigma_a}$  — коэффициент, характеризующий запас прочности только по нормальным напряжениям, и  $n_\tau = \frac{(\tau_{-1K})_d}{\tau_a}$  — коэффициент, характеризующий прочность только по касательным напряжениям, на основании соотношения (21.16) будем иметь:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

откуда запас прочности  $n$  при сложном напряженном состоянии, например при совместном действии изгиба и кручения, определится формулой

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (21.17)$$

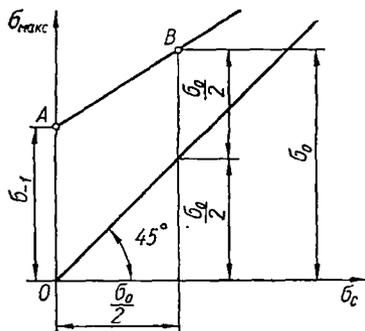


Рис. 572.

Определяя запасы прочности при асимметричных циклах для любого вида циклического нагружения (изгиба, растяжения — сжатия, кручения), исходят из схематизированной диаграммы предельных напряжений для образцов без концентрации напряжений (рис. 572).

Аналитическое выражение кривой предельных напряжений в координатах  $\sigma_{\max}$  —  $\sigma_c$  можно представить уравнением прямой, проходящей через две точки А

и В с координатами  $(0, \sigma_{-1})$  и  $(\frac{\sigma_0}{2}, \sigma_0)$ , и записать в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_c = \sigma_{-1} + \left( 1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \right) \sigma_c.$$

Обозначая

$$\Psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (21.18)$$

запишем уравнение кривой предельных напряжений для образца без концентрации напряжений так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \Psi_{\sigma}) \sigma_c \quad (21.19)$$

При действии касательных напряжений соответствующее уравнение имеет аналогичный вид:

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \Psi_{\tau}) \tau_c \quad (21.20)$$

Значения  $\Psi_{\sigma}$  и  $\Psi_{\tau}$  для ряда сталей при различных видах деформации в зависимости от предела прочности приведены в табл. 23.

Таблица 23

$\sigma_B, \text{ кг/мм}^2$	$\Psi_{\sigma}$	$\Psi_{\tau}$
35—55	0	0
52—75	0,05	0
70—100	0,10	0,05
100—120	0,20	0,10
120—140	0,25	0,15

Учитывая влияние на предел выносливости при асимметричном цикле различных факторов, в том числе концентрации напряжений, абсолютных размеров сечения, состояния поверхности и т. д., исходят из экспериментально установленных закономерностей, заключающихся в том, что отношение предельных амплитуд напряжений гладкого образца и рассматриваемой детали остается постоянным независимо от величины среднего напряжения цикла. На основании этого можно построить схематизированную диаграмму предельных напряжений для детали (рис. 573).

Это построение можно получить также, исходя из следующих аналитических представлений. В соответствии с выражением (21.19) предельная амплитуда напряжений образца выражается формулой

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c = [\sigma_{-1} + (1 - \Psi_{\sigma}) \sigma_c] - \sigma_c = \sigma_{-1} - \Psi_{\sigma} \sigma_c,$$

а предельная амплитуда напряжений для детали  $(\sigma_{ak})_d$  на основании выше отмеченной закономерности о влиянии различных факторов

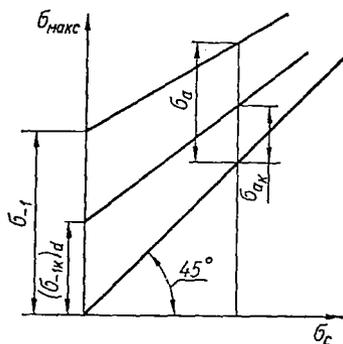


Рис. 573.

только на переменную составляющую напряжений будет в  $(k_\sigma)_d$  раз меньше, т. е.

$$(\sigma_{ак})_d = \frac{\sigma_a}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d}. \quad (21.21)$$

Тогда уравнение кривой предельных напряжений для детали может быть записано в виде

$$(\sigma_{макс})_d = (\sigma_{ак})_d + \sigma_c = \sigma_c + \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d}\right] \sigma_c.$$

Запас прочности для случая асимметричного цикла целесообразно определять, исходя из рассмотрения схематизированной диаграммы предельных напряжений при простом нагружении (рис. 574).

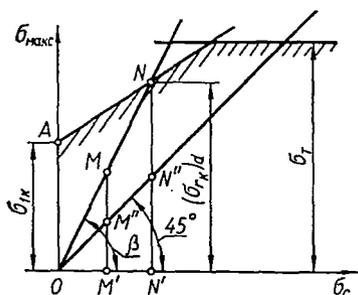


Рис. 574.

Предположим, что номинальные напряжения в детали  $\sigma_{макс}$  и  $\sigma_c$  характеризуются точкой  $M$ . Поскольку эта точка лежит ниже линии предельных напряжений, то деталь, очевидно, будет иметь некоторый запас прочности ( $n > 1$ ). Далее предположим, что в процессе работы детали с ростом нагрузки  $\frac{\sigma_{макс}}{\sigma_c} = \text{const}$ , т. е. имеет место простое нагружение детали, при котором и переменная и постоянная составляющие цикла напряжений возрастают пропорционально.

При таком нагружении точка, характеризующая цикл напряжений, будет двигаться от точки  $M$  к точке  $N$  по лучу  $ON$ , выходящему из начала координат. В этом случае коэффициент асимметрии цикла будет оставаться постоянным, поскольку

$$\text{tg } \beta = \frac{\sigma_{макс}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{макс}}{\sigma_{макс} + \sigma_{мин}} = \frac{2}{1+r} = \text{const}.$$

Имея в виду, что опасное напряжение характеризуется точкой на кривой предельных напряжений, запас прочности для рассматриваемого случая определим так:

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_c)_d}{\sigma_c} = \frac{(\sigma_{рк})_d}{\sigma_{макс}} = \frac{(\sigma_{ак})_d}{\sigma_a},$$

где  $(\sigma_{рк})_d$  — предел выносливости детали при асимметричном цикле;  
 $(\sigma_{ак})_d$  — предельная амплитуда напряжений для детали.

При этом величину  $(\sigma_{рк})_d$ , характеризуемую ординатой точки  $N$ , можно определить, исходя из совместного решения уравнений линии

кривой предельных напряжений для детали (линии  $AN$ ) и луча  $ON$  (рис. 574), которые соответственно имеют вид

$$(\sigma'_{\max\kappa})_d = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[ 1 - \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right] \sigma'_c; \quad (21.22)$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} \sigma'_c,$$

где штрихами обозначены текущие координаты.

Ордината точки  $N$ , лежащей на пересечении прямых  $AN$  и  $ON$ , будет одна и та же, т. е.

$$(\sigma'_{\max\kappa})_d = \sigma'_{\max},$$

или

$$\frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[ 1 - \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right] \sigma'_c = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} \sigma'_c,$$

откуда находим абсциссу точки  $N$ :

$$\sigma'_c = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \left[ \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} - 1 + \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right]} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c}{(k_\sigma)_d \sigma_{\max} - \sigma_c (k_\sigma)_d + \Psi_\sigma \sigma_c}.$$

Учитывая, что  $\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c$ , последнее выражение для абсциссы запишем в виде

$$\sigma'_c = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c}. \quad (21.23)$$

Для получения значения ординаты точки  $N$  надо значение абсциссы (21.23) подставить во второе уравнение системы (21.22). Обозначая эту ординату через  $(\sigma_{r\kappa})_d$ , получим:

$$(\sigma_{r\kappa})_d = \frac{\sigma_{-1} \sigma_{\max}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c}. \quad (21.24)$$

Таким образом, окончательное выражение для запаса прочности имеет вид

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{r\kappa})_d}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c}. \quad (21.25)$$

Аналогично при кручении

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_d \tau_a + \Psi_\tau \tau_c}. \quad (21.26)$$

Если асимметрия цикла очень велика, то при выполнении условия прочности по усталости напряжение в детали может оказаться близким к предельному по статической несущей способности. В связи с этим

наряду с запасом прочности по усталости [формулы (21.25), (21.26)] следует определять запас прочности и по статической несущей способности. Диаграмма предельных напряжений в соответствии с этим будет ограничена по статической несущей способности линией  $\sigma_{\max} = \sigma_T$ . Для асимметричных циклов при циклическом сжатии ( $\sigma_c < 0$ ) можно принять  $\Psi_\sigma = 0$ .

При асимметричном цикле и сложном напряженном состоянии расчет запасов прочности производится как по усталости, так и по статической прочности. Определяя запас прочности по усталости, следует пользоваться полученной выше формулой (21.17):

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

где  $n_\sigma$  и  $n_\tau$  находят соответственно по формулам (21.25) и (21.26). Запас прочности по статической несущей способности определяют по методике, изложенной в гл. XVIII. При этом прочность оценивается по наименьшему из запасов по усталости и по статической несущей способности.

Величина запасов прочности при расчете на выносливость зависит от точности определения усилий и напряжений, от однородности материалов, качества технологии изготовления детали и других факторов. При повышенной точности расчета (с широким использованием экспериментальных данных по определению усилий, напряжений и характеристик прочности), при достаточной однородности материала и высоком качестве технологических процессов принимается запас прочности  $n = 1,3 \div 1,4$ . Для обычной точности расчета (без надлежащей экспериментальной проверки усилий и напряжений) при умеренной однородности материала  $n = 1,4 \div 1,7$ . При пониженной точности расчета (отсутствии экспериментальной проверки усилий и напряжений) и пониженной однородности материала, особенно для литья и деталей значительных размеров,  $n = 1,7 \div 3,0$ .

Наиболее достоверные данные о необходимых запасах прочности детали могут быть установлены на основе результатов натуральных испытаний деталей или опыта эксплуатации машин с деталями этого типа.

*Пример 89.* Шатун поршневого двигателя, представляющий собой стержень круглого сечения, вдоль оси подвержен повторно-переменным нагрузкам, меняющимся без ударов от  $P_{\max} = +20\,000$  кг до  $P_{\min} = -5000$  кг. Стержень имеет радиальное отверстие  $\varnothing 3$  мм, материал стержня — сталь 12ХНЗА с такими характеристиками прочности:  $\sigma_B = 95$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_T = 72$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 43$  кг/мм<sup>2</sup> и  $\Psi_\sigma = 0,1$ . Поверхность шатуна грубо шлифованная. Требуется определить диаметр его из расчета на выносливость и полученные размеры сопоставить с найденными из расчета на статическую нагрузку, равную максимальной нагрузке цикла.

В рассматриваемом примере требуется произвести так называемый проекторочный расчет, т. е. по известным усилиям, действующим на деталь, определить ее размеры.

Устанавливаем опасное сечение вала. Таким следует принять сечение в месте радиального отверстия.

Поскольку соотношение размеров шатуна и радиального отверстия не известно, то не известна и величина  $\alpha_\sigma$ . Поэтому, имея в виду, что этот коэффициент при малых отверстиях и крупных деталях машин составляет величину, близкую к двум, задаемся значением теоретического коэффициента концентрации  $\alpha_\sigma = 2$ .

Пользуясь графиком рис. 563, находим коэффициент чувствительности к концентрации напряжений: при  $\alpha_\sigma = 2$  и  $\sigma_B = 92 \text{ кг/мм}^2$   $q_\sigma = 0,77$ .

Пользуясь формулой (21.7), определим эффективный коэффициент концентрации:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,77 (2 - 1) = 1,77.$$

Из графика рис. 570 по кривой 3 находим коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности:  $\beta = 0,82$ .

Задаемся коэффициентом, учитывающим размеры стержня:  $\epsilon = 0,8$ .

Эффективный коэффициент концентрации детали с учетом размеров и состояния поверхности

$$(k_\sigma)_d = \frac{k_\sigma}{\epsilon \beta} = \frac{1,77}{0,8 \cdot 0,82} = 2,70.$$

Примем запас прочности  $n = 2,1$ .

Определим сечение шатуна из формулы (21.25):

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c} = \frac{\sigma_{-1} F}{(k_\sigma)_d \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} + \Psi_\sigma \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} F &= \frac{n_\sigma}{\sigma_{-1}} \left[ (k_\sigma)_d \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} + \Psi_\sigma \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \right] = \\ &= \frac{2,1}{43} \left[ 2,70 \cdot 7500 + 0,1 \frac{20000 + 5000}{2} \right] = 1050 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

Определяем диаметр стержня из формулы  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ :

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1050}{3,14}} \approx 37 \text{ мм}.$$

Проверим значение ранее принятого коэффициента, учитывающего абсолютные размеры, для чего воспользуемся графиком рис. 565. Согласно этому графику при  $d = 37 \text{ мм}$   $\epsilon = 0,81$ , т. е. величина  $\epsilon$  оказалась близкой к ранее принятому значению  $\epsilon = 0,8$ .

Находим диаметр шатуна из статического расчета, т. е. из условия  $\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{F} \leq [\sigma_{+1}]$ :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P_{\max}}{\sigma_{+1}} = \frac{20000}{48} = 417 \text{ мм}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 417}{3,14}} = 23,1 \text{ мм}.$$

Примем  $d = 24 \text{ мм}$ , т. е. диаметр оказался в  $\frac{37}{24} = 1,54$  раза меньше, чем в случае расчета с учетом переменности нагрузки.

*Пример 90.* Шток водяного насоса, представляющий собой ступенчатый круглый стальной стержень (рис. 575), подвергается повторно-переменному растяжению — сжатию усилиями, сопровождающимися динамическим приложением нагрузки (внезапное приложение нагрузки  $k_d = 2$ ) с характеристикой цикла  $r = -0,5$ . Материал штока — малоуглеродистая сталь с временным сопротивлением  $\sigma_b = 40 \text{ кг/мм}^2$ , пределом текучести  $\sigma_T = 33 \text{ кг/мм}^2$  и пределом усталости при симметричном цикле  $\sigma_{-1} = 20,4 \text{ кг/мм}^2$ . Поверхность стержня обработана резцом.

Определить допускаемые усилия, действующие на шток. В данном случае речь идет о проверочном расчете. Имеются размеры детали, необходимо установить допускаемую нагрузку при заданной характеристике цикла. За расчетное следует принять опасное сечение, находящееся в месте сопряжения двух диаметров.

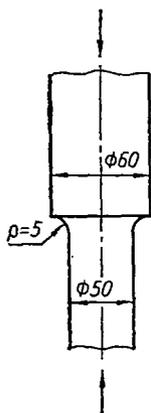


Рис. 575.

Определим теоретический коэффициент концентрации: при  $\frac{r}{d} = \frac{5}{50} = 0,1$  можно принять  $\alpha_\sigma = 1,6$  (см. § 32).

По графику рис. 563 находим коэффициент чувствительности к концентрации напряжений:  $q_\sigma = 0,39$ .

Определяем действительный коэффициент концентрации:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,39 (1,6 - 1) = 1,234.$$

По графику рис. 565 находим коэффициент влияния абсолютных размеров:  $\epsilon = 0,75$ .

Коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности, определим по графику рис. 570:  $\beta = 0,875$ .

Принимаем коэффициент запаса прочности с учетом коэффициента динамичности  $k_d = 2$  равным  $n_\sigma = 3$ .

Находим эффективный коэффициент концентрации напряжений для детали:

$$(k_\sigma)_d = \frac{k_\sigma}{\beta \epsilon} = \frac{1,234}{0,875 \cdot 0,75} = 1,88.$$

Определяя амплитуду напряжений из формулы

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c},$$

получим:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma} \cdot \frac{1}{(k_\sigma)_d + \Psi_\sigma \frac{\sigma_c}{\sigma_a}}.$$

Имея в виду, что для рассматриваемого материала ( $\sigma_b = 40 \text{ кг/мм}^2$ ) согласно табл. 23 коэффициент  $\Psi_\sigma = 0$ , по последней формуле найдем:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma (k_\sigma)_d} = \frac{20,4}{3 \cdot 1,88} \approx 4 \text{ кг/мм}^2.$$

Определяем допускаемые усилия, действующие на шток: амплитудное значение усилия

$$P_a = F \sigma_a = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_a = \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} \cdot 4 = 7860 \text{ кг};$$

среднее значение усилия

$$P_c = P_a \frac{1+r}{1-r} = 7860 \frac{1-0,5}{1+0,5} = 2620 \text{ кг};$$

максимальное усилие

$$P_{\max} = P_a + P_c = 7860 + 2620 = 10\,480 \text{ кг};$$

минимальное усилие

$$P_{\min} = P_{\max} r = -0,5 \cdot 10\,480 = -5240 \text{ кг}.$$

*Пример 91.* Вращающийся круглый полый вал (рис. 576) в опасном сечении, ослабленном отверстием для смазки ( $\varnothing 3 \text{ мм}$ ), испытывает переменный изгиб с моментом  $M = 15\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ . Одновременно вал подвергается переменному кручению с коэффициентом асимметрии  $r = -0,25$  и  $M_{\text{крмакс}} = 18\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ .

Диаметры вала: наружный  $D = 70 \text{ мм}$ , внутренний  $d = 35 \text{ мм}$ . Материал — сталь 45 ( $\sigma_b = 70 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_T = 32 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{-1} = 30 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\tau_1 = 18 \text{ кг/мм}^2$ ). Поверхность вала шлифованная. Определить запас прочности вала.

Определим номинальные напряжения в валу от изгиба и кручения:

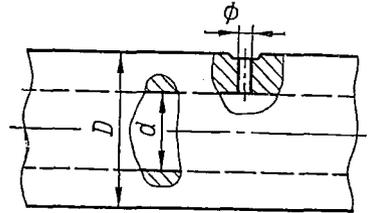


Рис. 576.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]} = \frac{32 \cdot 15\,000}{3,14 \cdot 70^3 (1 - 0,5^4)} = 4,73 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = 4,73 \text{ кг/мм}^2; \quad \sigma_c = 0;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{крмакс}}}{W_p} = \frac{16M_{\text{крмакс}}}{\pi D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]} = \frac{16 \cdot 18\,000}{3,14 \cdot 70^3 (1 - 0,5^4)} = 2,83 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\tau_{\min} = r \tau_{\max} = -0,25 \cdot 2,83 = -0,71 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{2,83 + 0,71}{2} = 1,77 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{2,83 - 0,71}{2} = 1,06 \text{ кг/мм}^2.$$

Определим коэффициенты концентрации при изгибе. Коэффициент концентрации  $\alpha_\sigma$  при изгибе (см. § 65, рис. 269) при  $\frac{\varnothing}{D} = \frac{3}{70} = 0,04$   $\alpha_\sigma = 2,5$ . Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений  $q_\sigma$  согласно графикам (рис. 563)  $q_\sigma = 0,65$ . Эффективный коэффициент концентрации при изгибе будет

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,65 (2,5 - 1) = 1,975.$$

Коэффициент, учитывающий абсолютные размеры, согласно графикам (рис. 565) можно принять равным  $\varepsilon = 0,70$ ; коэффициент, учитывающий состояние поверхности вала (см. рис. 570, кривая 2),  $\beta = 0,92$ . Тогда эффективный коэффициент концентрации вала

$$(k_\sigma)_d = \frac{k_\sigma}{\varepsilon \beta} = \frac{1,975}{0,70 \cdot 0,92} = 3,1.$$

Определим запас прочности на изгиб:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c} = \frac{30}{3,1 \cdot 4,73 + 0} = 2,05.$$

Определим коэффициенты концентрации при кручении. Теоретический коэффициент концентрации примем  $\alpha_\tau = 3$ ; коэффициент чувствительности к концен-

трации напряжений примем тот же, что и при изгибе, т. е.  $q_{\tau} = q_{\sigma} = 0,65$ . Тогда эффективный коэффициент концентрации при кручении

$$k_{\tau} = 1 + q_{\sigma} (\alpha_{\tau} - 1) = 1 + 0,65 (3 - 1) = 2,3.$$

Принимая, как и при изгибе,  $\epsilon = 0,70$  и  $\beta = 0,92$ , получаем:

$$(k_{\tau})_d = \frac{k_{\tau}}{\epsilon \beta} = \frac{2,3}{0,70 \cdot 0,92} = 3,60.$$

Определим запас прочности при кручении:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_d \tau_a + \Psi_{\tau} \tau_c} = \frac{18}{3,60 \cdot 1,77 + 0,05 \cdot 1,06} = 2,77.$$

Определим общий запас прочности при совместном действии переменного изгиба и кручения:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,05 \cdot 2,77}{\sqrt{2,05^2 + 2,77^2}} = 1,65.$$

Таким образом, общий коэффициент запаса прочности оказался значительно меньше запаса прочности отдельно на изгиб и на кручение.

## Глава XXII

### РАСЧЕТЫ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

#### § 141. РАСЧЕТ НА УДАР ПРИ ОСЕВОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

С явлением удара приходится иметь дело в том случае, когда скорость рассматриваемого элемента конструкции или соприкасающихся с ним частей в очень короткий промежуток времени изменяется на конечную величину. Получающиеся при этом большие ускорения (замедления) приводят к возникновению значительных инерционных сил, действующих в направлении, противоположном направлению ускорений, т. е. в направлении движения тела. В случае падающего груза величина силы удара (динамической силы  $P_d$ ) может быть вычислена по формуле

$$P_d(t) = \frac{Q}{g} j(t), \quad (22.1)$$

где  $Q$  — вес падающего груза;

$g$  — ускорение земного притяжения;

$j(t)$  — ускорение падающего груза после соприкосновения его с препятствием.

Однако определение силы удара  $P_d(t)$  по формуле (22.1) весьма затруднительно, так как не известно время соударения, т. е. время, в течение которого скорость движущегося тела снижается от своего максимального значения в момент соприкосновения с ударяемым телом (начало удара) до нуля после деформации последнего (конец удара). В связи с указанными трудностями, определяя напряжения в элементах

упругих систем, вызываемые действием ударных нагрузок (динамические напряжения), в инженерной практике обычно пользуются так называемым энергетическим методом, основанным на законе сохранения энергии. Согласно этому методу полагают, что при соударении движущихся тел уменьшение запаса кинетической энергии их равно увеличению потенциальной энергии деформации соударяющихся упругих тел.

Вывод расчетных формул для определения динамических напряжений проведем на примере простейшей системы (рис. 577), состоящей из вертикально расположенного упругого призматического стержня с жесткостью  $c = \frac{EF}{l}$  и некоторого груза  $Q$ . Полагаем при этом, что удар неупругий в том смысле, что при соударении падающий груз не отскакивает от стержня, а движется вместе с ним, и, следовательно, в стержне не возникают упругие волны. Кроме того, данная система обладает одной степенью свободы.

Рассмотрим два случая:

1) груз  $Q$  прикладывается к стержню статически, т. е. нагрузка медленно нарастает от нуля до своего максимального значения (рис. 577, а) и сжимает стержень на величину  $\delta_{ст}$ ;

2) груз падает с некоторой высоты  $H$  и, ударяя по стержню, создает в нем сжатие  $\delta_d > \delta_{ст}$  (рис. 577, б).

Изменение деформации при ударном действии нагрузки  $Q$  по сравнению с деформацией при статическом приложении той же нагрузки может быть охарактеризовано коэффициентом динамичности

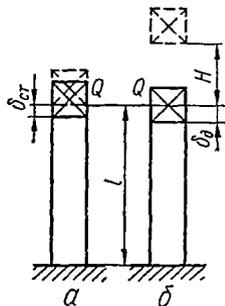


Рис. 577.

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}, \quad (22.2)$$

откуда динамическую деформацию через статическую можно выразить формулой

$$\delta_d = k_d \delta_{ст}. \quad (22.3)$$

Учитывая линейную связь между напряжением и деформацией, а также принимая одинаковыми модули упругости при статическом и ударном действии нагрузки, что с достаточной степенью точности подтверждается экспериментом, по аналогии с последней формулой можно установить связь между статическим и динамическим напряжениями:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}, \quad (22.4)$$

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{F} \quad (22.5)$$

— напряжение, возникающее в стержне при сжатии силой, равной весу падающего груза.

Чтобы использовать формулу (22.4), нужно определить коэффициент динамичности  $k_d$ . При этом будем исходить из общепринятого в теории удара допущения, что *связь между усилиями и деформациями сохраняется одной и той же как при статической, так и при динамической нагрузках*, т. е.

$$\delta_{ст} = \frac{P_{ст}}{c}; \quad (22.6)$$

$$\delta_d = \frac{P_d}{c}, \quad (22.7)$$

где  $P_{ст}$  — статическая нагрузка, равная весу падающего груза (в нашем случае  $P_{ст} = Q$ );

$P_d$  — динамическая нагрузка, представляющая собой силу инерции ударяющего тела в первый момент его соприкосновения со стержнем.

Изменение кинетической энергии падающего груза численно равно работе, совершенной им при падении и деформировании стержня:

$$T = Q(H + \delta_d), \quad (22.8)$$

а потенциальную энергию деформации упругого тела при ударе, накопленную за счет уменьшения потенциальной энергии падающего тела, учитывая выражение (22.7) между усилием и деформацией, можно представить формулой

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c \delta_d^2}{2}. \quad (22.9)$$

Пользуясь законом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии, вызываемыми местными пластическими деформациями при соударении тел, а также инерцией массы ударяемого стержня, можно записать:

$$T = U_d.$$

На основании выражений (22.8) и (22.9)

$$\frac{c \delta_d^2}{2} = Q(H + \delta_d). \quad (22.10)$$

Имея в виду, что  $\delta_{ст} = \frac{Q}{c}$ , уравнение (22.10) можно представить так:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{ст}\delta_d - 2\delta_{ст}H = 0.$$

Отсюда можно определить динамическую деформацию:

$$\delta_d = \delta_{ст} \pm \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2\delta_{ст}H}. \quad (22.11)$$

Поскольку знак минус в этой формуле не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи, следует сохранить знак плюс.

Записав формулу (22.11) в виде

$$\delta_d = \delta_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right) \quad (22.12)$$

и сопоставив ее с формулой (22.3), находим выражение для коэффициента динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \quad (22.13)$$

Имея в виду, что  $H = \frac{v^2}{2g}$  ( $v$  — скорость падающего груза в начале удара), коэффициент динамичности можно представить формулой

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}} \quad (22.14)$$

Если учесть, что

$$\frac{2H}{\delta_{ст}} = \frac{QH}{\frac{1}{2} Q\delta_{ст}} = \frac{T_0}{U_{ст}},$$

то коэффициент динамичности  $k_d$  можно также записать и так:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст}}}, \quad (22.15)$$

где  $T_0 = QH$  — кинетическая энергия падающего груза к моменту соударения;

$U_{ст}$  — потенциальная энергия деформации подвергающегося удару упругого стержня, которая накапливается в нем при статическом действии силы, равной весу ударяющего груза  $Q$ , т. е.

$$U_{ст} = \frac{1}{2} Q\delta_{ст} = \frac{Q^2}{2c} = \frac{Q^2 l}{2EF}. \quad (22.16)$$

Если  $H = 0$ , т. е. сила прикладывается внезапно, то согласно выражению (22.13) коэффициент динамичности  $k_d = 2$ . Поскольку высота падения груза  $H$  всегда значительно больше  $\delta_{ст}$ , то в большинстве случаев определения коэффициента динамичности в выражениях под корнем единицей по сравнению со вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда на основании выражения (22.13) получим:

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}, \quad (22.17)$$

или, согласно формуле (22.15),

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{ст}}}. \quad (22.18)$$

Имея выражение (22.13) для коэффициента динамичности, напряжение при ударе на основании зависимости (22.4) определим формулой

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right), \quad (22.19)$$

или

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left( 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}} \right) = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QH E}{1F}}. \quad (22.20)$$

Аналогично определяем и усилие при ударе:

$$P_d = \sigma_d F = P_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right). \quad (22.21)$$

Изложенная приближенная теория расчета на удар имеет определенные пределы применения. Они обусловлены скоростью падающего груза к моменту удара и жесткостью конструкции, что выражается в формулах (22.13) или (22.15) отношением  $\frac{2H}{\delta_{ст}}$  или  $\frac{T_0}{U_{ст}}$ . Так, если

$$\frac{2H}{\delta_{ст}} = \frac{T_0}{U_{ст}} \leq 100,$$

то ошибка расчета не превышает 10%. Учет массы ударяемой конструкции расширяет пределы применения приближенной теории.

Из анализа формул (22.19) и (22.20) видно, что при равномерно распределенных напряжениях, одинаковых во всех сечениях стержня, величина динамических напряжений зависит не только от площади  $F$  поперечного сечения его, как это имеет место в случае действия статической нагрузки в статически определенных системах, но и от длины  $l$  и модуля упругости  $E$  материала стержня, т. е. можно сказать, что динамические напряжения в стержне при ударе зависят как от объема, так и от качества его материала. При этом чем больше объем упругого стержня, подвергающегося

удару (чем больше «энергоемкость» стержня), тем меньше динамические напряжения, возникающие в нем, а чем больше модуль упругости материала стержня, тем динамические напряжения больше.

До сих пор предполагалось, что стержни, подвергаемые действию удара, по всей длине имеют одинаковые сечения. Именно для таких стержней справедливо все сказанное о роли объема стержня при оценке динамических напряжений.

Картина оказывается несколько иной в стержнях, отдельные участки которых имеют различную площадь поперечного сечения. В этом случае (рис. 578, а) наибольшее номинальное напряжение

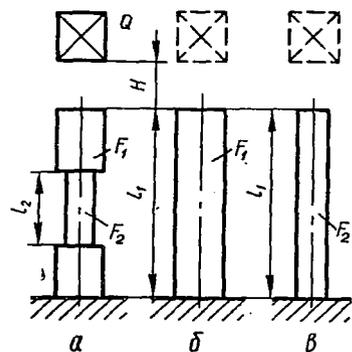


Рис. 578.

в стержне (без учета концентрации) будет в месте наименьшей площади (в месте выточки). Зависит оно, как известно, от деформативности всего стержня, а не только его ослабленной части. Понизить динамические напряжения в этом случае можно двумя путями: увеличением поперечного сечения в месте выточки или уменьшением площади поперечного сечения утолщенной части стержня и, следовательно, повышением податливости всего стержня в целом, что приводит к снижению максимальных динамических напряжений в месте выточки. Если изготовить весь стержень постоянного диаметра, равного диаметру выточки  $d_2$ , то при этом существенно увеличится деформативность стержня, а следовательно, уменьшится динамическое напряжение  $\sigma_d$ .

Таким образом, *снижение напряжений при ударе может быть достигнуто увеличением объема путем уничтожения выточки, т. е. выравниванием напряжений по различным сечениям, или уменьшением объема материала за счет уменьшения площади утолщенной части, что приводит к увеличению деформативности.*

Сказанное удобно проиллюстрировать на примере определения максимальных динамических напряжений, возникающих в трех типах стержней при продольном ударе грузом  $Q$ , падающим с одной и той же высоты  $H$ .

Пусть соотношения между отдельными размерами стержней следующие:

$$\frac{F_2}{F_1} = \alpha; \quad \frac{l_2}{l_1} = \beta.$$

Для определения напряжений в каждом из стержней воспользуемся общей формулой

$$(\sigma_d)_{\max} = k_d (\sigma_{ст})_{\max} = k_d \frac{Q}{F_{\min}},$$

где

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}; \quad \delta_{ст} = \sum_1^n \frac{Ql_n}{E_n F_n};$$

$n$  — число ступеней.

Для ступенчатого стержня (рис. 578, а)

$$(\delta_{ст})_a = \frac{Q}{E} \left( \frac{l_1 - l_2}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = \frac{Ql_1}{EF_1} \left( 1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Для стержня постоянного сечения с размерами утолщенной части ступенчатого стержня (рис. 578, б)

$$(\delta_{ст})_б = \frac{Ql_1}{EF_1}.$$

Для стержня постоянного сечения, равного минимальному сечению ступенчатого стержня (рис. 578, в), имеем:

$$(\delta_{ст})_в = \frac{Ql_1}{EF_2} = \frac{Ql_1}{EF_1 \alpha}.$$

Тогда соотношения между деформациями отдельных стержней, очевидно, будут следующими:

$$(\delta_{ст})_a : (\delta_{ст})_б : (\delta_{ст})_в = \left(1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha}\right) : 1 : \frac{1}{\alpha}. \quad (22.22)$$

Пренебрегая в выражении (22.17) единицей по сравнению с корнем, что при большой высоте падения  $H$  и малой статической деформации  $\delta_{ст}$  можно допустить, выражение для коэффициента динамичности приближенно можно записать в виде

$$k_d \approx \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}.$$

Пользуясь этой формулой и учитывая выражение (22.22), получим соотношения между коэффициентами динамичности для рассматриваемых случаев:

$$(k_d)_a : (k_d)_б : (k_d)_в = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha(1-\beta) + \beta}} : 1 : \sqrt{\alpha}. \quad (22.23)$$

Исходя из выражений

$$(\sigma_d)_a = (k_d)_a (\sigma_{ст})_a = (k_d)_a \frac{Q}{F_2} = (k_d)_a \frac{Q}{\alpha F_1};$$

$$(\sigma_d)_б = (k_d)_б (\sigma_{ст})_б = (k_d)_б \frac{Q}{F_1};$$

$$(\sigma_d)_в = (k_d)_в (\sigma_{ст})_в = (k_d)_в \frac{Q}{F_2} = (k_d)_в \frac{Q}{\alpha F_1}$$

и учитывая соотношение (22.23), получим:

$$(\sigma_d)_a : (\sigma_d)_б : (\sigma_d)_в = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2(1-\beta) + \alpha\beta}} : 1 : \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \quad (22.24)$$

Предположим, например, что коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  имеют следующие числовые значения:

$$\alpha = \frac{F_2}{F_1} = 0,5; \quad \beta = \frac{l_2}{l_1} = 0,4.$$

Тогда по формуле (22.24) найдем следующее соотношение:

$$(\sigma_d)_a : (\sigma_d)_б : (\sigma_d)_в = 1,7 : 1 : 1,41.$$

Таким образом, видим, что наибольшее напряжение возникает в стержне с выточкой (рис. 578, а), а наименьшее — в стержне постоянного максимального сечения (рис. 578, б). В стержне же минимального сечения, постоянного по длине (рис. 578, в), напряжение имеет некоторое промежуточное значение.

Результаты проведенного анализа имеют существенное практическое значение. Прежде всего этот анализ показывает, что характер сопротивления стержней удару качественно резко отличается от сопротивления их статической нагрузке. При статическом сжатии утолщение одной части стержня не вызывает изменения напряжений в сечениях другой части; при ударе оно повышает их. Местное уменьшение

площади поперечного сечения на небольшой длине стержня резко повышает напряжение.

Для снижения напряжений надо стремиться, главным образом, к увеличению податливости стержня путем увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, выравнивания площадей поперечного сечения с целью получить все участки стержня одинаковой минимальной площади сечения. Вот почему, конструируя стержни, работающие на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей их длине. Местные утолщения допустимы лишь на небольших участках длины; местные выточки небольшой протяженности крайне нежелательны. Если при таких условиях сконструировать достаточно прочный стержень не удастся, необходимо удлинить его или равномерно увеличить его площадь.

Условие прочности при ударе имеет вид

$$(\sigma_d)_{\max} \leq [\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

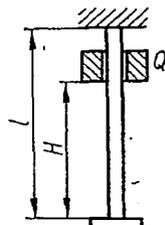


Рис. 579.

Величину коэффициента запаса  $n_T$  можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса при статическом действии нагрузки (1,4—1,6), так как динамичность уже отражена в расчетных формулах коэффициентом  $k_d$ . Однако ввиду некоторой упрощенности изложенного метода расчета этот коэффициент принимают несколько большим ( $n_T = 2$ ).

Мы рассмотрели расчет динамических напряжений в случае ударного сжатия. Однако все приведенные формулы будут также справедливы и для ударного растяжения, в частности для случая, показанного на рис. 579.

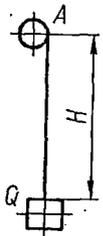


Рис. 580.

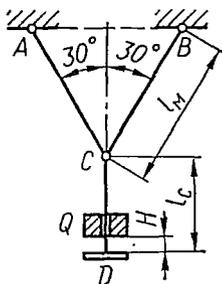


Рис. 581.

*Пример 92.* Груз  $Q$  весом 5 кг, прикрепленный к стальной проволоке диаметром 3 мм (рис. 580), падает от точки  $A$  с ускорением  $g$ . Найти напряжение в проволоке, когда ее верхний конец внезапно остановлен. Массой проволоки пренебречь.

Если ускорение груза равно  $g$ , то растягивающего напряжения в проволоке не будет. Напряжение в точке  $A$  после внезапной остановки проволоки получим по формуле (22.20) при длине проволоки  $l = H$ :

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{Fl}} = \frac{4 \cdot 5}{\pi \cdot 0,3^2} + \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,1 \cdot 10^8}{\pi \cdot 0,3^2}} = \\ &= 70,8 + 17\,200 \approx 17\,271 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Так как кинетическая энергия падающего тела увеличивается в той же пропорции, что и объем проволоки, то напряжение не зависит от высоты падения груза  $Q$ .

*Пример 93.* Определить величину динамических напряжений, возникающих в стержнях подвески (рис. 581) при падении груза  $Q = 25$  кг с высоты  $H = 1$  см. Площадь поперечного сечения медных наклонных стержней  $AC$  и  $BC$   $F_M = 0,2$  см<sup>2</sup>,

площадь поперечного сечения стального стержня  $CD$   $F_c = 0,25 \text{ см}^2$ , длина стального стержня  $l_c = 2,4 \text{ м}$ ; длина наклонных стержней  $l_m = 2 \text{ м}$ .

Динамические напряжения в стальном стержне определяются по формуле

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$$

Находим значения величин, входящих в эту формулу:

$$(\sigma_{ст})_c = \frac{Q}{F_c} = \frac{25}{0,25} = 100 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_{ст})_m = \frac{Q}{2F_m \cos 30^\circ} = \frac{25}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,866} = 72 \text{ кг/см}^2;$$

$$\delta_{ст} = (\delta_{ст})_c + \frac{(\delta_{ст})_m}{\cos 30^\circ} = \frac{Q l_c}{E_c F_c} + \frac{\frac{Q}{2} l_m}{E_m F_m \cos^2 30^\circ} = \frac{25 \cdot 240}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,25} +$$

$$+ \frac{12,5 \cdot 200}{1 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,75} = 28,7 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{28,7 \cdot 10^{-3}}} = 9,4.$$

Напряжения в стержнях

$$(\sigma_d)_c = k_d (\sigma_{ст})_c = 9,4 \cdot 100 = 940 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_d)_m = k_d (\sigma_{ст})_m = 9,4 \cdot 72 = 677 \text{ кг/см}^2.$$

На практике встречаются такие случаи, когда на основании полученных выше формул динамические напряжения найти нельзя. К числу таких задач может быть отнесена, например, задача об определении напряжений в стальном канате, поднимающем груз  $Q$  со скоростью  $v$  при внезапном торможении подъемника (рис. 582).

Обозначим свободную длину каната в момент останова через  $l$  и площадь поперечного сечения его через  $F$ .

Рис. 582. Пренебрегая массой троса и полагая на основе закона сохранения энергии, что кинетическая энергия движущегося груза полностью превращается в потенциальную энергию деформации троса, получим следующее уравнение для определения наибольшего удлинения  $\delta$  троса:

Пренебрегая массой троса и полагая на основе закона сохранения энергии, что кинетическая энергия движущегося груза полностью превращается в потенциальную энергию деформации троса, получим следующее уравнение для определения наибольшего удлинения  $\delta$  троса:

$$\frac{EF\delta^2}{2l} - \frac{EF\delta_{ст}^2}{2l} = \frac{Qv^2}{2g} + Q(\delta - \delta_{ст}),$$

откуда, имея в виду, что

$$Q = EF \frac{\delta_{ст}}{l},$$

получим:

$$\frac{EF}{2l} (\delta - \delta_{ст})^2 = \frac{Qv^2}{2g}.$$

Отсюда

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\frac{Qv^2 l}{EFg}}.$$

Следовательно, при внезапной остановке растягивающие напряжения возрастают в отношении

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{v}{\delta_{ст}} \sqrt{\frac{Ql}{EFg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}}, \quad (22.25)$$

т. е.

$$k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}}.$$

**Пример 94.** Определить напряжение в стальном канате, опускающем груз весом  $Q = 4,5 \text{ Т}$  со скоростью  $v = 1 \text{ м/сек}$  в случае внезапной остановки в момент, когда груз опустится на  $18 \text{ м}$ . Сечение каната  $F = 16 \text{ см}^2$ ; модуль упругости  $E = 1,05 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ .

Вычислим статическую деформацию каната:

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{EF} = \frac{4500 \cdot 1800}{1,05 \cdot 10^8 \cdot 16} = 0,482.$$

Согласно формуле (22.25) коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{0,482 \cdot 981}} = 5,6$$

и динамические напряжения

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = k_d \frac{Q}{F} = 5,6 \frac{4500}{16} = 1575 \text{ кг/см}^2.$$

Получившиеся высокие напряжения при резком торможении могут привести к обрыву подъемного каната, что необходимо учитывать.

**Пример 95.** Решить предыдущую задачу при условии, что между тросом и грузом помещена пружина, которая под действием груза  $4500 \text{ кг}$  дает статическое удлинение  $12 \text{ см}$ .

Статическая деформация упругого элемента (каната  $\delta_{ст}^k$  и пружины  $\delta_{ст}^n$ )

$$\delta_{ст} = \delta_{ст}^k + \delta_{ст}^n = 0,482 + 12 = 12,482 \text{ см}.$$

Подставляя значение  $\delta_{ст}$  в формулу (22.25), найдем:

$$k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{12,482 \cdot 981}} = 1,92.$$

Динамическое напряжение в канате

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = k_d \frac{Q}{F} = 1,92 \frac{4500}{16} = 540 \text{ кг/см}^2.$$

Как видим, включение пружины между канатом и грузом существенно (почти в 3 раза) снизило динамические напряжения при резком торможении груза. В данном случае пружина явилась тем амортизатором, который часто применяют в технике для смягчения толчков, а следовательно, и уменьшения возникающих при толчках динамических напряжений.

**Учет массы стержня, испытывающего удар.** В некоторых случаях масса стержня может оказать существенное влияние на динамические напряжения, возникающие в стержне, подверженном действию ударных нагрузок.

Для учета влияния инерции массы ударяемого стержня в процессе удара следует различать два этапа. Первый начинается с момента соприкосновения падающего груза, имеющего максимальную скорость  $v$ , со стержнем и заканчивается, когда произойдет смятие материала, за счет чего скорость груза снизится до величины  $v_1$ , а верхний конец ударяемого тела приобретет за это время ту же скорость  $v_1$ . Второй этап начинается с момента совместного движения груза и конца подвергаемого удару стержня.

Если в момент начала второго этапа удара верхний конец ударяемого стержня будет иметь скорость  $v_1$ , то, предположив, что скорость последующих (нижележащих) сечений стержня уменьшается по линейному закону, достигая нулевого значения в нижнем сечении стержня, найдем скорость движения произвольного сечения стержня на расстоянии  $x$  от нижнего сечения (рис. 583) в этот момент:

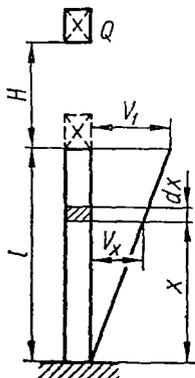


Рис. 583.

$$v(x) = v_1 \frac{x}{l}.$$

Кинетическая энергия массы участка  $dx$ , находящегося на расстоянии  $x$  от нижнего конца,

$$dT_c = \frac{\gamma F dx}{2g} \left( v_1 \frac{x}{l} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия всего стержня определится выражением

$$T_c = \frac{\gamma F}{2g} \cdot \frac{v_1^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma F l}{3} \cdot \frac{v_1^2}{2g}.$$

Обозначив собственный вес стержня через  $Q_c$ , кинетическую энергию в начальный момент второго этапа можем выразить формулой

$$T_c = \frac{Q_c}{3} \cdot \frac{v_1^2}{2g}. \quad (22.26)$$

Таким образом, если в момент начала первого этапа удара падающий груз обладал кинетической энергией  $\frac{Qv^2}{2g}$ , то потеря энергии до начала второго этапа за счет местных пластических деформаций

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left( \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c v_1^2}{2g} \right),$$

или

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) \right]. \quad (22.27)$$

С другой стороны, эту же потерю кинетической энергии можно выразить, исходя из того, что скорость груза в первый этап удара изменяется на величину  $v - v_1$ , вследствие чего кинетическая энергия падающего груза уменьшается на величину  $\frac{Q}{2g} (v - v_1)^2$ . Ударяемый

стержень за первый этап удара получит запас кинетической энергии  $\frac{Q_c}{3} \cdot \frac{(0 - v_1)^2}{2g}$ . Тогда суммарная потеря кинетической энергии падающего груза, выраженная через величину потери энергии груза и запасенной энергии стержня,

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{2g} (0 - v_1)^2,$$

или

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) \right]. \quad (22.28)$$

Приравняв правые части выражений (22.27) и (22.28), будем иметь:

$$\frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) \right] = \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) \right].$$

Отсюда определим величину скорости груза в момент начала второго этапа удара:

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q}}. \quad (22.29)$$

Энергия удара стержня, характеризуемая кинетической энергией, запасенной системой в начальный момент второго этапа удара, определится формулой

$$\begin{aligned} T &= \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c v_1^2}{2g} = \frac{Q}{2g} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) v_1^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) \left( \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q}} \right)^2, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$T = \frac{Qv^2}{2g \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right)}. \quad (22.30)$$

Энергия  $T$  при ударе согласно закону сохранения энергии и будет трансформирована в потенциальную энергию деформации упругого стержня. Поэтому полученное выражение (22.30) и должно быть подставлено вместо  $T_0$  в формулу (22.15) для определения коэффициента динамичности, т. е.

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{ст}}},$$

или

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q} \right) U_{ст}}}.$$

Учитывая, что  $\frac{v^2}{2g} = H$  и  $HQ = T_0$ , а также обозначая  $\frac{Q_c}{Q} = \beta$ , формулу для определения коэффициента динамичности представим в виде

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta\right)}}, \quad (22.31)$$

а максимальное напряжение в стержне, испытывающем удар,

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta\right)}} \right],$$

или

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{F\gamma l}{Q}\right)}} \right].$$

Из последних формул видим, что если значение коэффициента  $\beta$  (отношение веса ударяемого стержня к падающему грузу) не мало по сравнению с единицей, то энергия удара  $T$  меньше величины  $T_0 = \frac{Qv^2}{2g}$ , т. е. учет массы стержня снижает расчетное напряжение при ударе.

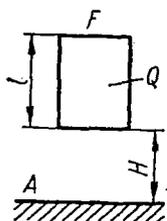


Рис. 584.

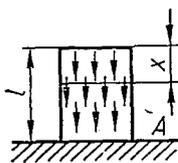


Рис. 585.

Удар стержня о жесткую плиту. В некоторых случаях приходится определять напряжения в ударяющем теле, в частности, рассчитывая шток ковочного молота. При этом наиболее опасным для прочности штока является момент окончанияковки, когда проковываемое изделие почти не деформируется и вся энергия удара поглощается штоком. Схематически этот случай показан на рис. 584, где некоторый призматический стержень длиной  $l$  поперечного сечения  $F$  и веса  $Q$  падает с высоты  $H$  и ударяется о жесткую плиту  $A$ . Поскольку плита не деформируется, то весь запас кинетической энергии  $T_0 = QH$ , накопленной падающим стержнем к моменту соударения, целиком перейдет в потенциальную энергию деформации падающего стержня.

Так как характер сил инерции массовый (они действуют на каждую единицу объема), то при ударе стержня о плиту в каждом его сечении динамические напряжения по величине будут разными. В верхнем сечении они равны нулю, а в последующих (нижележащих) нарастают по линейному закону, достигая максимума у нижнего сечения. Динамическое напряжение в произвольном сечении  $x$  стержня (рис. 585) через максимальное напряжение в нижнем сечении может быть выражено так:

$$\sigma_d(x) = (\sigma_d)_{\max} \frac{x}{l}.$$

Величина потенциальной энергии деформации под действием сил инерции в элементе стержня длиной  $dx$  на расстоянии  $x$  может быть выражена следующим образом:

$$dU_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2(x)}{2E} F dx = \frac{(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}}^2}{2E} F \frac{x^2}{l^2} dx.$$

Тогда энергия деформации всего стержня

$$U_{\text{д}} = \int_0^l F \frac{(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}}^2}{2El^2} x^2 dx = \frac{(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}}^2}{6E} Fl. \quad (22.32)$$

Зная запас кинетической энергии  $T_0$  падающего стержня и пренебрегая потерями энергии на местное смятие при ударе, трение о среду, деформацию плиты и т. п., примем, что  $U_{\text{д}} = T_0$ , откуда на основании формулы (22.32)

$$\frac{(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}}^2}{6E} lF = T_0.$$

Максимальное напряжение при ударе

$$(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}}. \quad (22.33)$$

Учитывая, что  $T_0 = \gamma FlH$ , получим:

$$(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}} = \sqrt{6E\gamma H}. \quad (22.34)$$

Так как высота падения груза  $H$  может быть выражена через скорость в момент удара по известной формуле  $H = \frac{v^2}{2g}$ , то максимальное напряжение при ударе может быть выражено также формулой

$$(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}} = v \sqrt{\frac{3E\gamma}{g}}.$$

Преобразовав формулу (22.33) иначе, получим:

$$(\sigma_{\text{д}})_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2EQH}{Fl}}. \quad (22.35)$$

Из сопоставления формул (22.35) и (22.20), пренебрегая в последней членом  $\frac{Q}{F}$ , найдем, что динамические напряжения в ударяющем стержне будут такие, как будто он получил удар от другого стержня с кинетической энергией, в три раза большей по сравнению с энергией рассматриваемого стержня, падающего на жесткую плиту.

## § 142. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СКРУЧИВАЮЩЕМ УДАРЕ

В случае ударного кручения (рис. 586) можно из энергетического баланса ( $U = T$ ) вывести формулу для определения максимального напряжения, аналогичную той, которая была получена при продольном ударе:

$$(\tau_d)_{\max} = k_d \tau_{ст}; \quad (22.36)$$

где, как и прежде,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}.$$

Здесь  $\delta_{ст}$  — перемещение точки соударения в направлении удара под действием статически приложенной силы  $Q$ . Пренебрегая деформацией кривошипа и полагая, что вследствие малости перемещения проекция на вертикаль перемещения точки соударения равна длине дуги,  $\delta_{ст}$  можно вычислить по формуле

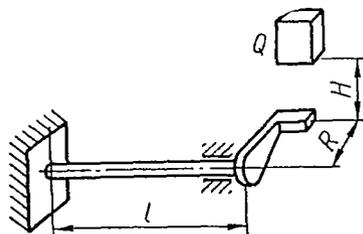


Рис. 586.

$$\delta_{ст} = \varphi R = \frac{M_{кр} l}{GJ_p} R = \frac{QRl}{GJ_p} R,$$

т. е.

$$\delta_{ст} = \frac{QR^2 l}{GJ_p}, \quad (22.37)$$

где  $Q$  — вес падающего груза;

$l$  — длина вала;

$R$  — радиус кривошипа.

Если к кривошипу внезапно приложен крутящий момент, т. е. высота падения груза  $H = 0$ , то коэффициент динамичности [см. формулу (22.13)]  $k_d = 2$ .

В машиностроении ударное кручение чаще всего вызывается не падением тех или иных грузов, а силами инерции масс при больших ускорениях последних. Это имеет место, главным образом, при торможении быстровращающихся валов, несущих маховики.

Определять напряжения и деформации стержней, находящихся под действием скручивающих ударных нагрузок, как и при растяжении или сжатии, целесообразно из рассмотрения потенциальной энергии деформации скручиваемого стержня.

Потенциальная энергия деформации стержня при скручивающем ударе может быть представлена в виде

$$U_d = \frac{1}{2} M_d \varphi_d = \frac{M_d^2 l}{2GJ_p},$$

где  $M_d$  — динамический крутящий момент;

$\varphi_d$  — соответствующий угол закручивания вала длиной  $l$ .

Вообще говоря,  $M_d$  обычно не известен. Известна кинетическая энергия  $T_0$  соответствующей массы маховика, вызывающей ударное кручение. Так например, при резком торможении вала, несущего маховик на некотором расстоянии от места торможения, участок вала между тормозом и маховиком будет испытывать ударное кручение.

При этом, зная начальный запас энергии маховика и конечный после его торможения, можно найти ту часть кинетической энергии  $T_0$ , которая превращается в потенциальную энергию деформации  $U_d$  вала. Определяя возникающие в этом случае напряжения, их выражают не через действующий при этом крутящий момент  $M_d$ , а через энергию деформации или равную ей кинетическую энергию.

Так как 
$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{W_p},$$

где  $W_p$  — момент сопротивления для круглого вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

то 
$$M_d = \frac{\tau_{\max} \pi d^3}{16}.$$

Тогда потенциальная энергия деформации вала может быть выражена через максимальное напряжение формулой

$$U_d = \frac{\tau_{\max}^2 \pi^2 d^3 l}{16^2 \cdot 2GJ_p} = \frac{\tau_{\max}^2 l F}{4G},$$

где  $l$  — длина скручиваемого участка вала;  
 $F$  — площадь поперечного сечения его.

Пренебрегая различными потерями энергии, можно принять, что

$$U_d = T_0.$$

Тогда напряжение при ударном кручении может быть определено по формуле

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}}, \quad (22.38)$$

где кинетическая энергия маховика

$$T_0 = \frac{J}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{J}{2} \omega^2; \quad J = \frac{QD^2}{8g};$$

$J$  — полярный момент инерции массы маховика;

$Q$  — вес маховика.

*Пример 96.* Диск диаметром  $D = 20$  см и весом  $Q = 50$  кг, насаженный на пал  $AB$  длиной  $l = 1$  м и диаметром  $d = 6$  см (рис. 587), вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей  $n = 120$  об/мин. Определить величину наибольших касательных напряжений в вале в тот момент, когда конец  $A$  внезапно останавливается (крутящий удар). Массой вала пренебречь. Модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

Для определения максимального напряжения при ударном кручении воспользуемся формулой (22.38):

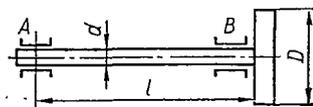


Рис. 587.

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}},$$

где

$$T_0 = \frac{J}{2} \omega^2 = \frac{QR^3}{4g} \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 = \frac{QD^2}{16g} \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 =$$

$$= \frac{50 \cdot 20^2 \cdot 3,14^2 \cdot 120^2}{16 \cdot 981 \cdot 900} = 201 \text{ кг} \cdot \text{см};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} = 28,26 \text{ см}^2.$$

Подставляя полученные значения в формулу для  $\tau_{\text{макс}}$ , найдем:

$$\tau_{\text{макс}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{IF}} = 2 \sqrt{\frac{201 \cdot 8 \cdot 10^5}{100 \cdot 28,26}} = 476 \text{ кг/см}^2.$$

*Пример 97.* Работающая на сжатие винтовая пружина изготовлена из стальной проволоки квадратного сечения  $b = 6$  мм. Средний диаметр витка пружины  $D = 12$  см, число витков  $n = 18$ . Определить величину статической нагрузки, которая сожмет пружину на  $\lambda = 2,5$  см. Предполагая, что тот же груз падает на ненагруженную пружину с высоты  $H = 10$  см, определить осадку пружины и наибольшее касательное напряжение при ударе.  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

Вес груза определим из выражения статической осадки пружины:

$$\lambda = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\text{к}}} R.$$

Имея в виду, что

$$J_{\text{к}} = \beta h b^3; \quad M_{\text{кр}} = RQ; \quad l = 2\pi Rn,$$

осадку можно представить формулой

$$\lambda = \frac{QR^2 2\pi Rn}{G\beta h b^3},$$

откуда определится вес груза  $Q$ :

$$Q = \frac{\lambda G \beta h b^3}{2\pi R^3 n} = \frac{2,5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,141 \cdot 0,6^4}{2 \cdot 3,14 \cdot 6^3 \cdot 18} = 1,5 \text{ кг}.$$

Согласно табл. 14 (с. 217) при  $\frac{h}{b} = 1$  ( $h = b$ ) коэффициент  $\beta = 0,141$ .

Определим величину осадки пружины при динамическом приложении груза  $Q = 1,5$  кг в случае падения его с высоты  $H = 10$  см:

$$\lambda_{\text{д}} = k_{\text{д}} \delta_{\text{ст}}, \quad (22.39)$$

где

$$\delta_{\text{ст}} = \lambda = 2,5 \text{ см}; \quad k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{2,5}} = 4.$$

Подставляя значение  $k_{\text{д}}$  и  $\delta_{\text{ст}} = \lambda$  в формулу (22.39), найдем величину  $\lambda_{\text{д}}$ :

$$\lambda_{\text{д}} = k_{\text{д}} \lambda = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ см}.$$

Определим максимальную величину динамических напряжений кручения в витке пружины:

$$\tau_{\text{д}} = k_{\text{д}} \tau_{\text{ст}},$$

где

$$\tau_{\text{ст}} = \tau_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}; \quad W_{\text{к}} = ab^3.$$

Для квадратного сечения согласно табл. 14 коэффициент  $\alpha = 0,208$ . Тогда

$$\tau_{ст} = \frac{QR}{\alpha b^3} = \frac{1,5 \cdot 6}{0,208 \cdot 0,6^3} = 200 \text{ кг/см}^2,$$

а максимальное динамическое напряжение

$$\tau_d = k_d \tau_{ст} = 4 \cdot 200 = 800 \text{ кг/см}^2.$$

### § 143. РАСЧЕТ НА УДАР ПРИ ИЗГИБЕ

Рассматривая теорию удара, вызывающего изгиб, будем полагать, что, как и ранее, в процессе удара во всех его фазах движение конструкции происходит без потерь энергии на нагрев за счет трения о среду, на местные пластические деформации и т. п. Поэтому, определяя деформации и напряжения при изгибающем ударе, придем к формулам, аналогичным выражениям для ударного растяжения или сжатия. Применительно к случаю динамического изгиба указанные формулы соответственно примут вид

$$f_d = k_d f_{ст}; \quad (22.40)$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}; \quad (22.41)$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}}, \quad (22.42)$$

где  $f_{ст}$  — статический прогиб в месте удара, зависящий от схемы нагружения и условий опирания.

Так, например, для балки с длиной пролета  $l$ , шарнирно закрепленной по концам и испытывающей посредине пролета удар от падающего с высоты  $H$  груза  $Q$  (рис. 588),

$$(f_{ст})_{\max} = \frac{Ql^3}{48EJ}; \quad (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{4W}.$$

Для консоли, испытывающей удар от груза  $Q$ , падающего на свободный конец ее,

$$(f_{ст})_{\max} = \frac{Ql^3}{3EJ}; \quad (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{W}.$$

Подставляя значения  $f_{ст}$  в формулу для коэффициента динамичности (22.42), находим  $k_d$ , а затем по формулам (22.41) и (22.40) находим динамические напряжения и деформации. Так, для балки на двух опорах динамические напряжения определяются по формуле

$$(\sigma_d)_{\max} = k_d (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}} \right).$$

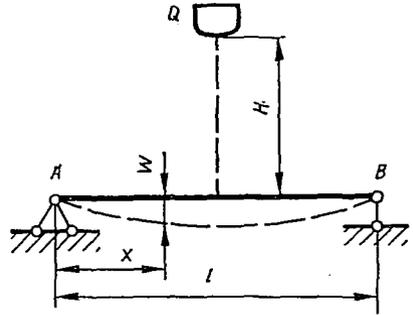


Рис. 588.

Обозначая  $QH = T_0$  (энергия ударяющего тела к моменту начала удара), последнюю формулу можно представить в виде

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right), \quad (22.43)$$

а условие прочности в этом случае запишется так:

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right) \leq [\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_d},$$

где  $n_d$  — запас прочности с учетом динамической нагрузки.

Сопrotивление балки ударным нагрузкам зависит как от момента сопротивления, так и от изгибной жесткости ее. Чем больше податливость (деформируемость) балки, тем бoльшую кинетическую энергию удара она может принять при тех же допускаемых напряжениях. Наибольший прогиб балки получится тогда, когда во всех ее сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т. е. если это будет балка равного сопротивления изгибу. Поэтому рессоры и делают в форме балок равного сопротивления.

Вычисляя напряжения при ударе, мы считали, что вся энергия удара переходит в потенциальную деформацию ударяемого тела. В действительности же некоторая ее часть расходуется на местные деформации, происходящие в зоне удара. При более или менее значительной массе ударяемого тела эта поправка может оказаться существенной.

В расчетах напряжений при ударе [формула (22.41)] не учитывалась также масса ударяемого тела, которая после прихода в соприкосновение с ударяющим телом приобретает определенные ускорения и тем самым влияет на возникающие в балке динамические напряжения. В некоторых случаях учет массы упругой системы, испытывающей удар, может оказаться также весьма существенным.

В качестве примера рассмотрим случай удара при изгибе (рис. 588). Пусть в момент удара груз  $Q$  имеет скорость  $v$ , а балка неподвижна. В течение очень короткого промежутка времени все элементы балки приобретают некоторую скорость, а скорость груза тем временем несколько уменьшается.

Можно считать, что в этот период удара ось балки остается практически прямой, а уменьшение скорости груза происходит за счет местных деформаций как балки, так и самого груза. Этот период окончится тогда, когда скорость груза и приобретенная скорость балки сравняются и будут иметь одну и ту же величину  $v_1$ . После этого начнется изгиб балки под действием груза  $Q$ , движущегося со скоростью  $v_1$  вместе с получившим удар сечением балки, как бы прикрепленным к грузу.

В этот второй период удара, когда имеет место деформация уже всей балки, кинетическая энергия груза и движущейся балки переходит в потенциальную энергию изгиба. Для вычисления этой энергии необходимо знать скорость груза  $v_1$  и скорость остальных сечений балки по ее длине.

Кинетическая энергия груза и балки до удара равна кинетической энергии падающего груза  $\frac{Qv^2}{2g}$ . В конце первого периода удара кинетическая энергия груза будет  $\frac{Qv_1^2}{2g}$ . Полагая, что при ударе балка гнется по той же кривой, что и при действии статической сосредоточенной нагрузки, приложенной посредине пролета ее, кинетическую энергию балки в конце первого периода удара можно определить следующим образом.

Уравнение изогнутой оси шарнирно опертой балки, статически нагруженной посредине пролета, легко представить в виде

$$w = \frac{f}{l^3} (3l^2x - 4x^3),$$

где  $f = \frac{Ql^3}{48EJ}$  — стрела прогиба балки.

Если под действием удара среднее сечение балки переместится на величину  $w_{\text{макс}}$  от положения статического равновесия, то сечение на расстоянии  $x$  от левого конца (рис. 588) переместится на

$$w = \frac{w_{\text{макс}}}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Скорость движения этого сечения при ударе

$$v = \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Тогда кинетическая энергия элемента балки длиной  $dx$  определится так:

$$dT_6 = \frac{v^2 \gamma F dx}{2g} = \frac{\gamma F dx}{2g} \left[ \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2x - 4x^3) \right]^2,$$

а кинетическая энергия всей балки

$$T_6 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma F}{2g} \left( \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2 \frac{1}{l^6} (3l^2x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} \left( \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2;$$

$$T_6 = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} \left( \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2. \quad (22.44)$$

В конце первого периода удара, когда скорость сечения балки в месте удара

$$\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} = v_1,$$

кинетическая энергия балки определится формулой

$$T_6 = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2.$$

Таким образом, потерянная при ударе кинетическая энергия  $T_1$  может быть вычислена по формуле

$$T_1 = \frac{Qv^2}{2g} - \left( \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 \right) = \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right]. \quad (22.45)$$

С другой стороны, эту же энергию можно вычислить иначе. Действительно, кинетическая энергия, потерянная грузом за счет изменения скорости на величину  $v_1 - v$ , будет

$$\frac{Q}{2g}(v - v_1)^2.$$

В то же время кинетическая энергия балки, приобретенная за счет изменения скорости на величину  $(v_1 - 0)$ , равна

$$\frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g}(0 - v_1)^2.$$

Поэтому суммарная кинетическая энергия груза и балки, соответствующая потерянной скорости груза и приобретенной скорости балки, может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Q}{2g}(v - v_1)^2 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g}(0 - v_1)^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (22.46)$$

Поскольку правые части формул (22.45) и (22.46) выражают одну и ту же энергию, то их можно приравнять, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right] &= \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - 2vv_1 + \right. \\ &\left. + v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда определим скорость груза  $v_1$  вместе с балкой в конце первого этапа удара:

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (22.47)$$

Имея скорость  $v_1$ , можно вычислить кинетическую энергию системы (груза с балкой), которая должна полностью перейти в упругую энергию деформации балки:

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 = \frac{v_1^2}{2g} Q \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right).$$

Подставляя в эту формулу  $v_1$  согласно формуле (22.47), получим:

$$T = \frac{Qv^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}} = \frac{T_0}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}}, \quad (22.48)$$

поскольку

$$T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g}. \quad (22.49)$$

Тогда формула (22.43) для определения максимального динамического напряжения в балке при ударе с учетом массы балки должна быть записана в виде

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2l^3}} \right).$$

Подставляя вместо  $T$  его значение согласно формуле (22.48), получим

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}} \right),$$

т. е. в этом случае коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}}. \quad (22.50)$$

Рассматривая выражения (22.48) и (22.50), видим, что если отношение  $\frac{\gamma Fl}{Q}$  не мало по сравнению с единицей, то энергия удара  $T$  заметно меньше величины  $T_0 = \frac{Qv^2}{2g}$ , т. е. учет массы балки снижает расчетные напряжения в балке при ударе, а неучет массы, по-видимому, идет в запас прочности. Вообще же анализ последней формулы показывает, что одна и та же кинетическая энергия, запасенная ударающей массой, будет вызывать разные динамические напряжения в зависимости от массы ударяемой балки, при этом, чем больше масса последней, тем напряжения будут меньше.

*Пример 98.* Определить напряжения и осадку рессоры автомобиля, если его колеса с небольшой скоростью попадают в канаву глубиной  $H = 200$  мм. Нагрузка на рессору  $P = 700$  кг. Рессора представляет собой балку равного сопротивления. Состоит рессора из 11 листов, длина ее  $l = 1020$  мм. Ширина листа  $b = 65$  мм, высота  $h = 6$  мм. Модуль упругости материала рессоры  $E = 2,1 \times 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Определим статическую деформацию рессоры:

$$f_{\text{ст}} = \frac{\beta Pl^3}{48EJ} = \frac{\beta Pl^3 12}{48Enbh^3} = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3},$$

где  $\beta$  — некоторый коэффициент ( $\beta = 1,25 \div 1,40$ ), учитывающий степень приближения практически выполненной рессоры к балке равного сопротивления.

Подставляя в последнюю формулу известные величины и принимая  $\beta = 1,35$ , находим:

$$f_{\text{ст}} = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3} = \frac{1,35 \cdot 700 \cdot 102^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 6,5 \cdot 0,6^3} \approx 7,7 \text{ см.}$$

Статическое напряжение

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Pl \cdot 6}{4nbh^2} = \frac{3Pl}{2nbh^2} = \frac{3 \cdot 700 \cdot 102}{2 \cdot 11 \cdot 6,5 \cdot 0,6^2} = 4170 \text{ кг/см}^2.$$

Определяем коэффициент динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{7,7}} \approx 3,5.$$

Осадка рессоры при попадании колеса автомобиля в канаву

$$f_d = k_d f_{ст} = 3,5 \cdot 7,7 = 27 \text{ см.}$$

Определяем динамическое напряжение:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 3,5 \cdot 4170 = 14\,600 \text{ кг/см}^2.$$

*Пример 99.* Определить динамические нормальные напряжения в стальном стержне при его падении с высоты  $H = 10$  см таким образом, что, оставаясь горизонтальным, он ударяется концами о жесткие опоры. Длина стержня  $l = 100$  см, диаметр  $d = 1$  см, удельный вес материала  $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>.

В данном случае динамические напряжения не могут быть определены через коэффициент динамичности  $k_d$  по приведенной выше методике. Поэтому, решая задачу, будем исходить из того, что вся кинетическая энергия  $T$ , запасенная падающим стержнем до достижения им опор, полностью перейдет в энергию деформации  $U$  стержня при его ударе (потерями энергии на смятие в местах контакта стержня с опорами и на трение о среду пренебрегаем), т. е.

$$U = T.$$

Полагаем, что в момент удара стержень будет нагружен силами инерции  $q_l$  массы стержня, равномерно распределенной по его длине. Эти силы не известны, поскольку не известны ускорения, какие будут иметь место при ударе стержня. Поэтому для определения потенциальной энергии деформации воспользуемся формулами потенциальной энергии в стержне, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой:

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EJ},$$

где

$$M(x) = \frac{q_l l}{2} x - \frac{q_l x^2}{2}.$$

Определим кинетическую энергию стержня:

$$T = HQ = HFl\gamma = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 100 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} = 6,12 \text{ кг} \cdot \text{см.}$$

Тогда потенциальная энергия деформации

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EJ} dx = \\ &= \frac{1}{2EJ} \int_0^l \frac{q_l^2 l^2}{4} \left( x^2 - 2 \frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2} \right) dx = \frac{q_l^2 l^5}{240EJ}, \end{aligned}$$

или

$$U = \frac{q_l^2 l^5}{240EJ} = \frac{q_l^2 \cdot 100^5 \cdot 64}{240 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 1^4} = 425 q_l^2.$$

Определяем интенсивность инерционной равномерно распределенной нагрузки  $q_l$  из условия

$$T = U,$$

или  $6,12 = 425q_l^2$ :

$$q_l = \sqrt{\frac{6,12}{425}} = 0,12 \text{ кг/см.}$$

Тогда максимальный изгибающий момент

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{8} = \frac{0,12 \cdot 100^2}{8} = 150 \text{ кг}\cdot\text{см.}$$

Определяем максимальное динамическое напряжение в падающем стержне:

$$(\sigma_d)_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{150 \cdot 32}{\pi \cdot 1^3} = 1530 \text{ кг/см}^2.$$

#### § 144. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ УДАРЕ

Для проверки способности материала сопротивляться ударным нагрузкам применяют особый вид испытаний ударным изгибом — определение ударной вязкости надрезанных образцов. Эти испытания про-

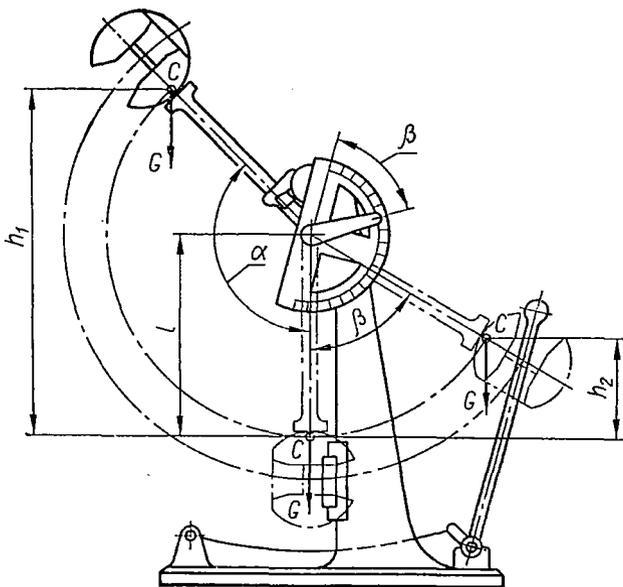


Рис. 589.

водят на маятниковых копрах (рис. 589). На рис. 590 показаны применяемый при испытании образец и направление удара бойка маятника. Разность высот положения маятника до и после удара позволяет вычислить работу  $A$ , израсходованную на разрушение образца.

Ударной вязкостью материала  $a_k$  называется величина работы разрушения образца, отнесенная к площади поперечного сечения его в месте надреза:

$$a_k = \frac{A}{F}. \quad (22.51)$$

Хотя данные об ударной вязкости не могут быть использованы при расчете на прочность, но они позволяют оценить особое качество металла — его склонность к хрупкости при динамических нагрузках в условиях сложного напряженного состояния в области надреза и решить вопрос о применимости того или иного материала для данных условий работы. Именно в таких условиях работают многие детали машин, имеющие отверстия, канавки для шпонок, разные входящие углы и т. п.

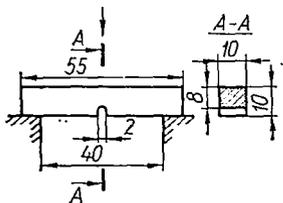


Рис. 590.

Низкая ударная вязкость служит основанием для браковки материала. Стали, применяемые для изготовления деталей, работающих при динамических нагрузках, должны иметь ударную вязкость не менее 8—10 (кг·м)/см<sup>2</sup>.

Таблица 24

Материал	$\sigma_B$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\delta$	$\psi$	Ударная вязкость $a_k$ , (кг·м)/см <sup>2</sup>
		%		
Мелкозернистая сталь . . . . .	37,5	35,3	72,2	13,1
Крупнозернистая сталь . . . . .	34,5	36,9	66,7	2,6

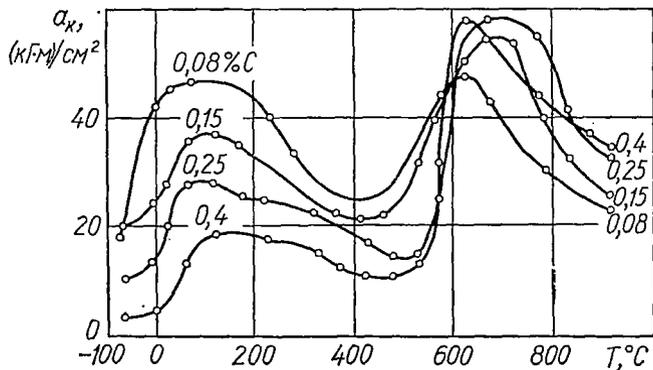


Рис. 591.

Ударная вязкость одной и той же стали зависит от ее структуры, причем зависимость эту при статических испытаниях обнаружить невозможно. В табл. 24 приведены результаты определения ударной вязкости для мелкозернистой и крупнозернистой сталей марки Ст.2

(0,15% углерода). Эти стали, имеющие почти одинаковые пластические свойства при статических испытаниях, сильно отличаются по ударной вязкости.

При низких температурах большинство черных металлов становятся хрупкими, ударная вязкость их также снижается. Для таких металлов ударными испытаниями с постепенным понижением температуры удалось установить так называемую *критическую температуру хрупкости* — температуру, при которой происходит резкое уменьшение ударной вязкости металла. Критическая температура хрупкости различных металлов различна. Ниже этой температуры металл становится непригодным для работы при динамических воздействиях.

Ударная хрупкость может появляться и при повышенных температурах. Например, ударная вязкость углеродистых сталей значительно снижается в интервале температур 200—550° (рис. 591).

## Глава XXIII

### КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

#### § 145. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Деформации и напряжения, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называют *контактными*. Вследствие деформации в местах соприкосновения элементов конструкции передачи давлений происходит по весьма малым площадкам. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объемное напряженное состояние (рис. 592). Как показывают расчеты, контактные напряжения имеют явно местный характер и весьма быстро убывают по мере удаления от места соприкосновения. Несмотря на это, исследовать контактные напряжения и деформации необходимо для решения вопросов прочности многих ответственных деталей. К таким деталям относятся, например, шариковые и роликовые подшипники, зубчатые колеса, элементы кулачковых механизмов, колеса подвижного состава, рельсы, шаровые и цилиндрические катки и т. д.

Впервые правильное решение основных случаев сжатия упругих тел дано методами теории упругости в работах немецкого физика Г. Герца, относящихся к 1881—1882 гг. Дальнейшее развитие контактной проблемы принадлежит, главным образом, советским ученым.

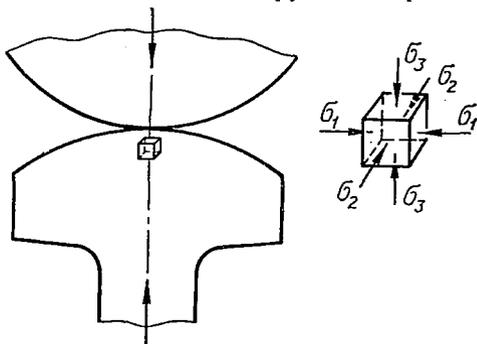


Рис. 592.

Ниже приведены некоторые результаты, полученные методами теории упругости при следующих предположениях:

- 1) нагрузки создают в зоне контакта только упругие деформации, следующие закону Гука;
- 2) площадки контакта малы по сравнению с поверхностями соприкасающихся тел;
- 3) силы давления, распределенные по поверхностям контакта, нормальны к этим поверхностям.

#### § 146. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**Сжатие шаров.** В случае взаимного сжатия силами  $P$  двух шаров с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 593) образуется круглая площадка контакта, радиус которой определяют по формуле

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (23.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости материалов шаров.

Нормальные (сжимающие) напряжения на площадке контакта распределены по полусфере. Наибольшее из них имеет место в центре площадки контакта:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \\ &= -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}; \end{aligned} \quad (23.2)$$

два других главных напряжения в центре площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{\max}|.$$

Таким образом, в наиболее напряженной точке площадки контакта материал испытывает напряженное состояние, близкое к равномерному сжатию. Благодаря этому в зоне контакта материал может выдержать без появления остаточных деформаций весьма большие давления (см. § 48). Вычислим, например, напряжение  $\sigma_{\max}$  в центре площадки контакта, при котором впервые появляются остаточные деформации. Воспользуемся для этого четвертой теорией прочности:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T.$$

Подставив значения главных напряжений, найдем:

$$0,2\sigma_{\max} = \sigma_T, \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = 5\sigma_T.$$

Для закаленной хромистой стали, употребляемой для шариковых под-

шипников, вместо предела текучести примем величину предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пл}} \approx 10\,000 \text{ кг/см}^2$ . Следовательно,  $\sigma_{\text{макс}} = 50\,000 \text{ кг/см}^2$ .

Наиболее опасная точка расположена на оси  $z$  на глубине, примерно равной половине радиуса площадки контакта. Главные напряжения в этой точке

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= -0,18\sigma_{\text{макс}}; \\ \sigma_3 &= -0,8\sigma_{\text{макс}}, \end{aligned} \quad (23.3)$$

где  $\sigma_{\text{макс}}$  — наибольшее напряжение в центре площадки контакта, определяемое по формуле (23.2).

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31 \sigma_{\text{макс}}. \quad (23.4)$$

Изменяя в формуле (23.2) знак при  $R_2$  на обратный, получим

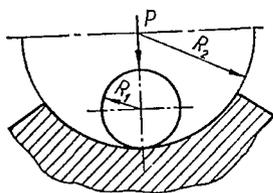


Рис. 594.

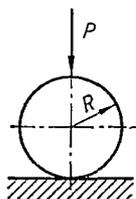


Рис. 595.

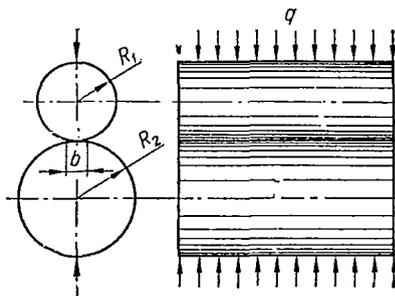


Рис. 596.

значение  $\sigma_{\text{макс}}$  в случае давления шара на вогнутую сферическую поверхность (рис. 594):

$$\sigma_{\text{макс}} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (23.5)$$

При взаимном давлении шара и плоскости (рис. 595), приняв  $R_2 = \infty$ , находим:

$$\sigma_{\text{макс}} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{1}{R^2}}. \quad (23.6)$$

**Сжатие цилиндров.** При взаимном нажатии двух цилиндров с параллельными образующими равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q \text{ кг/см}$  (рис. 596) площадка контакта имеет вид узкого прямоугольника, ширина которого определяется по формуле

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (23.7)$$

Наибольшее напряжение сжатия, действующее в точках оси площадки контакта,

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (23.8)$$

Анализ напряженного состояния показывает, что опасная точка расположена на оси  $z$  на глубине, равной 0,4 ширины площадки контакта. Главные напряжения в этой точке имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -0,180\sigma_{\text{макс}}; \\ \sigma_2 &= -0,288\sigma_{\text{макс}}; \\ \sigma_3 &= -0,780\sigma_{\text{макс}}.\end{aligned}\quad (23.9)$$

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\text{макс}} = 0,3\sigma_{\text{макс}}. \quad (23.10)$$

Изменяя в формуле (23.8) знак при  $R_2$  на обратный, получим напряжения в случае давления цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью. Такие напряжения действуют между цилиндрическим шарниром и балансирами (рис. 597).

При взаимном давлении цилиндра и плоскости, приняв в формуле (23.8)  $R_2 = \infty$ , находим:

$$\sigma_{\text{макс}} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (23.11)$$

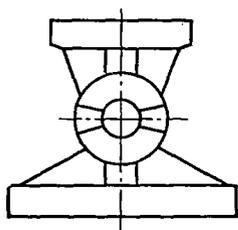


Рис. 597.

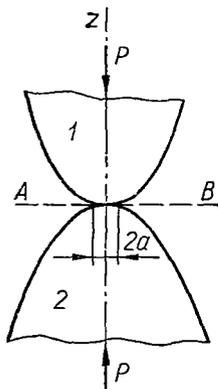


Рис. 598.

Приведенные выше формулы получены при  $\mu = 0,3$ . Однако для практических расчетов они пригодны и при других значениях коэффициента Пуассона. **Общий случай контакта двух тел.** Приведем формулы для общего случая контакта двух тел из одинакового материала.

Предполагается, что оба тела в точке касания имеют общую касательную плоскость  $AB$  и общую нормаль  $z$ , вдоль которой направлены силы  $P$  (рис. 598). Обозначим радиусы кривизны в точке касания первого тела  $\rho_1$  и  $\rho'_1$ , второго тела —  $\rho_2$  и  $\rho'_2$ , причем  $\rho_1 < \rho'_1$ ,  $\rho_2 < \rho'_2$ . Напомним, что главными кривизнами называют наибольшую и наименьшую кривизны, расположенные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр кривизны. Радиусы кривизны считаются положительными, если центры кривизны лежат внутри тела. Обозначим через  $\varphi$  угол между главными плоскостями кривизны тел, в которых лежат меньшие радиусы  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

В общем случае площадка контакта представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}\right)}}; \quad (23.12)$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}\right)}}; \quad (23.13)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  приведены в табл. 25 как функции вспомогательного угла  $\Psi$ , вычисляемого по формуле

$$\cos \Psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right) \cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (23.14)$$

При этом знак числителя в формуле (23.14) выбирают так, чтобы  $\cos \Psi$  был положительным.

Таблица 25

$\Psi^\circ$	$\alpha$	$\beta$	$\Psi^\circ$	$\alpha$	$\beta$
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Наибольшее напряжение сжатия в центре площадки контакта

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (23.15)$$

Наиболее опасная точка расположена на оси  $z$  на некоторой глубине, зависящей от отношения  $\left(\frac{b}{a}\right)$  полуосей эллиптической площадки контакта. Однако наибольшее касательное напряжение в опасной точке почти не зависит от указанного отношения размеров площадки, и можно принять, что

$$\tau_{\max} \approx 0,32 \sigma_{\max}. \quad (23.16)$$

Из приведенных формул видно, что контактные напряжения зависят от упругих свойств материалов и не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил нарастая все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличиваются и размеры площадки контакта.

#### § 147. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Учитывая «мягкость» напряженного состояния в опасных точках (все три главных напряжения сжимающие), проверку прочности при контактных напряжениях следует производить по третьей или четвертой теориям прочности [формулы (7.10), (7.19)]:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Внося в эти формулы значения главных напряжений в опасной точке, выраженные через наибольшее напряжение  $\sigma_{\text{макс}}$  в центре площадки контакта, условия прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экр}} = m\sigma_{\text{макс}} \leq [\sigma], \quad (23.17)$$

откуда

$$\sigma_{\text{макс}} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{\text{конт.}} \quad (23.18)$$

Здесь  $[\sigma]_{\text{конт.}} = \frac{[\sigma]}{m}$  — допускаемое значение для наибольшего напряжения в месте контакта.

Значения коэффициента  $m$  в зависимости от отношений полуосей эллиптической площадки контакта и выбранной теории прочности приведены в табл. 26.

Таблица 26

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{\text{эквIII}}}{\sigma_{\text{макс}}}$	$m = \frac{\sigma_{\text{эквIV}}}{\sigma_{\text{макс}}}$
1 (круг)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (полоса)	0,600	0,557

Можно рекомендовать следующий порядок расчета на прочность элементов конструкции в местах контакта:

1. Определить главные радиусы кривизны контактирующих тел ( $\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2$ ) и угол  $\varphi$  между главными плоскостями кривизны одного и другого тела.

2. Вычислить по формулам (23.12) и (23.13) с учетом формулы (23.14) размеры полуосей эллиптической площадки контакта.

3. Определить по формуле (23.15) наибольшее напряжение сжатия  $\sigma_{\text{макс}}$  в центре площадки контакта. В случае круглой и прямоугольной площадок контакта  $\sigma_{\text{макс}}$  находят непосредственно из формул (23.2) или (23.8), не определяя размеров площадки.

4. Расчет на прочность производят по формуле (23.18). Значение коэффициента  $m$  берут из табл. 26. При этом рекомендуется исходить из четвертой теории прочности.

Допускаемые наибольшие напряжения в месте контакта  $[\sigma]_{\text{конт}}$  для роликовых и шариковых подшипников из хромистой стали принимают до 35 000—50 000 кг/см<sup>2</sup>, для рельсовой стали — до 8000—10 000 кг/см<sup>2</sup>. В табл. 27 приведены значения допускаемых наибольших давлений на площадке контакта при первоначальном контакте по линии ( $m = 0,557$ ) и статическом действии нагрузки. В случае первоначального контакта в точке значения  $[\sigma]_{\text{конт}}$  следует увеличить в 1,3—1,4 раза.

Марка металла	Временное сопротивление $\sigma_v$ , кг/мм <sup>2</sup>	Твердость по Бринеллю $HV$	Допускаемое наибольшее давление на площадке контакта $[\sigma]_{\text{конт}}$ , кг/см <sup>2</sup>
Сталь:			
30	48—60	180	8 500—10 500
40	57—70	200	10 000—13 500
50	63—80	230	10 500—14 000
50Г	65—85	240	11 000—14 500
15Х	62—75	240	10 500—16 000
20Х	70—85	240	12 000—14 500
15ХФ	160—180	240	13 500—16 000
ШХ15	—	—	38 000
Чугун:			
СЧ 21-40	96	180—207	8 000—9 000
СЧ 24-44	100	187—217	9 000—10 000
СЧ 28-48	110	170—241	10 000—11 000
СЧ 32-52	120	170—241	11 000—12 000
СЧ 35-56	130	197—255	12 000—13 000
СЧ 38-60	140	197—255	13 000—14 000

*Пример 100.* Упорный шариковый подшипник с плоскими кольцами без желобов (рис. 599) статически сжат силами  $Q = 640$  кг.

Определить размеры площадки контакта между шариком и кольцом и величину наибольшего напряжения на этой площадке; проверить прочность. Диаметр шарика  $d = 15$  мм, число шариков  $i = 20$ , коэффициент неравномерности распределения нагрузки между отдельными шариками подшипника — 0,8. Материал шариков и колец — хромистая сталь, допускаемое значение наибольшего напряжения в месте контакта  $[\sigma]_{\text{конт}} = 35\,000$  кг/см<sup>2</sup>, модуль упругости  $E = 2,12 \times 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Учитывая неравномерность распределения нагрузки между отдельными шариками, найдем наибольшее усилие, сжимающее шарик, по формуле

$$P = \frac{Q}{0,8i} = \frac{640}{0,8 \cdot 20} = 40 \text{ кг.}$$

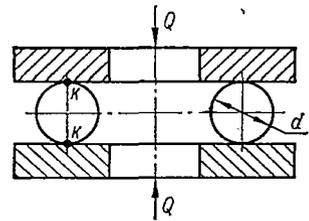


Рис. 599.

В местах соприкосновения колец и шариков (рис. 599, точки  $k$ ) образуется круглая площадка, радиус которой согласно формуле (23.1)

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{2PR}{E}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 1,5}{2,12 \cdot 10^6}} = 0,0268 \text{ см.}$$

При этом  $R_1 = \frac{d}{2} = 0,75$  см;  $R_2 = \infty$ ;  $E_1 = E_2 = E$ .

Величина наибольшего напряжения на этой площадке на основании формулы (23.2)

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \frac{1,5 \cdot 40}{3,14 \cdot 0,0268^2} = 26\,570 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно,  $\sigma_{\text{макс}} < [\sigma]_{\text{конт}}$ .

<sup>1</sup> Справочник машиностроителя, т. 3. М., Машгиз, 1955, с. 482.

**Пример 101.** Цилиндрическое ходовое колесо крана передает на рельс давление  $P = 7000 \text{ кг}$  (рис. 600). Диаметр наружного обода колеса  $D = 700 \text{ мм}$ . Радиус поперечного сечения головки рельса  $r = 300 \text{ мм}$ . Определить размеры площадки контакта и наибольшее напряжение на этой площадке. Модуль  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

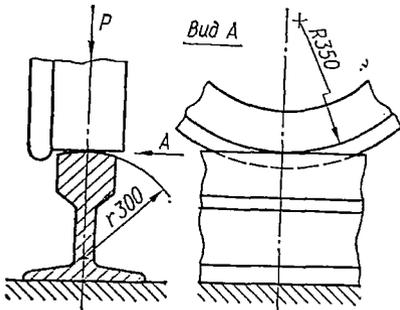


Рис. 600.

В соответствии с указанным выше порядком расчета выпишем главные радиусы кривизны:

для колеса  $\rho_1 = 350 \text{ мм}$ ,  $\rho_1' = \infty$ ;  
 для рельса  $\rho_2 = 300 \text{ мм}$ ,  $\rho_2' = \infty$ .

Угол между главными плоскостями, содержащими  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , как легко увидеть из чертежа,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Тогда из формулы (23.14) находим:

$$\cos \Psi = \pm \frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = -\frac{\frac{1}{35} - \frac{1}{30}}{\frac{1}{35} + \frac{1}{30}} = 0,077.$$

Следовательно, вспомогательный угол  $\Psi = 85,5^\circ$ .

Из табл. 25, произведя линейную интерполяцию, находим значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\alpha = 1,055; \quad \beta = 0,950.$$

По формулам (23.12) и (23.13) определяем размеры полуосей эллиптической площадки контакта:

$$a = 1,055 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 7000}{2 \cdot 10^6 \left( \frac{1}{35} + \frac{1}{30} \right)}} = 0,566 \text{ см};$$

$$b = 0,950 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 7000}{2 \cdot 10^6 \left( \frac{1}{35} + \frac{1}{30} \right)}} = 0,510 \text{ см}.$$

Наибольшее напряжение на площадке контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} = \frac{1,5 \cdot 7000}{3,14 \cdot 0,566 \cdot 0,51} = 11\,600 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 102.** Предполагая статическое действие нагрузки для радиального однорядного шарикового подшипника (рис. 601), определить размеры эллиптической площадки контакта наиболее нагруженного шарика с дорожками качения внутреннего и наружного колец и наибольшее напряжение на площадке контакта. Размеры подшипника: внутренний диаметр  $d = 130 \text{ мм}$ , наружный диаметр  $D = 280 \text{ мм}$ , ширина  $B = 58 \text{ мм}$ , диаметр шарика  $d_{\text{ш}} = 44,5 \text{ мм}$ . Радиус наименьшей окружности дорожки качения внутреннего кольца  $R_{\text{в}} = 80 \text{ мм}$ . Радиус наибольшей окружности дорожки качения наружного кольца  $R_{\text{н}} = 125 \text{ мм}$ . Радиус поперечного профиля дорожки качения  $r = 23,4 \text{ см}$ . Наибольшее расчетное давление на шарик  $P = 4000 \text{ кг}$ . Материал шариков и колец — хромистая сталь. Модуль упругости  $E = 2,12 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Допускаемое значение для наибольшего напряжения в месте контакта  $[\sigma]_{\text{конт}} = 50\,000 \text{ кг/см}^2$ .

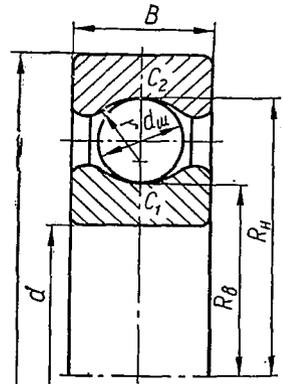


Рис. 601.

Главные радиусы кривизны поверхностей тел в точках  $C_1$  и  $C_2$  их первоначального касания равны:

для шарика

$$\rho_1 = \frac{1}{2} d_{ш} = 22,25 \text{ мм}; \quad \rho_1' = \frac{1}{2} d_{ш} = 22,25 \text{ мм};$$

для внутренней дорожки качения

$$\rho_2 = -r = -23,4 \text{ мм}; \quad \rho_2' = R_B = 80 \text{ мм};$$

для наружной дорожки качения

$$\rho_2 = -r = -23,4 \text{ мм}; \quad \rho_2' = -R_H = -125 \text{ мм}.$$

Вначале рассмотрим соприкосновение шарика с внутренней дорожкой качения. Формула (23.14) при  $\rho_1 = \rho_1'$  принимает вид

$$\cos \Psi = \pm \frac{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (23.19)$$

Подставим значения кривизны. Тогда

$$\cos \Psi = \pm \frac{-0,0427 - 0,0125}{0,0895 - 0,0427 + 0,0125} = 0,931.$$

Следовательно,  $\Psi = 21^\circ 25'$ .

Пользуясь табл. 25 и производя линейную интерполяцию, находим:

$$\alpha = 3,629; \quad \beta = 0,420.$$

Согласно выражениям (23.12) и (23.13) определяем размеры площадки касания:

$$\begin{aligned} a &= \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} = \\ &= 3,629 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{0,593 \cdot 2,12 \cdot 10^9}} = 0,740 \text{ см}; \\ b &= \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} = 0,420 \cdot 0,206 = 0,087 \text{ см}. \end{aligned}$$

Максимальное напряжение на площадке контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} = \frac{1,5 \cdot 4000}{3,14 \cdot 0,740 \cdot 0,087} = 29\,700 \text{ кг/см}^2.$$

Совершенно аналогично в месте контакта шарика с внешней дорожкой качения имеем:

$$\cos \Psi = \pm \frac{-0,0427 + 0,0080}{0,0895 - 0,0427 - 0,0080} = 0,895.$$

Отсюда  $\Psi = 26^\circ 30'$ .

Из табл. 25 находим, что

$$\alpha = 3,097; \quad \beta = 0,463.$$

Тогда

$$a = 3,097 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{2,12 \cdot 10^6 \cdot 0,388}} = 0,732 \text{ см};$$
$$b = 0,463 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{2,12 \cdot 10^6 \cdot 0,388}} = 0,109 \text{ см}.$$

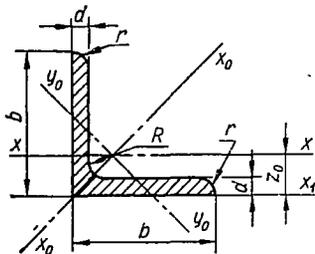
Наибольшее напряжение на площадке контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{1,5P}{\pi ab} = \frac{1,5 \cdot 4000}{3,14 \cdot 0,732 \cdot 0,109} = 24\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Как видим, наиболее опасной является точка  $C_1$ .

Для шариковых подшипников из закаленной хромистой стали допускаемое значение наибольшего напряжения на площадке контакта  $[\sigma]_{\text{конт}} = 50\,000 \text{ кг/см}^2$ . Следовательно, прочность обеспечена.

# ПРИЛОЖЕНИЯ



Приложение 1

Сортамент прокатной стали

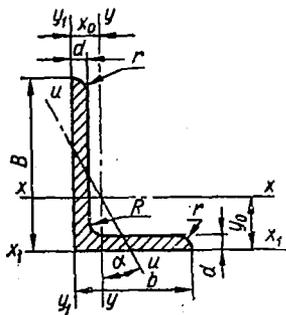
Уголки равнобокие (ГОСТ 8509—57)

№ профиля	Размеры, мм				Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Масса 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей							
							x—x		x <sub>0</sub> —x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> —y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> —x <sub>1</sub>	
	b	d	R	r			J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x<sub>0</sub></sub> , макс см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> , макс см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> , мин см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> , мин см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46		1,15		0,50	0,58						
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86		1,46		1,03	0,74						
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43		1,91		2,26	0,96						
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75		2,16		3,29	1,09						

№ про- филя	Размеры, мм				Пло- щадь про- филя, см <sup>2</sup>	Масса 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			x—x		x <sub>0</sub> —x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> —y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> —x <sub>1</sub>	
							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x<sub>0</sub></sub> макс см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> макс см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> мин см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> мин см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
4	40	3 4	5	1,7	2,35 3,08	1,85 2,42	3,55 4,58	1,23 1,22	5,63 7,26	1,55 1,53	1,47 1,90	0,79 0,78	6,35 8,53	1,09 1,13
4,5	45	3 4 5	5	1,7	2,65 3,48 4,29	2,08 2,73 3,37	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,5 12,7	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,1 15,3	1,21 1,26 1,30
5	50	3 4 5	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	2,32 3,05 3,77	7,11 9,21 11,2	1,55 1,54 1,53	11,3 14,6 17,8	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1,00 0,99 0,98	12,4 16,6 20,9	1,33 1,38 1,42
5,6	56	3,5 4 5	6	2	3,86 4,38 5,41	3,03 3,44 4,25	11,6 13,1 16,0	1,73 1,73 1,72	18,3 20,8 25,4	2,18 2,18 2,16	4,80 5,41 6,59	1,12 1,11 1,10	20,3 23,3 29,2	1,50 1,52 1,57
6,3	63	4 5 6	7	2,3	4,96 6,13 7,28	3,90 4,81 5,72	18,9 23,1 27,1	1,95 1,94 1,93	29,9 36,6 42,9	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,2	1,25 1,25 1,24	33,1 41,5 50,0	1,69 1,74 1,78
7	70	4,5 5 6 7 8	8	2,7	6,20 6,86 8,15 9,42 10,70	4,87 5,38 6,39 7,39 8,37	29,0 31,9 37,6 43,0 48,2	2,16 2,16 2,15 2,14 2,13	46,0 50,7 59,6 68,2 76,4	2,72 2,72 2,71 2,69 2,68	12,0 13,2 15,5 17,8 20,0	1,39 1,39 1,38 1,37 1,37	51,0 56,7 68,4 80,1 91,9	1,88 1,90 1,94 1,99 2,02
7,5	75	5 6 7 8 9	9	3	7,39 8,78 10,10 11,50 12,80	5,80 6,89 7,96 9,02 10,10	39,5 46,6 53,3 59,8 66,1	2,31 2,30 2,29 2,28 2,27	62,6 73,9 84,6 94,9 105	2,91 2,90 2,89 2,87 2,86	16,4 19,3 22,1 24,8 27,5	1,49 1,48 1,48 1,47 1,46	69,6 83,9 98,3 113 127	2,02 2,06 2,10 2,15 2,18
8	80	5,5 6 7 8	9	3	8,63 9,38 10,80 12,30	6,78 7,36 8,51 9,65	52,7 57,0 65,3 73,4	2,47 2,47 2,45 2,44	83,6 90,4 104 116	3,11 3,11 3,09 3,08	21,8 23,5 27,0 30,3	1,59 1,58 1,58 1,57	93,2 102 119 137	2,17 2,19 2,23 2,27
9	90	6 7 8 9	10	3,3	10,6 12,3 13,9 15,6	8,33 9,64 10,9 12,2	82,1 94,3 106 118	2,78 2,77 2,76 2,75	130 150 168 186	3,50 3,49 3,48 3,46	34,0 38,9 43,8 48,6	1,79 1,78 1,77 1,77	145 169 194 219	2,43 2,47 2,51 2,55
10	100	6,5 7 8 10 12 14 16	12	4	12,8 13,8 15,6 19,2 22,8 26,3 29,7	10,1 10,8 12,2 15,1 17,9 20,6 23,3	122 131 147 179 209 237 264	3,09 3,08 3,07 3,05 3,03 3,00 2,98	193 207 233 284 331 375 416	3,88 3,88 3,87 3,84 3,81 3,78 3,74	50,7 54,2 60,9 74,1 86,9 99,3 112	1,99 1,98 1,98 1,96 1,95 1,94 1,94	214 231 265 333 402 472 542	2,68 2,71 2,75 2,83 2,91 2,99 3,06
11	110	7 8	12	4	15,2 17,2	11,9 13,5	176 198	3,40 3,39	279 315	4,29 4,28	72,7 81,8	2,19 2,18	308 353	2,96 3,00
12,5	125	8 9 10 12 14 16	14	4,6	19,7 22,0 24,3 28,9 33,4 37,8	15,5 17,3 19,1 22,7 26,2 29,6	294 327 360 422 482 539	3,87 3,86 3,85 3,82 3,80 3,78	467 520 571 670 764 853	4,87 4,86 4,84 4,82 4,78 4,75	122 135 149 174 200 224	2,49 2,48 2,47 2,46 2,45 2,44	516 582 649 782 916 1050	3,36 3,40 3,45 3,53 3,61 3,68

№ профиля	Размеры, мм				Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Масса 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	
							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x<sub>0</sub></sub> макс, см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> макс, см	J <sub>y<sub>0</sub></sub> мин, см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> мин, см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
14	140	9 10 12	14	4,6	24,7 27,3 32,5	19,1 21,5 25,5	466 512 602	4,34 4,33 4,31	739 814 957	5,47 5,46 5,43	192 211 248	2,79 2,78 2,76	818 911 1097	3,78 3,82 3,90
16	160	10 11 12 14 16 18 20	16	5,3	31,4 34,4 37,4 43,3 49,1 54,8 60,4	24,7 27,0 29,4 34,0 38,5 43,0 47,4	774 844 913 1046 1175 1299 1419	4,96 4,95 4,94 4,92 4,89 4,87 4,85	1229 1341 1450 1662 1866 2061 2248	6,25 6,24 6,23 6,20 6,17 6,13 6,10	319 348 376 431 485 537 589	3,19 3,18 3,17 3,16 3,14 3,13 3,12	1356 1494 1633 1911 2191 2472 2756	4,30 4,35 4,39 4,47 4,55 4,63 4,70
18	180	11 12	16	5,3	38,8 42,2	30,5 33,1	1216 1317	5,60 5,59	1933 2093	7,06 7,04	500 540	3,59 3,58	2128 2324	4,85 4,89
20	200	12 13 14 16 20 25 30	18	6	47,1 50,9 54,6 62,0 76,5 94,3 111,5	37,0 39,9 42,8 48,7 60,1 74,0 87,6	1823 1961 2097 2363 2871 3466 4020	6,22 6,21 6,20 6,17 6,12 6,06 6,00	2896 3116 3333 3755 4560 5494 6351	7,84 7,83 7,81 7,78 7,72 7,63 7,55	749 805 861 970 1182 1438 1688	3,99 3,98 3,97 3,96 3,93 3,91 3,89	3182 3452 3722 4264 5355 6733 8130	5,37 5,42 5,46 5,54 5,70 5,89 6,07
22	220	14 16	21	7	60,4 68,6	47,4 53,8	2814 3175	6,83 6,81	4470 5045	8,60 8,58	1159 1306	4,38 4,36	4941 5661	5,93 6,92

25	250	16 18 20 22 25 28 30	24	8	78,4 87,7 97,0 106,1 119,7 113,1 142,0	61,5 68,9 76,1 83,3 94,0 104,5 111,4	4717 5247 5765 6270 7006 7717 8177	7,76 7,73 7,71 7,69 7,65 7,61 7,59	7492 8337 9160 9961 11125 12244 12965	9,78 9,75 9,72 9,69 9,64 9,59 9,56	1942 2158 2370 2579 2887 3190 3389	4,98 4,96 4,94 4,93 4,91 4,89 4,89	8286 9342 10401 11464 13064 14674 15753	6,75 6,83 6,91 7,00 7,11 7,23 7,31
----	-----	--	----	---	--	--	--	--	---	--	--	--	---	--

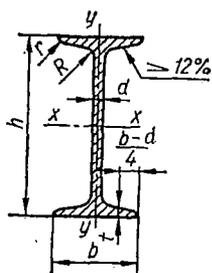


Уголки неравнобокие (ГОСТ 8510—57)

№ профиля	Размеры, мм					Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Масса 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей										
	B	b	d	R	r			x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u		
								J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	u <sub>0</sub> , см	J <sub>y<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	J <sub>u мин</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u мин</sub> , см	tg α
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3 4	3,5	1,2	1,49 1,94	1,17 1,52	1,52 1,93	1,01 1,00	0,46 0,57	0,55 0,54	3,26 4,38	1,08 1,12	0,82 1,12	0,49 0,53	0,28 0,35	0,43 0,43	0,382 0,374
4/2,5	40	25	3 4	4	1,3	1,89 2,47	1,48 1,94	3,06 3,93	1,27 1,26	0,93 1,18	0,70 0,69	6,37 8,53	1,32 1,37	1,58 2,15	0,59 0,63	0,56 0,71	0,54 0,54	0,385 0,381

№ профиля	Размеры, мм					Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Масса 1 пог. м, кг	Справочные величины для осей											
	B	b	d	R	r			x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u			
								J <sub>x</sub> , м <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	u <sub>0</sub> , см	J <sub>y<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	J <sub>u<sub>мин</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u<sub>мин</sub></sub> , см	tg σ	
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382	
			4			2,80		2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403	
			4			3,17		2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407	
			4			3,58		2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,41		3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	
			5			4,98		3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90		4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68		6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407	
			5			5,59		4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7/5,5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436	
			6			7,25		5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47		7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
			6			7,55		5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386

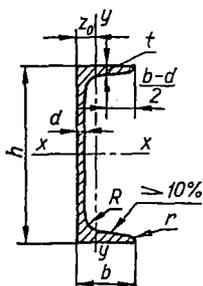
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
			6			8,54		6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18		8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
			7			11,1		8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6		9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5		12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
			7			12,3		9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8			13,9		10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407	
			8			16		12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7		15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4		18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411	
			10			22,2		17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391	
			10			25,3		19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12			30		23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7		27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375	
			12			33,7		26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,399	
			12			37,9		29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9		34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8		39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410	
			16			63,6		49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1		55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20			78,5		61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405



Балки двутавровые (ГОСТ 8239—56\*)

№ профиля	Масса 1 пог. м, кг	Размеры, мм						Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
		h	b	d	t	R	r		x—x				y—y		
									J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15	6	71,4	18 930	947	16,3	540	666	85,9	3,05

45	65,2	450	160	8,6	14,2	16	7	83,5	27 450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17	7	97,8	39 290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55 150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75 450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101 400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134 600	3840	27,7	2230	2720	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152 700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
706	184	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175 370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09



Продолжение приложения 1

Швеллеры (ГОСТ 8240—56\*)

№ профиля	Масса 1 пог. м, кг	Размеры, мм						Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t	R	r		x—x				y—y			
									J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54

№ профиля	Масса 1 пог. м, кг	Размеры, мм						Площадь профиля, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t	R	r		x—x				y—y			
									J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>2</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	741	92,6	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Пределы прочности некоторых материалов

Материал	Предел прочности при	
	растяжении	сжатии
	кг/мм <sup>2</sup>	
Чугун серый обыкновенный . . . . .	14—18	60—100
Чугун серый мелкозернистый . . . . .	21—25	до 140
Пластмассы:		
Бакелит . . . . .	2—3	8—10
Целлулоид . . . . .	5—7	—
Текстолит . . . . .	8,5—10	13—25
Гетинакс . . . . .	15—17	15—18
Бакелизованная фанера . . . . .	13	11,5
Дерево (при 15% влажности):		
Сосна вдоль волокон . . . . .	8	4
» поперек » . . . . .	—	0,5
Ель вдоль волокон . . . . .	6,5	3,5
» поперек » . . . . .	—	0,4
Дуб вдоль волокон . . . . .	9,5	5
» поперек » . . . . .	—	1,5
Камни:		
Гранит . . . . .	0,3	12—26
Песчаник . . . . .	0,2	4—15
Известняк . . . . .	—	5—15
Кирпич . . . . .	—	0,74—3
Бетон . . . . .	—	0,5—3,5
Каменная кладка на растворе . . . . .	0,02—0,05	0,25—0,90

Механические характеристики чугуна

Марка чугуна	Предел прочности при				Твердость по Бринеллю HB	Предел выносливости при	
	растяжении $\sigma_B$	сжатии $\sigma_{\text{сж}}$	изгибе $\sigma_{\text{изг}}$	кручении $\tau_B$		изгибе $\sigma_{\text{изг}-1}$	кручении $\tau_{-1}$
	кг/мм <sup>2</sup>						
СЧ 12-28	12	50	28	—	143—229	—	—
СЧ 15-32	15	65	32	24	163—229	7	5
СЧ 18-36	18	70	36	—	170—229	—	—
СЧ 21-40	21	75	40	28	171—241	10	8
СЧ 24-44	24	85	44	30	187—217	12	10
СЧ 28-48	28	100	48	35	170—241	14	11
СЧ 32-52	32	110	52	39	187—255	14	11
СЧ 35-56	35	120	56	40	197—269	15	11,5
СЧ 38-60	38	140	60	46	207—269	15	11,5
ВЧ 40-10	40	160—170	—	48—51	156—197	15—17	19,8
ВЧ 50-1,5	50	186—200	—	74—79	187—255	23—27	17—21
ВЧ 60-2	60	204—229	—	66—81	197—269	17—23	15—16

Примечание. Предел текучести  $\sigma_T$  составляет для  
 ВЧ 40-10 — 30;  
 ВЧ 50-1,5 — 38;  
 ВЧ 60-2 — 42.

## Механические характеристики углеродистых конструкционных сталей

Марка стали	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$	Относительное удлинение $\delta$ , %, при $l = 10d$	Ударная вязкость $a_K$ , (кг·м)/см <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}^H$	$\sigma_{-1}^O$	$\tau_{-1}^K$
	ис. менее					кг/мм <sup>2</sup>		
	кг/мм <sup>2</sup>							
10	34	21	14	31	24	16—22	12—15	8—12
20	42	25	16	25	—	17—22	12—16	10—13
25	46	28	—	23	9	19—25	—	—
30	50	30	17	21	8	20—27	17—21	11—14
35	54	32	19	20	7	22—30	17—22	13—18
40	58	34	—	19	6	23—32	18—24	14—19
45	61	36	22	16	5	25—34	19—25	15—20
50	64	38	—	14	4	27—35	20—26	16—21
55	66	39	—	13	—	—	—	—
60	69	41	—	12	—	31—38	22—28	18—22
20Г	46	28	—	24	—	—	—	—
30Г	55	32	—	20	8	22—32	—	—
50Г	66	40	—	13	4	29—36	—	—
20Х	80	65	—	11	6	38	—	17—23
40Х	100	80	—	10	6	35—38	25	22,5
45Х	105	85	—	9	5	40—50	—	—
30ХМ	95	75	—	11	8	31—41	37	23
35ХМ	100	85	—	12	8	47—51	—	—
40ХН	100	80	39	11	7	40	29	24
50ХН	110	90	—	9	5	55	—	—
40ХФА	90	75	—	10	9	38—49	—	—
38ХМЮА	100	85	—	14	9	42—55	—	—
12ХНЗА	95	70	40	11	9	39—47	27—32	22—26
20ХНЗА	95	75	—	12	10	43—45	30—32	24,5—25,5
30ХНЗА	100	80	—	10	8	52—70	—	32—40
40ХНМА	100	95	—	12	10	50—70	—	27—38
30ХГСА	110	85	—	10	5	51—54	50—53,5	22—24,5

Примечания: 1. Пределы выносливости получены на полнрованных образцах.

2. При использовании сталей по ГОСТ 380—60 следует учесть примерное соответствие марок:

Сталь Ст. 3 соответствует стали 20;

» Ст. 4 » стали 25;

» Ст. 5 » стали 35;

» Ст. 6 » стали 45.

## Механические характеристики жаропрочных сплавов

Вид сплава	Марка стали	$\sigma_B$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{-1}$	$E$	$\delta$	$\psi$	$a_{K\sigma}$ (кг·м)/см <sup>2</sup>
		кг/мм <sup>2</sup>			%			
Аустенитные стали	ЭИ734	100	60	—	17 200	20	25	3
	ЭИ589	91,8—102	79,5	—	21 100	15	15—25	3
	ЭИ590	76,5—85,6	33,6—40,8	—	—	31—44	40—49	10
На никелевой основе при 20° С	ХН77ТЮ	100	60	36,7	19 400	25	28	8
	ЭИ826	105	72	38,8	20 400	10	12	2
	ВЖ98	75	38,8	31	—	40	—	—
На железоникелевой основе при 20° С	ХН35ВТЮ	135	94	—	22 300	14	15—29	3,5—7
	ЭП105	95	70	—	19 000	10	13	2,5
	ХН35ВТР	80	45	—	21 400	20	35	10
Титановые сплавы в отожженном состоянии	BT5	77	72	45,9	10 700	8,5	40	4
	OT4	80	68	38,8—43,8	11 000	13	25—50	4
Ниобиевый сплав	ВН-2 при $T = 20^\circ \text{C}$	65—75	53—70	48,0	11 200	25—30	60—70	27,0
	» » $T = 1200^\circ \text{C}$	18—20	11—12	—	10 900	30—35	100	—
	» » $T = 1600^\circ \text{C}$	4—5	2,0	—	10 700	50—60	100	—
Молибденовый сплав	ВМ-1 при $T = 20^\circ \text{C}$	76,0	50,0	50,0	32 800	25	55	0,2
	» » $T = 1200^\circ \text{C}$	25,0	20,0	—	25 900	22	90	—
	» » $T = 1600^\circ \text{C}$	6,0	4,0	—	21 200	55	100	—

Вид сплава	Марка стали	$\sigma_B$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{-1}$	$E$	$\delta$	$\psi$	$a_{K_1}$ (кг·м)/см <sup>2</sup>
		кг/мм <sup>2</sup>				%		
Танталовый сплав	Ta+10% W при T = 20° C	60,0	48—50	—	18 400	36,0	96	—
	» » T = 1250° C	18,5	10,0	—	15 500	45,0	94	—
	Ta+10% W при T = 1500° C	15,0	8,5	—	14 700	50—53	95	—
Вольфрамовый сплав	ВВ-2 при T = 1000° C	20—24	—	—	36 000	45—48	80—90	—
	» » T = 1500° C	14—15	—	—	34 000	48—58	90—95	—
	» » T = 2000° C	8—8,5	—	—	28 000	60—70	95—96	—

## Механические характеристики пружинных сталей

Приложение 6

Сталь	Характеристики пружинных сталей при							
	растяжении				сжатии			
	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\sigma_{пц}$	$E$	$\tau_B$	$\tau_T$	$G$	Предел выносливости $\tau_0$ пружины при пульсирующем цикле, кг/мм <sup>2</sup>
	кг/мм <sup>2</sup>							
Среднеуглеродистая	150—160	100—120	75—90	$2,1 \cdot 10^4$	85—110	60—80	$8,1 \cdot 10^3$	50—65
Высокоуглеродистая	145—170	95—135	80—100	$2,0 \cdot 10^4$	110—140	65—90	$7,6 \cdot 10^3$	50—70
Хромованадиевая	160—175	150—160	90—100	$2,01 \cdot 10^4$	170—130	95—100	$8,0 \cdot 10^3$	55—60
Кремнемарганцевая	160—170	140—150	90—95	$2,05 \cdot 10^4$	135	95—100	$7,6 \cdot 10^3$	50—55
Кремневанадиевая	140—150	95—105	60—65	$2,3 \cdot 10^4$	120—125	90	$8,3 \cdot 10^3$	45—50

Примечание. Предел выносливости пружины дан при симметричном цикле  $\tau_{-1} = 0,6\tau_0$ ; диаграмма предельных напряжений для пружины характеризуется коэффициентом  $\Psi_{\tau} \approx 0,2$ .

## Механические характеристики некоторых цветных металлов

Сплавы	Материал	Марка	$\sigma_t$	$\sigma_b$	$\delta, \%$	НВ	Область применения
			кг/мм <sup>2</sup>				
Медные	Латунь	Л68	9,1; 52	32; 66	55; 3	55; 150	Трубы, проволока, листы
	Латунь алюминиевая	ЛА77-2	14; —	40; 65	55; 12	60; 170	Трубы, трубки конденсаторные
	Латунь марганцовистая	ЛМц58-2	15,6; —	40; 70	40; 10	85; 175	Прутки, листы
	Бронзы оловянистые	Бр. О10	—	25; —	11; —	80; —	Арматура
		Бр. ОФ10-1	14; —	20; 30	—; 3	80; 100	Шестерни, подшипники
	Бронза алюминиевая	Бр. А5	16; 50	38; 40	65; 4	60; 200	Ленты, полосы
Бронза кремнистая	Бр. К3	—	25; —	10—20	—	Литье	
Алюминиевые	Нормальный дуралюмин	Д1	11; 24	21; 42	18; 15	45; 113	Трубы, пресованные профили
	Дуралюмин повышенной прочности	Д6	5; 38	18; 50	8; 20	50; 125	Трубы, профили
	Алюминомагниевый сплав	АМг	10; 21	18; 25	6; 23	45; 60	Трубы, листы

Примечание. Первые цифры даны для мягкого состояния материала, вторые — для твердого.

## Механические характеристики основных типов пластмасс

Материал	Характеристика	Вес единицы объема, Г/см <sup>3</sup>	Предел прочности $\sigma_B$ при			E	G	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B^P}$
			растяжению	сжатию	изгибе			
Стеклопласты	На основе ткани	1,4—1,85	26—40	10—30	13—15	1800—2200	350—400	0,22—0,25
	На основе нитей, ориентированных в двух взаимно перпендикулярных направлениях	1,7—1,9	30—50	—	23—46	2400—3500	—	0,25—0,28
Текстолиты	На основе хлопчатобумажных тканей	1,3—1,4	6—11	13—15	9—16	600—1000	250	0,25—0,3
Древесные пластики	На основе древесины	1,2—1,4	14—22	12—15,5	16,5—22	1200—3400	80—250	0,25—0,3
Гетинакс	На основе бумаги, пропитанной фенолформальдегидной смолой	1,3—1,4	7,0—10,0	—	8—14	1000—1800	80—250	0,20—0,3
Фибра	На основе спецсортов бумаги	1,1—1,25	6,5—10	8—14	6—9,5	700	—	0,2—0,3
Волокнит	Наполнители: хлопковые очесы, асболокно, стекловолокно	1,35—1,9	3,0—13,0	11—13	4,0—10,0	500—850	—	0,25—0,30

Термореактивные пресс-порошки	Наполнители: древесная кварцевая мука, слюда	1,4—1,9	3,5—6,0	15—18	5,0—8,0	—	—	0,3—0,4
Органическое стекло	На основе полимеров и сополимеров метакриловой кислоты	1,18	7,1—9,2	—	9,9—15,3	290—410	—	0,1—0,16
Термопласты	Линейные полимеры	0,92—2,10	1,2—8,0	—	1,2—10,0	15—70	—	0,15—0,2
Пенопласты	Неармированные	0,06—0,22	0,04—0,42	0,017—0,45	0,07—0,50	3,7—20,0	1,5—1,9	—
Фторопласт-4	—	2,1—2,3	1,4—2,5	2,0	1,1—1,4	47—85	—	—
Капрон	Литье	1,14	3,5—7,0	6—8	4,5—7	140—200	45—48	—
Капрон	Поликапролактан	1,14	6—8	7—8	9	70—105	—	—
Полиамид 68	—	1,13	4,5—5	4,5—5	7—9	120	—	—
Винипласт	—	1,38—1,4	4—6	8—16	9	300—400	—	—
Полиэтилен НД	—	1,38—1,4	2,5—3,5	2,8—4	3	55—88	—	—
Полистирол блочный	—	1,05—1,07	3,5	10	9,5—10,0	120—320	—	—

## Модули упругости и коэффициенты Пуассона

Материал	Модуль упругости $E$ , кг/см <sup>2</sup>	Модуль упругости $G$ , кг/см <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона $\mu$
Чугун серый, белый . . . . .	$(1,15 \div 1,60) 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	0,23—0,27
Ковкий чугун . . . . .	$1,55 \cdot 10^6$	—	—
Углеродистые стали . . . . .	$(2,0 \div 2,1) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,24—0,28
Легированные стали . . . . .	$(2,1 \div 2,2) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,25—0,30
Медь прокатанная . . . . .	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	0,31—0,34
Медь холодноотянутая . . . . .	$1,3 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	—
Медь литая . . . . .	$0,84 \cdot 10^6$	—	—
Фосфористая бронза ката- ная . . . . .	$1,15 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	0,32—0,35
Латунь холодноотянутая . . . . .	$(0,91 \div 0,99) 10^6$	$(3,5 \div 3,7) 10^5$	0,32—0,42
Корабельная латунь ката- ная . . . . .	$1,0 \cdot 10^6$	—	0,36
Марганцовистая бронза ката- ная . . . . .	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	0,35
Алюминий катаный . . . . .	$0,69 \cdot 10^6$	$(2,6 \div 2,7) 10^5$	0,32—0,36
Алюминиевая проволока тянутая . . . . .	$0,7 \cdot 10^6$	—	—
Алюминиевая бронза литая	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	—
Дуралюмин катаный . . . . .	$0,71 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	—
Цинк катаный . . . . .	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	0,27
Свинец . . . . .	$0,17 \cdot 10^6$	$0,70 \cdot 10^5$	0,42
Лед . . . . .	$0,1 \cdot 10^6$	$(0,28 \div 0,3) 10^5$	—
Стекло . . . . .	$0,56 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^5$	0,25
Гранит . . . . .	$0,49 \cdot 10^6$	—	—
Известняк . . . . .	$0,42 \cdot 10^6$	—	—
Мрамор . . . . .	$0,56 \cdot 10^6$	—	—
Песчаник . . . . .	$0,18 \cdot 10^6$	—	—
Каменная кладка . . . . .			
из гранита . . . . .	$(0,09 \div 0,1) 10^6$	—	—
» известняка . . . . .	$0,06 \cdot 10^6$	—	—
» кирпича . . . . .	$(0,027 \div 0,030) 10^6$	—	—
Бетон при пределе проч- ности, кг/см <sup>2</sup>			
100 . . . . .	$(0,146 \div 0,196) 10^6$	—	0,16—0,18
150 . . . . .	$(0,164 \div 0,214) 10^6$	—	0,16—0,18
200 . . . . .	$(0,182 \div 0,232) 10^6$	—	0,16—0,18
Дерево вдоль волокон . . . . .	$(0,1 \div 0,12) 10^6$	$0,055 \cdot 10^5$	—
Дерево поперек волокон . . . . .	$(0,005 \div 0,01) 10^6$	—	—
Каучук . . . . .	$0,00008 \cdot 10^6$	—	0,47
Текстолит . . . . .	$(0,06 \div 0,1) 10^6$	—	—
Гетинакс . . . . .	$(0,1 \div 0,17) 10^6$	—	—
Бакелит . . . . .	$43 \cdot 10^6$	—	0,36
Висхмялит (ИМ-44) . . . . .	$(40 \div 42) 10^3$	—	0,37
Целлулоид . . . . .	$(14,3 \div 27,5) 10^3$	—	0,33—0,38

Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений  
на растяжение и сжатие

Материал	Допускаемое напряжение, $кг/см^2$ , на	
	растяжение	сжатие
Чугун серый в отливках . . . . .	280—800	1200—1500
Сталь Ст. 2 . . . . .		1400
Сталь Ст. 3 . . . . .		1600
Сталь Ст. 3 в мостах . . . . .		1400
Сталь машиностроительная (конструкционная) углеродистая . . . . .		600—2500
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная . . . . .		1000—4000 и выше
Медь . . . . .		300—1200
Латунь . . . . .		700—1400
Бронза . . . . .		600—1200
Алюминий . . . . .		300—800
Алюминиевая бронза . . . . .		800—1200
Дуралюмин . . . . .		800—1500
Текстолит . . . . .		300—400
Гетинакс . . . . .		500—700
Бакелизированная фанера . . . . .		400—500
Сосна вдоль волокон . . . . .	70—100	100—120
Сосна поперек волокон . . . . .	—	15—20
Дуб вдоль волокон . . . . .	90—130	130—150
Дуб поперек волокон . . . . .	—	20—35
Каменная кладка . . . . .	до 3	4—40
Кирпичная кладка . . . . .	до 2	6—25
Бетон . . . . .	1—7	10—90

Допускаемые напряжения на срез для заклепочных  
и сварных соединений

Тип соединения	Напряжение на срез, $кг/см^2$
<b>Заклепочное:</b>	
основные элементы из стали 20 . . . . .	1000
заклепка в рассверленных отверстиях (класс В) . . . . .	1400
заклепка в продавленных отверстиях (класс С) . . . . .	1000
<b>Сварное:</b>	
сварка ручная, электроды с тонкой обмазкой . . . . .	800
сварка ручная, электроды с толстой обмазкой . . . . .	1100
автоматическая сварка . . . . .	1100

Таблица функций акад. А. Н. Крылова для расчета балок постоянного сечения на упругом основании

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
0	1	0	0	0
0,010	1,0000	0,01000	0,00005	0,00000
0,020	1,0000	0,02000	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
$\pi/2$	0,0000	1,2546	1,1507	0,6273
1,60	— 0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,70	— 0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,80	— 0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,90	— 1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
2,00	— 1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,10	— 2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,20	— 2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,30	— 3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,40	— 4,0976	— 0,1386	1,8461	1,9461
2,50	— 4,9128	— 0,5885	1,8105	2,1293
2,60	— 5,8003	— 1,1236	1,7256	2,3065
2,70	— 6,7565	— 1,7509	1,5827	2,4725
2,80	— 7,7759	— 2,4770	1,3721	2,6208
2,90	— 8,8471	— 3,3079	1,0838	2,7443
3,00	— 9,9669	— 4,2485	0,7069	2,8346
3,10	— 11,1119	— 5,3023	0,2303	2,8823
3,20	— 12,2656	— 6,4711	— 0,3574	2,8769
3,30	— 13,4048	— 7,7549	— 1,0678	2,8068
3,40	— 14,5008	— 9,1507	— 1,9121	2,6589
3,50	— 15,5198	— 10,6525	— 2,9014	2,4195
3,60	— 16,4218	— 12,2508	— 4,0459	2,0735
3,70	— 17,1622	— 13,9315	— 5,3544	1,6049
3,80	— 17,6875	— 15,6761	— 6,8343	0,9969
3,90	— 17,9387	— 17,4599	— 8,4909	0,2321
4,00	— 17,8498	— 19,2524	— 10,3265	— 0,7073
4,10	— 17,3472	— 21,0160	— 12,3404	— 1,8392
4,20	— 16,3505	— 22,7055	— 14,5274	— 3,1812
4,30	— 14,7722	— 24,2669	— 16,8773	— 4,7501
4,40	— 12,5180	— 25,6373	— 19,3743	— 6,5615
4,50	— 9,4890	— 26,7447	— 21,9950	— 8,6290
4,60	— 5,5791	— 27,5057	— 24,7117	— 10,9638
4,70	— 0,6812	— 27,8274	— 27,4823	— 13,5732

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
4,80	— 5,3164	—27,6052	—30,2589	—16,4604
4,90	—12,5239	—26,7239	—32,9814	—19,6232
5,00	21,0504	—25,0565	—35,5775	—23,0525
5,10	30,9997	—22,4661	—37,9619	—26,7317
5,20	42,4661	—18,8057	—40,0350	—30,6346
5,30	55,5317	—13,9201	—41,6826	—34,7246
5,40	70,2637	— 7,6440	—42,7727	—38,9524
5,50	86,7044	— 0,1901	—43,1593	—43,2557
5,60	104,8687	— 9,7544	—42,6775	—47,5558
5,70	124,7352	21,2199	—41,1454	—51,7563
5,80	146,2448	34,7564	—38,3640	—55,7429
5,90	169,2837	50,5203	—34,1198	—59,0363
6,00	196,1881	70,6079	—27,4846	—62,7889
6,10	221,8019	91,4992	—19,4005	—65,1503
6,20	245,5231	112,5249	—10,2356	—66,4981
2 $\pi$	267,7468	133,8725	0	—66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	—66,9175
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	—63,3105
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	—13,2842
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	133,6506
5/2 $\pi$	0	643,9927	643,9926	321,9964
8,00	— 216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,50	—1479,3701	241,4136	981,0984	860,3917
9,00	—3691,4815	—1010,8800	834,8607	1340,3007
3 $\pi$	—6195,8239	—3097,9120	0	1548,9560
9,50	—6660,9594	—3581,4756	— 250,9959	1539,7410
10,0	—9240,8733	—7616,1462	—2995,7095	812,3636

$$Y_1 = \operatorname{ch} \xi \cos \xi; \quad Y_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi);$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi; \quad Y_4 = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi).$$

Таблица значений функций  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3^*$ 

$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
0	1,0000	1,0000	—1,0000	0,7	0,6997	0,0599	—0,3708
0,1	0,9907	0,8100	—0,9003	1/4 $\pi$	0,6448	0,0000	—0,3224
0,2	0,9651	0,6398	—0,8024	0,8	0,6354	—0,0093	—0,3131
0,3	0,9267	0,4888	—0,7077	0,9	0,5712	—0,0657	—0,2527
0,4	0,8784	0,3564	—0,6174	1,0	0,5083	—0,1108	—0,1988
0,5	0,8231	0,2415	—0,5323	1,1	0,4476	—0,1457	—0,1510
0,6	0,7628	0,1431	—0,4530	1,2	0,3899	—0,1716	—0,1091

\*  $\eta_1 = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)$ ;  $\eta_2 = -e^{-\xi} (\sin \xi - \cos \xi)$ ;  $\eta_3 = -e^{-\xi} \cos \xi$ .

$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\xi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
1,3	0,3355	-0,1897	-0,0729	4,2	-0,02042	0,00572	0,00735
1,4	0,2849	-0,2011	-0,0419	4,3	-0,01787	0,00699	0,00544
1,5	0,2384	-0,2068	-0,0158	4,4	-0,01546	0,00791	0,00377
1,2	0,2079	-0,2079	-0,0000	4,5	-0,01320	0,00852	0,00234
1,6	0,1959	-0,2077	0,0059	4,6	-0,01112	0,00886	0,00113
1,7	0,1576	-0,2047	0,0235	4,7	-0,00921	0,00898	0,00011
1,8	0,1234	-0,1985	0,0376	6/4 $\pi$	-0,00898	0,00898	0,00000
1,9	0,0932	-0,1899	0,0484	4,8	-0,00748	0,00892	-0,00072
2,0	0,0667	-0,1794	0,0563	4,9	-0,00593	0,00870	-0,00139
2,1	0,0439	-0,1675	0,0618	5,0	-0,00455	0,00837	-0,00191
2,2	0,0244	-0,1548	0,0652	5,1	-0,00334	0,00795	-0,00230
2,3	0,0080	-0,1416	0,0668	5,2	-0,00229	0,00746	-0,00259
3/4 $\pi$	0,0000	-0,1340	0,0670	5,3	-0,00139	0,00692	-0,00277
2,4	-0,0056	-0,1282	0,0669	5,4	-0,00063	0,00636	-0,00287
2,5	-0,0166	-0,1149	0,0658	7/4 $\pi$	0,00000	0,00579	-0,00290
2,6	-0,0254	-0,1019	0,0636	5,5	0,00001	0,00578	-0,00290
2,7	-0,0320	-0,0895	0,0608	5,6	0,00053	0,00520	-0,00287
2,8	-0,0369	-0,0777	0,0573	5,7	0,00095	0,00464	-0,00279
2,9	-0,0403	-0,0666	0,0534	5,8	0,00127	0,00409	-0,00268
3,0	-0,04226	-0,05632	0,04929	5,9	0,00152	0,00356	-0,00254
3,1	-0,04314	-0,04688	0,04501	6,0	0,00169	0,00307	-0,00238
$\pi$	-0,04321	-0,04321	0,04321	6,1	0,00180	0,00261	-0,00221
3,2	-0,04307	-0,03831	0,04069	6,2	0,00185	0,00219	-0,00202
3,3	-0,04224	-0,03060	0,03642	8/4 $\pi$	0,00187	0,00187	-0,00187
3,4	-0,04079	-0,02374	0,03227	6,3	0,00187	0,00181	-0,00184
3,5	-0,03887	-0,01769	0,02828	6,4	0,00184	0,00146	-0,00165
3,6	-0,03659	-0,01241	0,02450	6,5	0,00179	0,00115	-0,00147
3,7	-0,03407	-0,00787	0,02097	6,6	0,00172	0,00087	-0,00129
3,8	-0,03138	-0,00401	0,01770	6,7	0,00162	0,00063	-0,00113
3,9	-0,02862	-0,00077	0,01469	6,8	0,00152	0,00042	-0,00097
5/4 $\pi$	-0,02786	0,0000	0,01393	6,9	0,00141	0,00024	-0,00082
4,0	-0,02583	0,00189	0,01197	7,0	0,00129	0,00009	-0,00069
4,1	-0,02309	0,00403	0,00953	9/4 $\pi$	0,00120	0,00000	-0,00060

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 3-е. М., «Наука», 1968.
2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Изд. 14-е. М., «Наука», 1965.
3. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. Изд. 3-е. М., «Высшая школа», 1969.
4. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. Изд-во Московского университета, 1969.
5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. Изд. 2-е. М., «Машиностроение», 1967.
6. Писаренко Г. С. и др. Сопротивление материалов. Изд. 2-е. К., «Техніка», 1967.
7. Пономарев С. Д., Феодосьев В. И., Малинин Н. Н. Расчеты на прочность в машиностроении. М., Машгиз, 1959.
8. Попов А. А. Курс сопротивления материалов (теория и задачи). Изд. 2-е. М., Машгиз, 1958.
9. Рабинович И. М. Основы строительной механики стержневых систем. Изд. 3-е. М., Госстройиздат, 1960.
10. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. Переработанное и дополненное издание. М., Физматгиз, 1962.
11. Рубинин М. В. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. Росвузиздат, 1963.
12. Серенсен С. В. и др. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. М., Машгиз, 1963.
13. Сияговский И. С. Сопротивление материалов. Изд. 2-е, переработанное. М., «Колос», 1968.
14. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Изд. 2-е. М., «Наука», 1967.
15. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов, т. 1 и 2. Изд. 2-е. М., «Наука», 1965.
16. Ужик Г. В. Методы испытаний металлов и деталей машин на выносливость. М., Изд-во АН УССР, 1948.
17. Уманский А. А., Вольмир А. С., Коданев А. И. Курс сопротивления материалов. М., Изд-во ВВИА им. Жуковского, 1954.
18. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Изд. 6-е. М., «Наука», 1972.
19. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е. М., «Машиностроение», 1970.
20. Филоненко-Бородич М. М. и др. Курс сопротивления материалов. М., Физматгиз, 1961.
21. Фридман Я. Б. Механические свойства материалов. Изд. 2-е, переработанное. М., Оборонгиз, 1952.
22. Шапошников Н. А. Механические испытания металлов. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. М., Машгиз, 1954.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов . . . . .	3
<b>Глава I. Введение</b>	
§ 1. Наука о сопротивлении материалов. Изучаемые объекты . . .	5
§ 2. Виды деформации стержня. Понятие о деформированном состоянии материала . . . . .	8
§ 3. Основные гипотезы науки о сопротивлении материалов . . . .	11
<b>Глава II. Геометрические характеристики плоских сечений</b>	
§ 4. Статические моменты площади. Центр тяжести площади . . . .	13
§ 5. Моменты инерции плоских фигур . . . . .	15
§ 6. Моменты инерции сложных сечений . . . . .	19
§ 7. Моменты инерции относительно параллельных осей . . . . .	20
§ 8. Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей . . . . .	23
§ 9. Определение направления главных осей. Главные моменты инерции . . . . .	24
§ 10. Графическое представление моментов инерции . . . . .	26
§ 11. Понятие о радиусе и эллипсе инерции . . . . .	30
§ 12. Порядок расчета . . . . .	31
<b>Глава III. Внешние и внутренние силы. Метод сечений. Эпюры внутренних сил</b>	
§ 13. Классификация внешних сил . . . . .	33
§ 14. Внутренние силы. Метод сечений. Эпюры . . . . .	35
§ 15. Эпюры продольных сил . . . . .	38
§ 16. Эпюры крутящих моментов . . . . .	40
§ 17. Балки и их опоры . . . . .	43
§ 18. Вычисление реакций . . . . .	45
§ 19. Усилия и моменты в сечениях балки . . . . .	46
§ 20. Построение эпюр $Q$ и $M$ в балках . . . . .	48
§ 21. Дифференциальные зависимости при изгибе. Некоторые особенности эпюр $Q$ и $M$ . . . . .	52
§ 22. Построение эпюр для рам . . . . .	60
§ 23. Построение эпюр для криволинейных стержней . . . . .	65
§ 24. Дифференциальные зависимости при изгибе плоских криволинейных стержней . . . . .	70
§ 25. Построение эпюр внутренних усилий для пространственных стержней . . . . .	77
§ 26. Напряжения в сечении . . . . .	81
§ 27. Условие прочности и жесткости. Виды расчетов . . . . .	84
<b>Глава IV. Растяжение и сжатие. Механические характеристики материалов</b>	
§ 28. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Расчет на прочность и жесткость . . . . .	85

§ 29.	Испытание материалов на растяжение . . . . .	90
§ 30.	Испытание материалов на сжатие . . . . .	99
§ 31.	Понятие о механизме образования деформаций . . . . .	102
§ 32.	Понятие о концентрации напряжений . . . . .	105
§ 33.	Влияние различных факторов на механические свойства материалов . . . . .	109
§ 34.	Допускаемые напряжения . . . . .	116
<b>Глава V. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии</b>		
§ 35.	Примеры расчетов при действии сосредоточенных сил . . . . .	118
§ 36.	Учет собственного веса и сил инерции . . . . .	126
§ 37.	Статически неопределимые конструкции . . . . .	134
§ 38.	Расчет гибких нитей . . . . .	143
<b>Глава VI. Основы теории напряженного и деформированного состояния</b>		
§ 39.	Напряжения в точке. Главные площадки и главные напряжения . . . . .	156
§ 40.	Линейное напряженное состояние . . . . .	159
§ 41.	Плоское напряженное состояние . . . . .	161
§ 42.	Прямая задача в плоском напряженном состоянии. Круг напряжений . . . . .	164
§ 43.	Обратная задача в плоском напряженном состоянии . . . . .	167
§ 44.	Понятие об объемном напряженном состоянии . . . . .	170
§ 45.	Деформации при объемном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука . . . . .	172
§ 46.	Потенциальная энергия деформации . . . . .	176
<b>Глава VII. Критерии прочности</b>		
§ 47.	Задачи теорий прочности . . . . .	176
§ 48.	Классические критерии (теории прочности) . . . . .	180
§ 49.	Понятие о новых теориях прочности . . . . .	186
§ 50.	Примеры проверки прочности . . . . .	190
<b>Глава VIII. Сдвиг</b>		
§ 51.	Сдвиг. Расчет на срез . . . . .	192
§ 52.	Чистый сдвиг . . . . .	193
<b>Глава IX. Кручение</b>		
§ 53.	Напряжения и деформации при кручении. Условия прочности и жесткости . . . . .	204
§ 54.	Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении . . . . .	210
§ 55.	Расчет валов на кручение . . . . .	211
§ 56.	Кручение стержней некруглого сечения . . . . .	216
§ 57.	Кручение тонкостенных стержней . . . . .	220
§ 58.	Расчет винтовых цилиндрических пружин . . . . .	224
§ 59.	Концентрация напряжений при кручении . . . . .	231
<b>Глава X. Изгиб</b>		
§ 60.	Нормальные напряжения при плоском изгибе прямого стержня . . . . .	234
§ 61.	Касательные напряжения при изгибе . . . . .	242
§ 62.	Расчет на прочность при изгибе . . . . .	247
§ 63.	О рациональной форме сечения . . . . .	256
§ 64.	Полный расчет балок на прочность . . . . .	257
§ 65.	Концентрация напряжений при изгибе . . . . .	260
§ 66.	Дифференциальное уравнение упругой линии . . . . .	264
§ 67.	Примеры определения перемещений интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси балки . . . . .	268
§ 68.	Определение перемещений в балках по методу начальных параметров . . . . .	276
§ 69.	Расчет балок переменного сечения на прочность и жесткость . . . . .	290
§ 70.	Расчет на действие сил инерции при изгибе . . . . .	302
<b>Глава XI. Дополнительные вопросы теории изгиба</b>		
§ 71.	О расчете составных балок . . . . .	304

§ 72. Касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного профиля. Центр изгиба . . . . .	307
§ 73. Основы расчета балок на упругом основании . . . . .	314
§ 74. Изгиб балок, материал которых не следует закону Гука . . . . .	319
<b>Глава XII. Сложное сопротивление</b>	
§ 75. Сложный и косоу изгиб . . . . .	324
§ 76. Изгиб с растяжением (сжатием) . . . . .	331
§ 77. Изгиб с кручением . . . . .	337
<b>Глава XIII. Общие теоремы об упругих системах. Общие методы определения перемещений</b>	
§ 78. Обобщенные силы и перемещения . . . . .	352
§ 79. Работа внешних сил . . . . .	355
§ 80. Работа внутренних сил . . . . .	357
§ 81. Применение начала возможных перемещений к упругим системам . . . . .	361
§ 82. Теоремы о возможности работ и перемещений . . . . .	364
§ 83. Общая формула для определения перемещений. Метод Мора . . . . .	366
§ 84. Перемещения, вызванные действием температуры . . . . .	371
§ 85. Вычисление интегралов Мора по способу Верещагина . . . . .	373
§ 86. Применение способа Верещагина к стержням переменного сечения . . . . .	378
§ 87. Потенциальная энергия деформации . . . . .	379
§ 88. Теорема Кастильяно. Теорема Лагранжа . . . . .	382
§ 89. Теорема о минимуме потенциальной энергии . . . . .	384
<b>Глава XIV. Статически неопределимые системы</b>	
§ 90. Основные понятия и определения. Этапы расчета статически неопределимой системы . . . . .	386
§ 91. Расчет простых статически неопределимых балок . . . . .	389
§ 92. Канонические уравнения метода сил . . . . .	392
§ 93. Многопролетные неразрезные балки. Уравнение трех моментов . . . . .	405
§ 94. Влияние неточного расположения опор по высоте . . . . .	413
§ 95. Расчет статически неопределимых криволинейных стержней . . . . .	414
§ 96. Определение перемещений в статически неопределимых системах . . . . .	416
§ 97. Контроль правильности решения статически неопределимой системы . . . . .	418
§ 98. О расчете пространственных рамных систем . . . . .	421
<b>Глава XV. Расчет плоских кривых брусев</b>	
§ 99. Определение напряжений в кривых брусев . . . . .	424
§ 100. Расчет на прочность кривых брусев . . . . .	431
§ 101. Определение перемещений в кривых стержнях . . . . .	434
<b>Глава XVI. Расчет толстостенных цилиндров и вращающихся дисков</b>	
§ 102. Толстостенный цилиндр, подверженный внутреннему и наружному давлению . . . . .	435
§ 103. Расчет составных цилиндров . . . . .	442
§ 104. Температурные напряжения в толстостенных цилиндрах . . . . .	444
§ 105. Примеры расчетов толстостенных цилиндров . . . . .	449
§ 106. Расчет вращающихся дисков . . . . .	452
<b>Глава XVII. Элементы теории тонкостенных оболочек</b>	
§ 107. Введение . . . . .	459
§ 108. Напряжения в осесимметричной оболочке . . . . .	460
§ 109. Распорные кольца в оболочках . . . . .	466
§ 110. Краевая задача для тонкой цилиндрической оболочки . . . . .	469
§ 111. Примеры учета изгибных напряжений в оболочках . . . . .	477

Глава XVIII. Расчет конструкций по предельным состояниям	
§ 112. Основные понятия о предельном состоянии	479
§ 113. Расчеты при растяжении и сжатии	481
§ 114. Расчеты при кручении	484
§ 115. Расчеты при изгибе	488
Глава XIX. Устойчивость сжатых стержней	
§ 116. Устойчивое и неустойчивое упругое равновесие	493
§ 117. Формула Эйлера для определения критической нагрузки сжатого стержня	494
§ 118. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы	497
§ 119. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности	501
§ 120. Расчеты сжатых стержней на устойчивость при помощи коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения	504
§ 121. О выборе материала и рациональных форм поперечных сечений для сжатых стержней	509
§ 122. Продольно-поперечный изгиб	510
Глава XX. Упругие колебания	
§ 123. Введение. Классификация механических колебаний	518
§ 124. Свободные гармонические колебания упругой системы с одной степенью свободы	523
§ 125. Вынужденные колебания упругих систем с одной степенью свободы	530
§ 126. Рассеяние энергии при колебаниях	533
§ 127. Вынужденные колебания с учетом рассеяния энергии	536
§ 128. Критическая скорость вращения вала	541
§ 129. Свободные колебания системы с двумя или несколькими степенями свободы	544
§ 130. Крутильные колебания валов и систем передач	549
§ 131. Поперечные колебания стержней с сосредоточенными массами	552
§ 132. Колебания упругих тел с распределенными массами	556
§ 133. Поперечные колебания призматических стержней	563
§ 134. Использование принципа сохранения энергии при решении задач о колебаниях	567
§ 135. Приближенные методы определения собственных частот колебаний упругих систем	570
Глава XXI. Сопротивление материалов действию повторно-переменных напряжений	
§ 136. Явление усталости материалов	580
§ 137. Понятие о механизме явления усталости	585
§ 138. Методы определения предела выносливости. Диаграммы усталости	586
§ 139. Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости	592
§ 140. Расчет на прочность при повторно-переменных напряжениях	601
Глава XXII. Расчеты на ударную нагрузку	
§ 141. Расчет на удар при осевом действии нагрузки	610
§ 142. Напряжения при скручивающем ударе	624
§ 143. Расчет на удар при изгибе	627
§ 144. Механические свойства материалов при ударе	633
Глава XXIII. Контактные напряжения	
§ 145. Основные понятия	635
§ 146. Формулы для контактных напряжений	636
§ 147. Проверка прочности при контактных напряжениях	639
Приложения	645
Литература	667

*Писаренко Георгий Степанович,  
Агарев Виктор Андреевич,  
Квитка Александр Львович,  
Попков Виктор Григорьевич,  
Уманский Эммануил Соломонович*

### **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Издательское объединение «Вища школа»  
Головное издательство

Редактор *Г. В. Елисеєва*  
Обложка художника *Б. И. Бродского*  
Художественный редактор *Ю. П. Щепкин*  
Технические редакторы  
*М. И. Ефимова, Л. Ф. Волкова*  
Корректоры *Ф. И. Слободская, Л. М. Машовец*

Сдано в набор 2.II 1973 г. Подписано к печати 1.X 1973 г. Формат  
бумаги 60 × 90<sup>1/16</sup>. Бумага тип № 2. Печ. л. 42. Уч.-изд. л. 39,81.  
Тираж 100 000 (1 завод 40 000), Изд. № 1164. БФ 07474. Цена в переплете № 5 1 руб. 25 коп., в переплете № 7 1 руб. 35 коп. Зак. 3-39,  
Головное издательство издательского объединения «Вища школа»  
252054, Киев, 54, Гоголевская, 7.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкинига» Госкомиздата УССР,  
Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.

1956. 30KOT.

114  
11686